

МЕХАНИКА

УДК 539.376

АНАЛИЗ ДОКРИТИЧЕСКОГО РОСТА ТРЕЩИН В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

© 2001. В.В. Бондаренко¹

В рамках математической модели докритического роста трещины в условиях ползучести рассмотрен вопрос о росте трещины при переменной нагрузке. Проанализировано три типа нагружения: мгновенное увеличение нагрузки, мгновенное снятие части нагрузки, кратковременная догрузка — разгрузка. Получены интегральные уравнения, описывающие процесс развития трещины после приложения таких нагрузок, для зависимостей текущей длины трещины от времени и скорости роста трещины от параметра нагружения. Полученные численные решения проанализированы для модельного случая бесконечной полосы с трещиной.

Введение

В работе [1] была сформулирована математическая модель докритического роста трещины при постоянной нагрузке. Авторы использовали критерий локального разрушения

$$\frac{\sigma_e}{1 - \omega} = \sigma_*, \quad (1)$$

учитывающий накопленную в процессе ползучести поврежденность в силовом критерии разрушения и выполняющийся на расстоянии ρ от текущего положения вершины трещины [2]. В данной модели процесс роста трещины описывался при помощи интегрального уравнения Вольтерра следующего вида [1]:

$$\int_0^z \left(\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c^q(z) - \frac{\tau_0 c^p(0)}{(1 + z)^p}, \quad (2)$$

где

$$\tau_0 = \frac{1 - c^q(0)}{c^p(0)}$$

есть безразмерное время страгивания трещины.

¹Бондаренко Владимир Владимирович, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; bondv@ssu.samara.ru

В настоящей работе используются следующие обозначения: σ_e — интенсивность напряжений; σ_* — мгновенный предел прочности при растяжении; ω — параметр поврежденности с кинетическим уравнением Качанова–Работнова [3]:

$$\dot{\omega} = A \left(\frac{\sigma_e}{1 - \omega} \right)^m, \quad \omega(0) = 0; \quad (3)$$

A, m — определяющие параметры материала; B, n — константы степенного закона теории установившейся ползучести, $\dot{\epsilon}_{ij} = (3/2)B\sigma_e^{n-1}s_{ij}$; s_{ij} — девиатор тензора напряжений; l и l_0 — текущая и начальная длина трещины соответственно. Безразмерные величины определим следующим образом:

$$\tau = tA(m+1)(\sigma^0(n, 0))^m \sigma_*^{n+1}, \quad z(\tau) = (l(t) - l_0)/\rho, \quad c(z) = C^*(l(t))/C_{cr}^*,$$

$$p = m/(n+1), \quad q = (m+1)/(n+1), \quad C_{cr}^* = BI_n \rho \sigma_*^{n+1},$$

где C^* — независящий от контура интегрирования интеграл теории установившейся ползучести [4]:

$$C^* = \oint_{\Gamma} \left(\frac{n}{n+1} B \sigma_e^{n+1} dx_2 - T_i \frac{\partial v_i}{\partial x_1} ds \right),$$

$T_i = \sigma_{ij}n_j$ — вектор напряжений на контуре интегрирования Γ , v_i — вектор скорости. Тогда z — безразмерная длина трещины, $\tau'(z)$ — величина, обратная безразмерной скорости роста трещины, $c(z)$ — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность напряжений у текущего положения вершины трещины.

Как отмечалось в [1], при проектировании элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, важно знать как текущую длину трещины $l(t)$, так и ее текущую скорость $\dot{l}(t)$. Поэтому и в настоящей работе будут построены уравнения для обеих зависимостей.

Рассмотрим процесс роста трещины при переменной нагрузке.

1. Мгновенная догрузка

Пусть в момент времени τ_1 после старта трещины, когда она уже подросла на величину z_1 , приложенная нагрузка мгновенно увеличилась с σ_1 до σ_2 . При этом параметр $c(z)$, характеризующий напряженное состояние в вершине трещины, также увеличится с $c_1(z_1)$ до $c_2(z_1)$.

Поскольку поврежденность ω меняется согласно кинетическому уравнению (3), то при мгновенном изменении напряжения поврежденность остается постоянной. Поэтому в момент времени $\tau_1 + 0$ критерий разрушения (1) у вершины трещины выполняется на расстоянии большем, чем ρ . Следовательно, в соответствии с критерием (1) трещина должна мгновенно подрасти на некоторую величину Δ таким образом, чтобы на расстоянии ρ уже от нового положения ее вершины вновь выполнялся критерий (1).

Найдем величину Δ из уравнения (2), описывающего процесс докритического развития трещины. Запишем уравнение (2) для момента $\tau_1 + 0$, когда трещина уже подросла на величину $z = z_1 + \Delta$. При этом интеграл в левой части (2) разобьем на два:

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z_1 + \Delta - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1}^{z_1 + \Delta} \left(\frac{c_2(\xi)}{z_1 + \Delta - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = \\ = 1 - c_2^q(z_1 + \Delta) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z_1 + \Delta + 1)^p}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из условия мгновенного подрастания следует, что $\tau'(\xi) = 0$ при $z_1 \leq \xi \leq z_1 + \Delta$. Поэтому второй интеграл в (1.1) будет равен нулю, и уравнение для нахождения Δ примет вид:

$$\int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z_1 + \Delta - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c_2^q(z_1 + \Delta) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z_1 + \Delta + 1)^p}. \quad (1.2)$$

