МЕХАНИКА

УДК 539.4

МАЛЫЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2001 В.С. Глущенков,[1] Л.А. Сараев,[2] Ю.В. Хохрякова[3]

Методами механики случайно-неоднородных сред исследуются упругопластические свойства композиционного материала, содержащего разориентированные эллипсоидальные включения различных конфигураций. Установлены эффективные определяющие уравнения композита и вычислены его макроскопические параметры.

В публикуемой работе обобщаются результаты, полученные в [1], для композитов с эллипсоидальными включениями одной формы на случай композиционных материалов, содержащих эллипсоидальные включения различных конфигураций. Пусть рассматриваемый композиционный материал образован двумя компонентами, соединенными между собой с идеальной адгезией, первый из которых играет роль матрицы — V_m; второй — V_f — роль отдельных включений, причем

$$V_f = \sum_{s=1}^{n} V_s,$$

где V_s — хаотически распределенные в матрице эллипсоидальные включения с главными полуосями $a_1^{(s)}$, $a_2^{(s)}$, $a_3^{(s)}$.

Исходные локальные уравнения упругопластического деформирования запишем в виде:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu_{m;f}\left(\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\right)e_{ij}, \\ \sigma_{pp} &= 3K_{m;f}\varepsilon_{pp}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mu_{m;f}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})$ — нелинейные модули пластичности сдвига; $K_{m;f}$ — объемные модули; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$ — девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и малых упругопластических деформаций; индексы m и f соответствуют матрице и включениям.

[1]Глущенков Вячеслав Сергеевич, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; gluschenkov@ssu.samara.ru

[2]Сараев Леонид Александрович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; sarayev@ssu.samara.ru

[3]Хохрякова Юлия Владимировна, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1

Структуру композита будем описывать индикаторными функциями $\chi_m(\mathbf{r})$, $\chi_f(\mathbf{r})$, $\chi_s(\mathbf{r})$, $(s = 1, \ldots, n)$, равными единице в объемах V_m, V_f, V_s, и нулю вне этих объемов соответственно. Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор.

Положение разориентированных в пространстве эллипсоидальных включений будем описывать характеристическими функциями $\chi_{s,a}(\mathbf{r})$, $(a = 1, \ldots, s_a)$, равными единице в объемах $V_{s,\alpha}$ эллипсоидальных включений направления α конфигурации s. Тогда очевидно выполняются соотношения

$$\chi_f(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{n} \chi_s(\mathbf{r}), \quad \chi_s(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}), \quad V_s = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} V_{s,\alpha}.$$

Линеаризуем исходные уравнения (1), пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах объемов матрицы и объемов эллипсоидальных включений конфигураций s, положив

$$\Lambda_{m;f;s} = \sqrt{\langle e_{kl}\rangle_{m;f;s}\langle e_{kl}\rangle_{m;f;s}}.$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначены средние значения по соответствующим объемам.

После линеаризации уравнения (1) запишутся в виде

$$s_{ij}\left(\mathbf{r}\right) = 2\mu_m\left(\Lambda_m\right) + 2[\mu_f]\sum_{s=1}^{n} \chi_s(\mathbf{r}) e_{ij}\left(\mathbf{r}\right), \ \sigma_{pp}\left(\mathbf{r}\right) K_m + 3[K_f]\sum_{s=2}^{n} \chi_s(\mathbf{r})\varepsilon_{pp}\left(\mathbf{r}\right), \tag{2}$$

где

$$[\mu_f] = \mu_f(\Lambda_f) - \mu_m(\Lambda_m), \quad [K_f] = K_f - K_m.$$

Преобразуем систему уравнений, состоящую из уравнений (2), уравнений равновесия $\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0$ и формул Коши $2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})$, связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора скоростей перемещений, в систему уравнений в скоростях перемещений

$$\begin{aligned} &\mu_m\left(\Lambda_1\right) u'_{i,pp} + \left(K_m - \tfrac{1}{3}\mu_m\right) u'_{p,pi} - \tau'_{ip,p} = 0, \\ &\tau_{ij}\left(\mathbf{r}\right) = -2\left[\mu_f\right] \sum_{s=1}^{n} \chi_s(\mathbf{r}) e_{ij}\left(\mathbf{r}\right) - \delta_{ij}\left[\lambda_f\right] \sum_{s=1}^{n} \chi_s(\mathbf{r})\varepsilon_{pp}\left(\mathbf{r}\right), \\ &\lambda_f = K_f - \frac{2\mu_f}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