Левая часть уравнения (1.2), рассматриваемая как функция $F_1(\Delta)$, убывает от значения

$$F_1(0) = \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z_1 - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi,$$

равного, в соответствии с (2), $F_1(0) = 1 - c_1^q(z_1) - \tau_0 c_1^p(0)/(z_1 + 1)^p$, до нуля на бесконечном интервале изменения Δ . Правая часть уравнения (1.2), рассматриваемая как функция $F_2(\Delta)$, изменяется от значения

$$F_2(0) = 1 - c_2^q(z_1) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z_1 + 1)^p},$$

меньшего, чем $F_1(0)$ в силу того, что $c_1(z_1) < c_2(z_1)$, до нуля на конечном интервале изменения Δ . (Рассматривается интервал, на котором $F_2(\Delta) \geq 0$, т.к. всегда $F_1(\Delta) > 0$.)

Ситуация, когда $F_1(\Delta) > F_2(\Delta)$ для любого Δ , означает, что уравнение (1.2) не имеет решения, т.е. в любой точке перед вершиной трещины будет выполняться условие $\sigma_e/(1 - \omega) > \sigma_*$, или произойдет мгновенное распространение трещины по всему сечению.

Если графики функций $F_1(\Delta)$ и $F_2(\Delta)$ пересекаются или касаются, то это значит, что существует некоторая конечная величина Δ , на которую мгновенно подрастет трещина, а затем вновь трещина будет развиваться с конечной скоростью.

Уравнение, описывающее дальнейший рост трещины, запишется в виде:

$$\int_0^z \left(\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c_2^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z + 1)^p} \quad (z > z_1 + \Delta). \quad (1.3)$$

В уравнении (1.3) нужно учесть, что $c(\xi) = c_1(\xi)$ при $0 \leq \xi \leq z_1$, $\tau'(\xi) = 0$ при $z_1 < \xi < z_1 + \Delta$ и $c(\xi) = c_2(\xi)$ при $z_1 + \Delta \leq \xi \leq z$, т.е.

$$\int_0^z \left(\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1 + \Delta}^z \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

Для продолжения численного счета при $z > z_1 + \Delta$ необходимо знать величину скорости роста трещины после ее мгновенного подрастания $\tau'(z_1 + \Delta)$. Это можно сделать, продифференцировав уравнение (1.3) по z , учитывая соотношение (1.4) и положив $z = z_1 + \Delta$:

$$\begin{aligned} -p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi + c_2^p(z) \tau'(z) - p \int_{z_1 + \Delta}^z \frac{c_2^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi = \\ = -q c_2^{q-1}(z) c_2'(z) + p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z + 1)^{p+1}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В результате выражение для скорости роста трещины после ее мгновенного подрастания примет следующий вид:

$$c_2^p(z) \tau'(z) = p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi - q c_2^{q-1}(z) c_2'(z) + p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z + 1)^{p+1}}. \quad (1.6)$$

Зная величину $\tau'(z_1 + \Delta)$, можно, решив уравнение (1.3), спрогнозировать дальнейший процесс роста трещины после догрузки.

Как уже отмечалось выше, в прикладном плане важно знать не только величину скорости роста трещины $\tau'(z)$, но и зависимость текущей длины трещины от времени, т.е. зависимость $z = z(\tau)$. Для этого, учитывая, что $\tau'(z)$ есть производная от искомой функции $z(\tau)$, применим процедуру интегрирования по частям к интегралам (1.4):

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p d\tau(\xi) = \left(\frac{c_1(z_1)}{z - z_1 + 1} \right)^p \tau(z_1) - \frac{c_1^p(0)}{(z + 1)^p} \tau_0 - \\ - \int_0^{z_1} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_1 + \Delta}^z \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p d\tau(\xi) = c_2^p(z) \tau(z) - \frac{c_2^p(z_1 + \Delta)}{(z - z_1 - \Delta + 1)^p} \tau(z_1 + \Delta) - \\ - \int_{z_1 + \Delta}^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Заметим, что $\tau(z_1) = \tau(z_1 + \Delta)$.

Зная представления (1.7)–(1.8) и произведя несложные преобразования, можно получить интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции $\tau(z)$ при $z > z_1 + \Delta$:

$$\begin{aligned} c_2^p(z) \tau(z) = \left[\frac{c_2^p(z_1 + \Delta)}{(z - z_1 - \Delta + 1)^p} - \frac{c_1^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^p} \right] \tau(z_1) + \\ + \int_{z_1 + \Delta}^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \int_0^{z_1} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Результаты численного решения уравнений (1.3) и (1.9) представлены на рис. 1 в виде графиков функций $\tau'(z)$ и $z(\tau)$ (зависимость $\tau'(z)$ представлена в двойных логарифмических координатах). На рис. 2 представлено сравнение решений, полученных для постоянной (кривые 1 и 3) и переменной (кривая 2) нагрузки.

2. Мгновенная частичная разгрузка

Рассмотрим теперь вопрос о росте трещины после частичного снятия нагрузки.

Предположим, что трещина подросла на величину z_1 и в момент времени τ_1 происходит мгновенное снятие части нагрузки, т.е. σ уменьшается от значения σ_1 до значения σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$). Параметр $c(z)$ также мгновенно уменьшится от значения $c_1(z_1)$ до значения $c_2(z_1)$. Следовательно, на расстоянии ρ от вершины трещины критерий разрушения (1) не выполняется, т.е. трещина остановится и будет неподвижна до тех пор, пока в течение некоторого времени $\Delta\tau$ за счет роста поврежденности ω на расстоянии ρ от вершины трещины вновь не выполнится критерий (1).

Величину $\Delta\tau$ можно найти из уравнения (2), которое можно представить при $z = z_1$ в виде:

$$\int_0^{z_1-0} \left(\frac{c_1(\xi)}{z_1 - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1-0}^{z_1} \left(\frac{c_2(\xi)}{z_1 - \xi + 1} \right)^p \frac{d\tau}{d\xi} d\xi = 1 - c_2^q(z_1) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1 + z_1)^p}. \quad (2.1)$$

Во втором интеграле перейдем к функции $\xi(\tau)$ и, учитывая, что $(d\xi/d\tau)_{\xi=z_1} = 0$ и $\xi = z_1$, получим

$$\int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z_1 - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau} c_2^p(z_1) d\tau = 1 - c_2^q(z_1) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1 + z_1)^p}. \quad (2.2)$$

Первый интеграл в силу (2) равен $1 - c_1^q(z_1) - (\tau_0 c_1^p(0))/(1 + z_1)^p$, а второй интеграл, т.к. $c_2^p(z_1) = \text{const}$, равен $c_2^p(z_1) \Delta\tau$. Окончательно получаем, что

$$c_2^p(z_1) \Delta\tau - c_1^q(z_1) = -c_2^q(z_1),$$

или

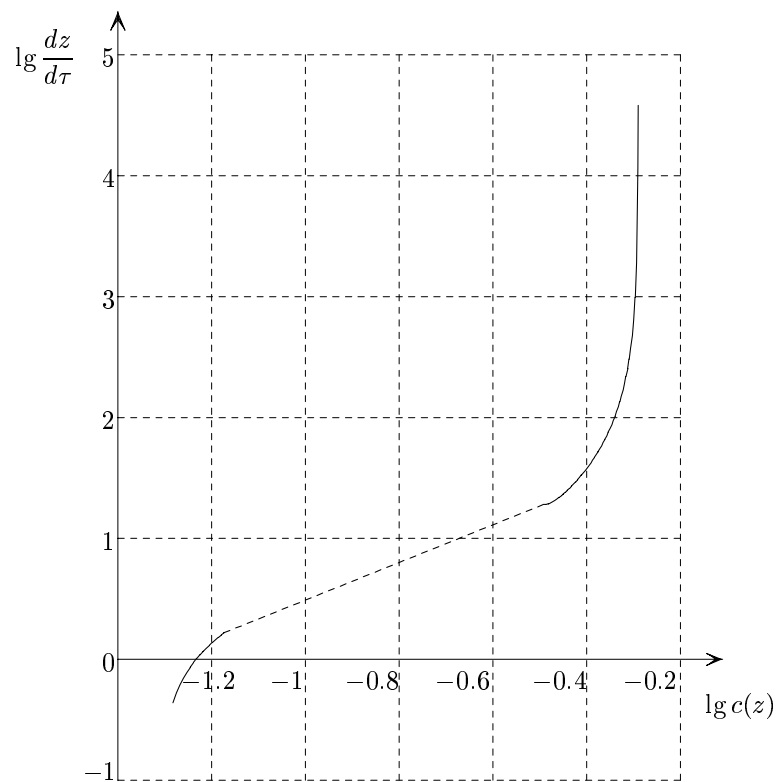
$$\Delta\tau = \frac{c_1^q(z_1) - c_2^q(z_1)}{c_2^p(z_1)}. \quad (2.3)$$

После истечения времени $\Delta\tau$ трещина вновь начнет расти, и уравнение, описывающее процесс ее дальнейшего роста, будет

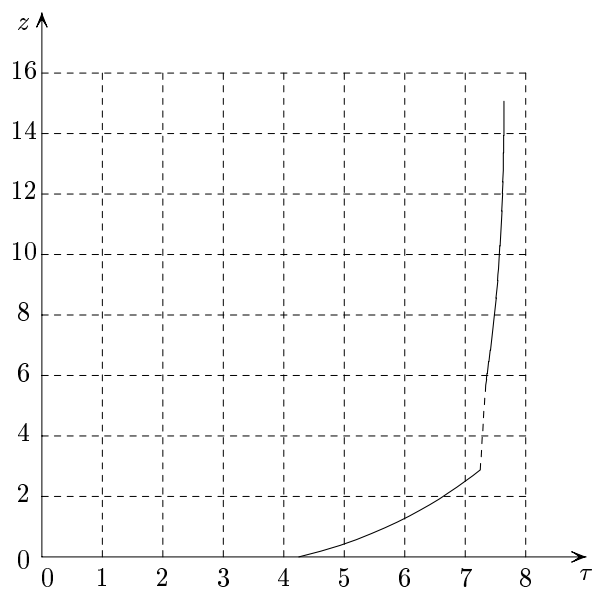
$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau} \frac{c_2^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^p} d\tau + \int_{z_1}^z \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = \\ = 1 - c_2^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1 + z)^p}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1}^z \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = \\ = 1 - c_2^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1 + z)^p} - \frac{\Delta\tau c_2^p(z_1)}{(1 + z - z_1)^p}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

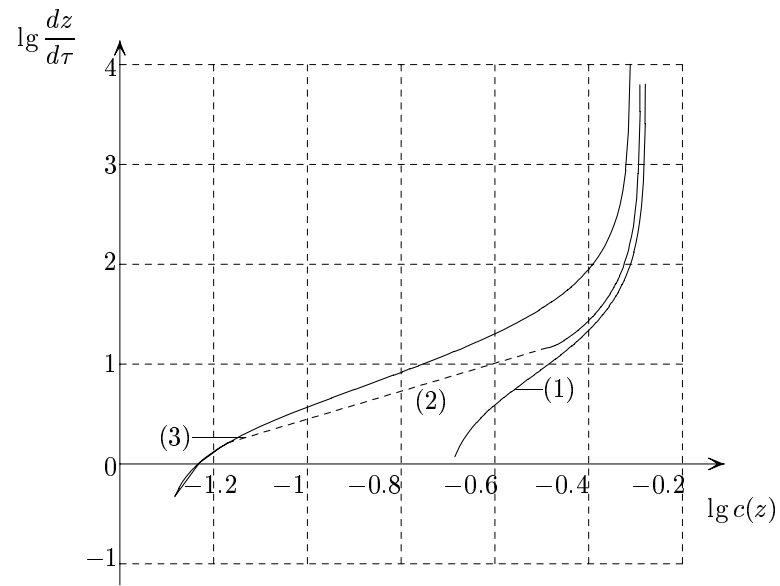


а)

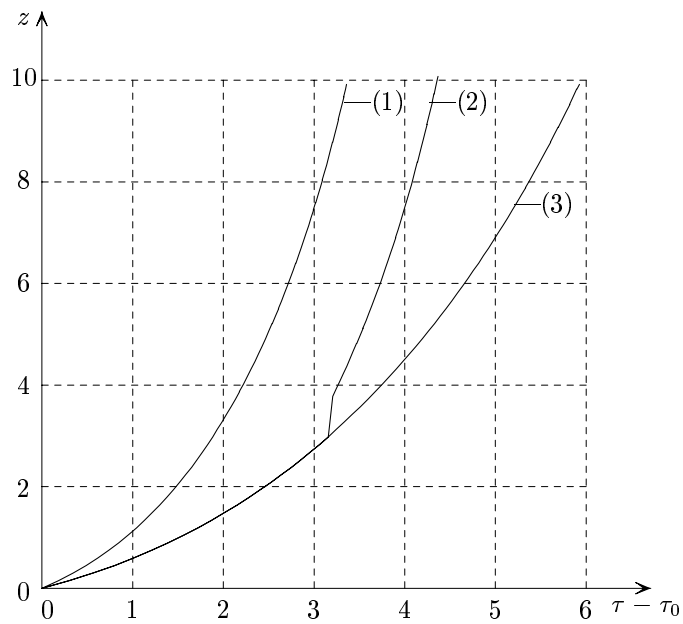


б)

Рис. 1. Зависимость величины скорости роста трещины от параметра нагружения в логарифмических координатах (а) и зависимость текущей длины трещины от времени (б) при $\sigma_1/\sigma_* = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_* = 0.2$, где $\rho/l_0 = 0.1$, $z_1 = 3$



а)



б)

Рис. 2. Зависимость величины скорости роста трещины от параметра нагружения в логарифмических координатах (а) и зависимость текущей длины трещины от времени (б) при (1) — $\sigma/\sigma_* = 0.15$; (2) — $\sigma_1/\sigma_* = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_* = 0.15$; (3) — $\sigma/\sigma_* = 0.1$, где $\rho/l_0 = 0.1$, $z_1 = 3$

Для численного счета необходимо знать величину скорости роста трещины в момент старта после остановки $\tau'(z_1 + 0)$. Для этого продифференцируем левую и правую части уравнения (2.4) по z :

$$\begin{aligned} -p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi + c_2^p(z) \tau'(z) - p \int_{z_1}^z \frac{c_2^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi = \\ = -q c_2^{q-1}(z) c_2'(z) + p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z + 1)^{p+1}} + p \frac{\Delta \tau c_2^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^{p+1}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и положим $z = z_1$:

$$\begin{aligned} -p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z_1 - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi + c_2^p(z_1) \tau'(z_1 + 0) = \\ = -q c_2^{q-1}(z_1) c_2'(z_1) + p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(z_1 + 1)^{p+1}} + p \Delta \tau c_2^p(z_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (2) по z , можно получить, что

$$-p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z_1 - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi = p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1 + z_1)^{p+1}} - q c_1^{q-1}(z_1) c_1'(z_1) - c_1^p(z_1) \tau'(z_1).$$

Окончательно имеем

$$c_2^p(z_1) \tau'(z_1 + 0) = c_1^p(z_1) \tau'(z_1) + \left(c_1^q(z) \right)'_{z=z_1} - \left(c_2^q(z) \right)'_{z=z_1} + p \Delta \tau c_2^p(z_1).$$

Для нахождения зависимости $z = z(\tau)$ проинтегрируем уравнение (2.4) по частям:

$$\begin{aligned} \tau(z_1) \frac{c_1^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^p} - \frac{c_1^p(0)}{(z + 1)^p} \tau_0 - \int_0^{z_1} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \\ + \tau(z) c_2^p(z) - \frac{c_2^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^p} \tau(z_1 + 0) - \int_{z_1}^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi = \\ = 1 - c_2^q(z) - \tau_0 \frac{c_1^p(0)}{(z + 1)^p} - \Delta \tau \frac{c_2^p(z_1)}{(1 + z - z_1)^p}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tau(z_1 + 0) = \tau(z_1) + \Delta \tau$, для $z > z_1$ получаем

$$\begin{aligned} \tau(z) c_2^p(z) = 1 - c_2^q(z) + \tau(z_1) \left[\left(\frac{c_2(z_1)}{z - z_1 + 1} \right)^p - \left(\frac{c_1(z_1)}{z - z_1 + 1} \right)^p \right] + \\ + \int_0^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь последний интеграл следует понимать как сумму двух интегралов аналогично формуле (1.4).

Результаты численного решения уравнений (2.4) и (2.7) представлены на рис. 3 в виде графиков функций $\tau'(z)$ и $z(\tau)$ (зависимость $\tau'(z)$ представлена в двойных логарифмических координатах).

На рис. 4 представлено сравнение решений, полученных для постоянной (кривые 1 и 3) и переменной (кривая 2) нагрузки.

3. Кратковременная догрузка–разгрузка

Рассмотрим теперь последовательное применение рассмотренных режимов нагружения. Пусть в момент времени τ_1 нагрузка возрастает от значения σ_1 до σ_2 , а затем по достижении времени τ_2 (текущая длина трещины при этом равна z_2) приложенная нагрузка уменьшится до значения σ_3 . Параметр $c(z)$ также будет принимать значения $c_1(z)$ при $\sigma = \sigma_1$, $0 \leq z \leq z_1$; $c_2(z)$ при $\sigma = \sigma_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$; $c_3(z)$ при $\sigma = \sigma_3$, $z > z_2$.

Получим уравнение, описывающее рост трещины для $z > z_2$. Для этого сначала рассмотрим момент времени τ_2 , когда нагрузка мгновенно падает до уровня σ_3 . При этом критерий (1) не будет выполняться в течение некоторого времени $\tilde{\Delta}\tau$. Найдем его. До момента τ_2 уравнение, описывающее рост трещины, имело вид:

$$J_1(z_2 + 0) + \int_{z_2-0}^{z_2} \left(\frac{c_3(\xi)}{z_2 - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c_3^q(z_2) - \tau_0 \frac{c_1^p(0)}{(1 + z_2)^p}, \quad (3.1)$$

где

$$J_1(z) = \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1}^z \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi \quad (z > z_1).$$

Согласно уравнениям (1.3) и (1.4) имеем:

$$J_1(z_2) = 1 - c_2^q(z_2) - \tau_0 \frac{c_1^p(0)}{(1 + z_2)^p},$$

а в интеграле в выражении (3.1) перейдем к функции $\xi(\tau)$:

$$\int_{z_2-0}^{z_2} \left(\frac{c_3(\xi)}{z_2 - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \tilde{\Delta}\tau} \left(\frac{c_3(\xi)}{z_2 - \xi + 1} \right)^p d\tau = c_3^p(z_2) \tilde{\Delta}\tau.$$

В последнем выражении принято во внимание, что $\xi = z_2$ и $d\xi/d\tau = 0$ при $\xi = z_2$.

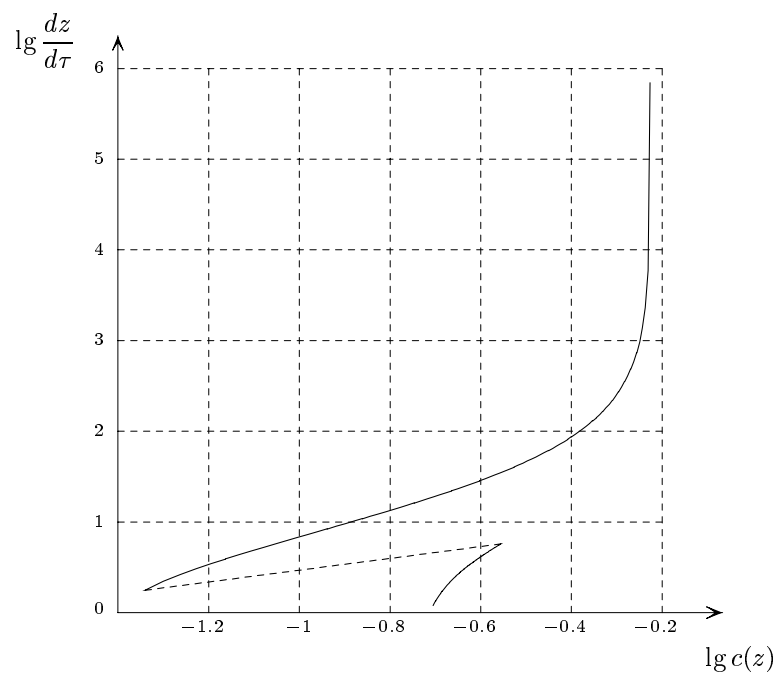
Таким образом, выражение (3.1) имеет вид:

$$1 - c_2^q(z_2) - \tau_0 \frac{c_1^p(0)}{(1 + z_2)^p} + c_3^p(z_2) \tilde{\Delta}\tau = 1 - c_3^q(z_2) - \tau_0 \frac{c_1^p(0)}{(1 + z_2)^p},$$