С помощью тензора Грина эта система уравнений заменяется системой интегральных уравнений

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik,lj}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}\right) \tau'_{kl}\left(\mathbf{r_1}\right) d\mathbf{r_1}. \tag{4}$$

Усредним соотношение (2) по полному объему

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = 2\mu_m\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \delta_{ij}\lambda_m\langle\varepsilon_{pp}\rangle + 2[\mu_f]\sum_{s=1}^{n} c_s\langle\varepsilon_{ij}\rangle_s + \delta_{ij}[\lambda_f]\sum_{s=1}^{n} c_s\langle\varepsilon_{pp}\rangle_s. \tag{5}$$

Здесь $c_s = V_s/V$. Из соотношения (5) видно, что для нахождения эффективных соотношений необходимо вычислить средние деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_s$.

Для этого определим моменты

$$\left\langle\chi'_{s,\alpha}\varepsilon'_{ij}\right\rangle = \int_V G_{ik,lj}\left(\mathbf{r}_1\right)\left\langle\chi'_{s,\alpha}(\mathbf{r}) t'_{kl}\left(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1\right)\right\rangle d\mathbf{r}_1. \tag{6}$$

Воспользуемся тем, что функции $\chi_{s,a}(\mathbf{r})$ описывают только эллипсоидальные включения одного направления, и будем считать, что корреляционные функции имеют вид

$$\left\langle \chi'_{s,\alpha}(\mathbf{r})\tau'_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{r_1})\right\rangle = f_{kl}^{(s,\alpha)}\left(\frac{x_1^2}{[a_1^s]^2}+\frac{x_2^2}{[a_2^s]^2}+\frac{x_3^2}{[a_3^s]^2}\right).$$

Это допущение является обобщением гипотезы сильной изотропии на случай эллипсоидальной анизотропии в одном направлении.

Тогда интегралы (6) вычисляются точно, и их значения выражаются формулами

$$\left\langle \chi'_{s,\alpha}\varepsilon'_{ij}\right\rangle = \frac{c_{s,\alpha}Z_{ijkl}^{(s,\alpha)}}{2\mu_m}\left[\langle\tau_{kl}\rangle_{s,\alpha} - c_f\langle\tau_{kl}\rangle_f\right], \tag{7}$$

где

$$Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} = S_{ijkl}^{(s,\alpha)} - \delta_{ij}\frac{\nu_m}{1+\nu_m}S_{ppkl}^{(s,\alpha)}, \qquad S_{ijkl}^{(s,\alpha)}$$

— компоненты тензора Эшелби, записанные в лабораторной системе координат эллипсоидальных включений направления α.

Подставляя выражение (7) в известное соотношение [1], получим

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle_{s,\alpha} = Q_{ijmr}^{(s,\alpha)}P_{mrkl}^{(s,\alpha)}\left[\sum_{q=1}^{n}c_q\langle\varepsilon_{kl}\rangle_q\right] + Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}\langle\varepsilon_{kl}\rangle. \tag{8}$$

Здесь

$$P_{ijkl}^{(s,\alpha)} = \frac{1}{2\mu_m}\left[2[\mu_f]Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} + \delta_{kl}[\lambda_f]Z_{ijpp}^{(s,\alpha)}\right],$$

$$Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} = \left[I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s,\alpha)}\right]^{-1}.$$

Умножим уравнение (8) на $c_{s,\alpha}$ и, суммируя по всем направлениям α, запишем уравнения для деформаций, усредненных по V_f

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle_f = a_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle \tag{9}$$

в которых тензор a_{ijkl} задается соотношениями

$$a_{ijkl} = c_f^{-1}\left[c_m I_{ijkl} + \sum_{s=1}^{n}K_{ijmr}^{(s)}\right]^{-1}\sum_{s=1}^{n}K_{mrkl}^{(s)}, \qquad K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha}c_{s,\alpha}Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}.$$

Подставляя (9) в (5), получим макроскопический закон упругопластического деформирования рассматриваемого композиционного материала

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = E_{ijkl}^{*}\left(\Lambda_m, \Lambda_f, \Lambda_1, \ldots\Lambda_n\right)\langle\varepsilon_{kl}\rangle, \tag{10}$$

где

$$E_{ijkl}^{*} = 2\mu_m I_{ijkl} + \lambda_m\delta_{ij}\delta_{kl} + c_f[2[\mu_f]I_{ijkl} + [\lambda_f]\delta_{ij}\delta_{kl}]a_{ijkl}$$

— эффективный тензор модулей пластичности.