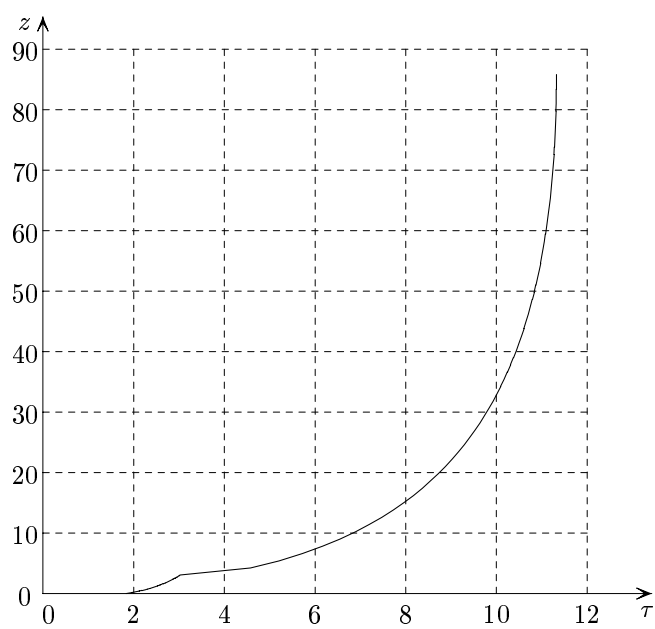
из которого можно получить выражение для времени, в течение которого трещина будет стоять после снятия части нагрузки:

$$\tilde{\Delta}\tau = \frac{c_2^q(z_2) - c_3^q(z_2)}{c_3^p(z_2)}. \quad (3.2)$$

Из выражения для $\tilde{\Delta}\tau$ видно, что время остановки трещины зависит только от текущего значения силового параметра $c(z)$ и не зависит от истории развития трещины.

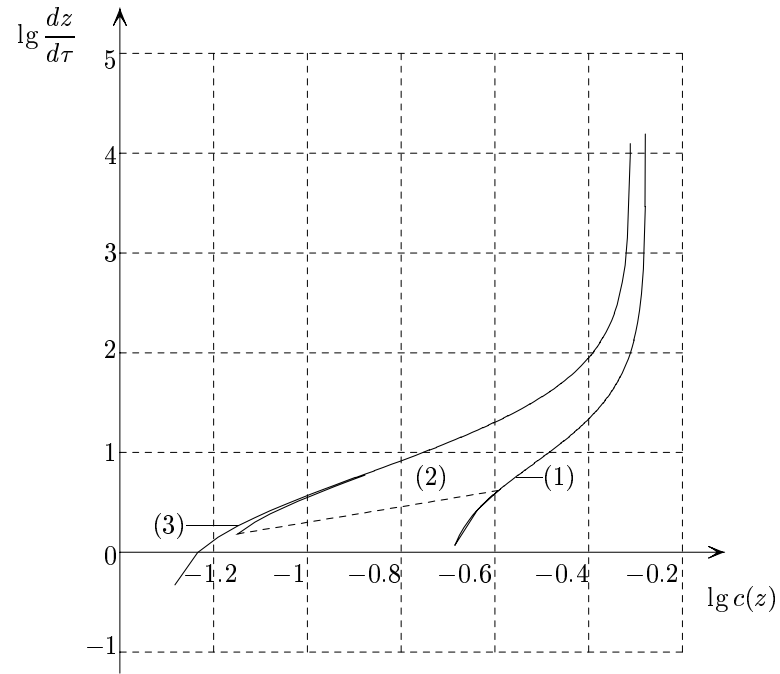


а)

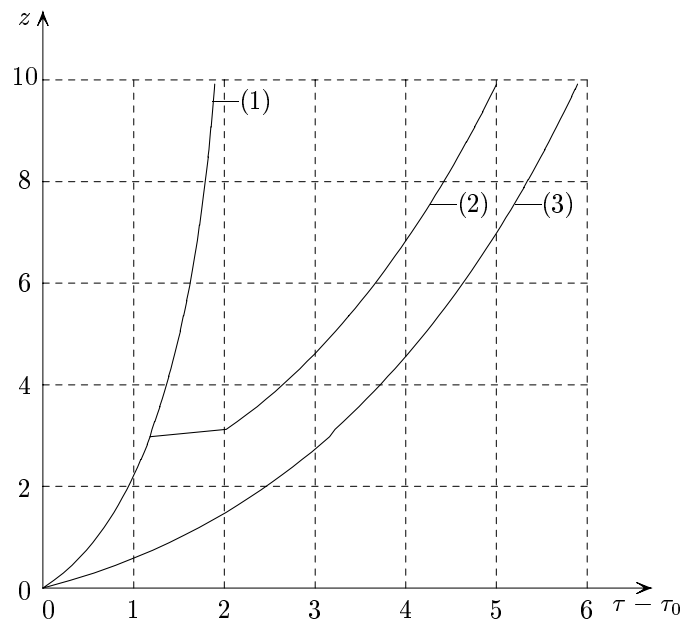


б)

Рис. 3. Зависимость величины скорости роста трещины от параметра нагружения в логарифмических координатах (а) и зависимость текущей длины трещины от времени (б) при $\sigma_1/\sigma_* = 0.2$, $\sigma_2/\sigma_* = 0.1$, где $\rho/l_0 = 0.1$, $z_1 = 3$



а)



б)

Рис. 4. Зависимость величины скорости роста трещины от параметра нагружения в логарифмических координатах (а) и зависимость текущей длины трещины от времени (б) при (1) — $\sigma/\sigma_* = 0.2$; (2) — $\sigma_1/\sigma_* = 0.2$, $\sigma_2/\sigma_* = 0.1$; (3) — $\sigma/\sigma_* = 0.1$, где $\rho/l_0 = 0.1$, $z_1 = 3$

Уравнение для дальнейшего роста трещины после истечения времени $\tilde{\Delta}\tau$ примет вид:

$$J_1(z) + \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \tilde{\Delta}\tau} \left(\frac{c_3(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p d\tau + \int_{z_2}^z \left(\frac{c_3(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c_3^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1+z)^p}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\xi = z_2$ при $\tau \in [\tau_2, \tau_2 + \tilde{\Delta}\tau]$, интеграл по $d\tau$ можно записать следующим образом:

$$\int_{\tau_2}^{\tau_2 + \tilde{\Delta}\tau} \left(\frac{c_3(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p d\tau = \tilde{\Delta}\tau \frac{c_3^p(z_2)}{(z - z_2 + 1)^p}.$$

Окончательно получаем уравнение:

$$\int_0^z \left(\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi = 1 - c_3^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1+z)^p} - \frac{\tilde{\Delta}\tau c_3^p(z_2)}{(z - z_2 + 1)^p} \quad (z > z_2), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi &= \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \\ &+ \int_{z_1 + \Delta}^{z_2} \left(\frac{c_2(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_2}^z \left(\frac{c_3(\xi)}{z - \xi + 1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Выражение для скорости роста трещины в момент страгивания будет иметь вид:

$$c_3^p(z_2) \tau'(z_2) = \hat{f}(z_2) + \hat{J}(z_2), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= -q c_3^{q-1}(z) c_3'(z) + p \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1+z)^{p+1}} + p \frac{\tilde{\Delta}\tau c_3^q(z)}{(z - z_2 + 1)^p}, \\ \hat{J}(z) &= p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi + p \int_{z_1 + \Delta}^{z_2} \frac{c_2^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi + \\ &+ p \int_{z_2}^z \frac{c_3^p(\xi)}{(z - \xi + 1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, можно получить уравнение роста трещины для зависимости длины трещины от времени $z = z(\tau)$, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} c_3^p(z) \tau(z) - \int_0^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c(\xi)}{z - \xi + 1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \tau(z_1) \left[\frac{c_1^p(z_1)}{(z - z_1 + 1)^p} - \right. \\ \left. - \frac{c_2^p(z_1 + \Delta)}{(z - z_1 - \Delta + 1)^p} \right] + \tau(z_2) \left[\frac{c_2^p(z_2)}{(z - z_2 + 1)^p} - \frac{c_3^p(z_2)}{(z - z_2 + 1)^p} \right] = 1 - c_3^q(z), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi &= \int_0^{z_1} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_1(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \\ &+ \int_{z_1+\Delta}^{z_2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_2(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \int_{z_2}^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_3(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Устремим $z_2 \rightarrow z_1 + \Delta$, т.е. рассмотрим так называемый рывок. После выполнения такого предельного перехода получим следующие уравнения:

для неизвестной функции $\tau'(\xi)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} \left(\frac{c_1(\xi)}{z-\xi+1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi + \int_{z_1+\Delta}^z \left(\frac{c_3(\xi)}{z-\xi+1} \right)^p \tau'(\xi) d\xi &= \\ &= 1 - c_3^q(z) - \frac{\tau_0 c_1^p(0)}{(1+z)^p} - \frac{\tilde{\Delta} \tau c_3^p(z_1 + \Delta)}{(z - z_1 - \Delta + 1)^p}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$c_3^p(z_1 + \Delta) \tau'(z_1 + \Delta) = \hat{f}(z_1 + \Delta) + \tilde{J}(z_1 + \Delta), \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{J}(z) = p \int_0^{z_1} \frac{c_1^p(\xi)}{(z-\xi+1)^{p+1}} \tau'(\xi) d\xi;$$

для неизвестной функции $\tau(z)$:

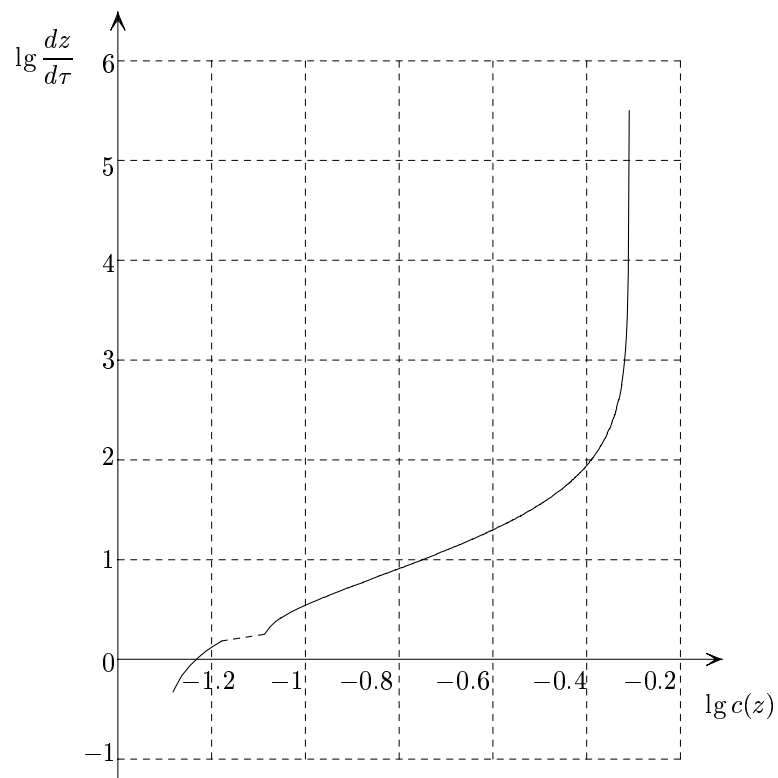
$$\begin{aligned} c_3^p(z) \tau(z) &= 1 - c_3^q(z) + \int_{z_1+\Delta}^z \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_3(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^{z_1} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{c_1(\xi)}{z-\xi+1} \right]^p \tau(\xi) d\xi - \tau(z_1) \left[\frac{c_1^p(z_1)}{(z-z_1+1)^p} - \frac{c_3^p(z_1 + \Delta)}{(z-z_1-\Delta+1)^p} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) нужно помнить, что в первом интеграле $\tau(z_1 + \Delta) = \tau(z_1) + \tilde{\Delta} \tau$.

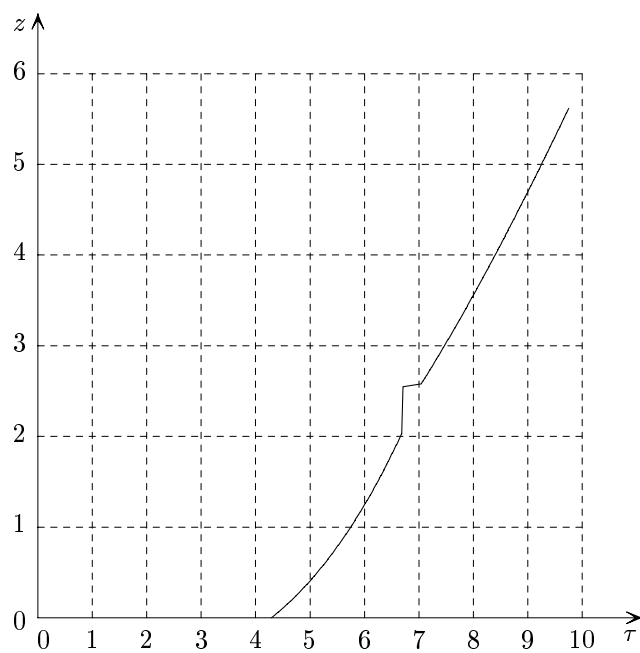
Результаты численного решения уравнений (3.7) и (3.9) представлены на рис. 5 в виде графиков функций $\tau'(z)$ и $z(\tau)$ (зависимость $\tau'(z)$ представлена в двойных логарифмических координатах).

Заключение

Результаты данной работы показывают, что математическую модель докритического развития трещины при ползучести, описанную в работе [1] для случая постоянной нагрузки, можно обобщить и на случай переменной нагрузки. При этом она по-прежнему будет описывать три стадии развития трещины (зарождение и старт трещины, медленный докритический рост трещины и закритическое или динамическое ее развитие при достижении критической длины трещины), эффект задержанного разрушения (динамическое развитие трещины после определенного инкубационного периода) и масштабные эффекты, хорошо известные из эксперимента. Кроме этого, с помощью предложенной модели также описываются и особенности,



а)



б)

Рис. 5. Зависимость величины скорости роста трещины от параметра нагружения в логарифмических координатах (а) и зависимость текущей длины трещины от времени (б) при $\sigma_1/\sigma_* = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_* = 0.15$, $\sigma_3/\sigma_* = 0.1$, где $\rho/l_0 = 0.1$, $z_1 = 2$

присущие процессу роста трещины при переменной нагрузке. В рамках предложенной модели можно найти величину мгновенного подрастания трещины при мгновенном увеличении нагрузки, время остановки трещины после частичного снятия нагрузки, а также спрогнозировать процесс дальнейшего развития трещины при различных видах нагружения. Показано, что время остановки трещины зависит только от текущего значения силового параметра и не зависит от истории развития трещины.

Графики поведения функций, полученных путем численного решения уравнений для переменных режимов нагружения, качественно соответствуют экспериментальным кривым, построенным для подобных видов нагружения. Уравнения данной модели можно обобщить и на более сложные режимы нагружения, учесть взаимодействие ползучести и усталости в случае роста трещины.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 99-01-01246) за финансовую поддержку.

Литература

- [1] Астафьев В.И., Бондаренко В.В. Математическая модель докритического роста трещины в условиях ползучести/ В кн.: Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. М.: Наука, 2000.
- [2] Астафьев В.И. Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1986. № 1. С. 127–134.
- [3] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [4] Астафьев В.И. О росте трещины при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины// ПМТФ. 1979. № 6. С. 154–158.

AN ANALYSIS OF THE SUBCRITICAL CREEP CRACK GROWTH UNDER VARIABLE LOAD

V.V. Bondarenko²

By using the modified local fracture criterion the problem of creep crack growth increment under variable load is considered. The combined method of prediction of the crack growth process is developed.

Numerical results of analysis of crack growth under variable load are presented in plots describing different types of crack propagation for different values of microstructural parameters and external loads — initiation and subcritical crack growth, delayed fracture and instant fracture. To optimize the numerical analysis and predict the process of slow subcritical crack growth a computer program is developed.

Поступила в редакцию 20/VI/2001;
в окончательном варианте — 28/VI/2001.

²Bondarenko Vladimir Vladimirovich, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia; bondv@ssu.samara.ru