Поскольку в соотношение (10) входят величины $\Lambda_{m;f;s}$, то для расчета деформационных характеристик композита при конкретных способах нагружения его необходимо решать совместно с уравнениями (9). При этом следует задавать вид функций

$\mu(\Lambda_{m;f;s})$, который определяется на основе экспериментальных данных в соответствии с деформационными свойствами материалов компонентов.

Важным частным случаем общих соотношений (10) является модель композита, в котором эллипсоидальные включения ориентированы равновероятно. В этом случае $c_{s,1} = c_{s,2} = \ldots = c_{s,s_a}$. При этом тензоры четвертого ранга

$$K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} Q_{ijki}^{(s,\alpha)}$$

будут изотропными, и их общее представление будет иметь вид:

$$K_{ijkl}^{(s)} = c_s \left(\alpha_s I_{ijkl} + \beta_s \delta_{ij}\delta_{kl}\right),$$

$$\alpha_s = \frac{1}{15}\Big[3Q_{pqpq}^{(s)} - Q_{ppqq}^{(s)}\Big], \quad \beta_s = \frac{1}{15}\Big[Q_{pqpq}^{(s)} - 2Q_{ppqq}^{(s)}\Big].$$

Подставляя эти соотношения в тензорное уравнение (9) и выделяя объемную и девиаторную части, находим деформации, усредненные по объемам включений

$$\begin{gathered}
\langle e_{ij}\rangle_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}\langle e_{ij}\rangle, \qquad \langle \varepsilon_{pp}\rangle_s = \frac{\gamma_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\gamma_s}\langle \varepsilon_{pp}\rangle, \\
\langle e_{ij}\rangle_f = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}{c_f c_m + c_f\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}\langle e_{ij}\rangle, \qquad \langle \varepsilon_{pp}\rangle_f = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\gamma_s}{c_f c_m + c_f\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\gamma_s}\langle \varepsilon_{pp}\rangle, \\
\gamma_s = \alpha_s - 3\beta_s.
\end{gathered} \tag{11}$$

Тогда соотношения (10) принимают вид:

$$\begin{gathered}
\langle s_{ij}\rangle = 2\mu^*\left(\Lambda_m, \Lambda_f, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\right)\langle e_{ij}\rangle, \qquad \mu^* = \mu_m + [\mu_f]\frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}, \\
\langle \sigma_{pp}\rangle = 3K^*\left(\Lambda_m, \Lambda_f, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\right)\langle \varepsilon_{pp}\rangle, \qquad K^* = K_m + [K_f]\frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\gamma_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\gamma_s}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Из (11) и правила смесей следует

$$\begin{gathered}
\Lambda_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}e, \qquad \Lambda_f = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}{c_f c_m + c_f\sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}e, \\
\Lambda_m = \frac{1}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\alpha_s}e.
\end{gathered} \tag{13}$$

Решать систему (13) необходимо после задания вида функций $\mu(\Lambda_{m;f;s})$ на основе экспериментальных данных, вычисляя инварианты α_s, β_s, полученные после обращения тензоров $I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)}$.

Литература

[1] Макарова И.С., Сараев Л.А. К теории малых упругопластических деформаций хаотически армированных композиционных материалов// ПМТФ. 1991. № 5. С. 120–124.

[2] Сараев Л.А. Моделирование макроскопических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: Изд-во "Самарский ун-т", 2000. 182 с.

SMALL ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS OF COMPOSITE MATERIAL CHAOTICALLY REINFORCED BY ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

© 2001 V.S. Gluschenkov,[4] L.A. Sarayev,[5] J.V. Khokhryakova[6]

Elastic-plastic properties of composite material, containing chaotically oriented ellipsoidal inclusions, are investigated by methods of the mechanics of randomly inhomogeneous media. The effective constitutive equations of composite material are obtained and its macroscopic parameters are determined.

Поступила в редакцию 14/*IV*/2001;
в окончательном варианте — 19/*VI*/2001.

[4] Gluschenkov Vyacheslav Sergeyevich, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia; glushenkov@ssu.samara.ru

[5] Sarayev Leonid Alexandrovich, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia; saraev@ssu.samara.ru

[6] Khokhryakova Julia Vladimirovna, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia