МЕХАНИКА

УДК 539.378

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, АРМИРОВАННОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2001 В.С. Глущенков,[1] Л.А. Сараев,[2] А.Ю. Саранцев[3]

С помощью статистического осреднения системы интегральных уравнений равновесия композиционного материала, ядром которой является вторая производная тензора Грина, установлены эффективные определяющие соотношения вязкопластического течения многокомпонентного композита, хаотически армированного эллипсоидальными включениями.

В публикуемой работе обобщаются результаты, полученные в [1], для композитов со сферическими включениями на случай многокомпонентных композиционных материалов с эллипсоидальными включениями. Рассмотрим композиционный материал, образованный изотропными несжимаемыми компонентами. Пусть один компонент композиционного материала является односвязным, то есть представляет собой матрицу с распределенными в ней отдельными включениями эллипсоидальной формы различных конфигураций (фракций) из одного материала или различных материалов. Обозначим через V, V_m, V_f, V_s, $(s = 1, \ldots, n)$ полный объем композита, объемы матрицы, всех включений и отдельных фракций соответственно. Фракция s представлена эллипсоидами с главными полуосями $a_1^{(s)}$, $a_2^{(s)}$, $a_3^{(s)}$.

Компоненты композиционного материала подчиняются нелинейному вязкопластическому закону течения

$$
\begin{aligned}
s_{ij} &= \frac{k_m e_{ij}}{\sqrt{e_{kl}e_{kl}}} + 2\mu_m(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})e_{ij},\\
s_{ij} &= \frac{k_f e_{ij}}{\sqrt{e_{kl}e_{kl}}} + 2\mu_f(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})e_{ij},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

если фракции состоят из одного материала, и

[1]Глущенков Вячеслав Сергеевич, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; gluschenkov@ssu.samara.ru

[2]Сараев Леонид Александрович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; saraev@ssu.samara.ru

[3]Саранцев Андрей Юрьевич, кафедра высшей математики и информатики, Самарского государственного университета 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; standr@ssu.samara.ru

$$s_{ij} = \frac{k_m e_{ij}}{\sqrt{e_{kl} e_{kl}}} + 2\mu_m(\sqrt{e_{kl} e_{kl}}) e_{ij},$$
$$s_{ij} = \frac{k_s e_{ij}}{\sqrt{e_{kl} e_{kl}}} + 2\mu_s(\sqrt{e_{kl} e_{kl}}) e_{ij} \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

если фракции состоят из различных материалов.

Здесь $k_{m;f;s}$, $\mu_{m;f;s}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})$ — пределы текучести и нелинейные вязкости материалов матрицы, всех включений и фракций соответственно, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$ — девиаторные части тензоров напряжений и скоростей деформаций, σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и скоростей деформаций, индексы m, f, s соответствуют матрице, всем включениям и фракциям.

Для описания геометрической структуры композита введем случайные изотропные индикаторные функции $\chi_m(\mathbf{r})$, $\chi_f(\mathbf{r})$, $\chi_s(\mathbf{r})$, $(s = 1, \ldots, n)$, равные единице в точках объема матрицы, всех включений и отдельных фракций и нулю вне этих объемов соответственно. Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор.

Индикаторные функции, напряжения и деформации полагаются эргодическими полями, и их математические ожидания заменяются средними значениями по соответствующим объемам [2]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V f d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_\alpha = \frac{1}{V_\alpha}\int\limits_{V_\alpha} f d\mathbf{r}.$$

С помощью индикаторных функций соотношения (1), (2) запишутся в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{k(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r})}{\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}} + 2\mu(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где

$$k(\mathbf{r}) = k_m \chi_m(\mathbf{r}) + k_f \chi_f(\mathbf{r}),$$
$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_m(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}) \chi_m(\mathbf{r}) + \mu_f(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}) \chi_f(\mathbf{r}),$$

если все включения состоят из одного материала, и

$$k(\mathbf{r}) = k_m \chi_m(\mathbf{r}) + \sum_{s=1}^{n} k_s \chi_s(\mathbf{r}),$$
$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_m(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}) \chi_m(\mathbf{r}) + \sum_{s=1}^{n} \mu_s(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}) \chi_s(\mathbf{r}),$$

если фракции включений состоят из разных материалов.

Присоединяя к реологическим соотношениям (3) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \tag{4}$$

и формулы Коши, связывающие компоненты тензора скоростей деформаций $e_{ij}(\mathbf{r})$ с компонентами вектора скоростей перемещений $v_i(\mathbf{r})$

$$2e_{ij}(\mathbf{r}) = v_{i,j}(\mathbf{r}) + v_{j,i}(\mathbf{r}), \tag{5}$$

получим замкнутую систему уравнений течения рассматриваемого композиционного материала.

Граничными условиями данной задачи будут условия отсутствия флуктуаций полей напряжений и скоростей деформаций на поверхности S объема V :

$$s_{ij}(\mathbf{r})\big|_S = \langle s_{ij}\rangle\,, \quad e_{ij}(\mathbf{r})\big|_S = \langle e_{ij}\rangle\,. \tag{6}$$

Краевая задача (3)–(6) является физически нелинейной, так как соотношение (3) представляет собой нелинейную зависимость s_{ij} от e_{ij}. Для того, чтобы воспользоваться методами теории упругости для установления эффективных законов, соотношение (3) необходимо линеаризовать, сделав некоторые допущения. Будем пренебрегать флуктуациями скоростей деформаций в пределах объема матрицы и объемов всех включений и различных фракций, положив $\Lambda_{m;f;s} = \sqrt{\langle e_{kl}\rangle_{m;f;s}\langle e_{kl}\rangle_{m;f;s}}$.

Введем параметры $\lambda_{m;s}$ с помощью соотношений

$$2\lambda_m = \frac{k_m}{\Lambda_m} + 2\mu_m(\Lambda_m)$$

и

$$2\lambda_s = \frac{k_f}{\Lambda_s} + 2\mu_f(\Lambda_s)$$

или

$$2\lambda_s = \frac{k_s}{\Lambda_s} + 2\mu_s(\Lambda_s),$$

если фракции состоят из одного материала или различных материалов соответственно.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = 2\lambda_m e_{ij}(\mathbf{r}) + 2\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]\chi_s(\mathbf{r})e_{ij}(\mathbf{r}). \tag{7}$$

Здесь через $[\lambda_s]$ обозначены разрывы параметров λ_s при переходе через границу раздела матрицы и фракций: $[\lambda_s] = \lambda_s - \lambda_m$.

Усредняя (7) по полному объему V, получим

$$\langle s_{ij}\rangle = 2\lambda_m\langle e_{ij}\rangle + 2\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]c_s\langle e_{ij}\rangle_s. \tag{8}$$

Здесь c_s — объемная концентрация фракции s.

Из (8) следует, что для нахождения эффективных соотношений необходимо вычислить скорости деформаций, усредненные по объемам фракций $\langle e_{ij}\rangle_s$.

Для вычисления $\langle e_{ij}\rangle_s$ заменим систему уравнений (4)–(7) системой уравнений в скоростях перемещений, подставив последовательно в уравнения равновесия (4) определяющие соотношения (7) и формулы Коши, записанные для флуктуаций величин. Получим замкнутую систему уравнений течения в скоростях перемещений

$$\lambda_m v'_{i,pp} + \left(2\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]\chi_s(\mathbf{r})e_{ip}(\mathbf{r})\right)'_{,p} + \sigma_{,i} = 0. \tag{9}$$

Здесь $\sigma = \sigma_{kk}/3$ — гидростатическое давление, штрихами обозначены флуктуации величин.

С помощью тензора Грина для несжимаемой среды

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\lambda_m}(\delta_{ij}, r_{,pp} - r_{,ik}) \qquad (r = |\mathbf{r}|) \tag{10}$$

преобразуем систему уравнений (9) в систему интегральных уравнений относительно компонент тензора $e_{ip}(\mathbf{r})$

$$e_{ij}(\mathbf{r}) = \langle e_{ij} \rangle + \int\limits_V G_{i(k,l)j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \left(\chi_f(\mathbf{r}_1)\tau_{kl}(\mathbf{r}_1) - c_f \langle \tau_{kl} \rangle_f \right) d(\mathbf{r}_1). \tag{11}$$

Здесь

$$\tau_{kl}(\mathbf{r}) = -2\sum_{s=1}^{n} [\lambda_s]\chi_s(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r}),$$

круглые скобки у индексов вторых производных тензора Грина обозначают операцию симметрирования.

Для точного решения системы уравнений (11) необходимо знать все многоточечные моменты случайной функции, которые образуются при последовательном осреднении уравнений (11) [3]. Чтобы получить приближенное решение, необходимо привлечь дополнительную информацию о структуре рассматриваемого композиционного материала.

Будем считать, что включения каждой фракции s равномерно распределены в объеме матрицы.

Будем также предполагать, что поля скоростей деформаций в пределах каждого включения являются однородными. Это предположение при малых значениях объемной концентрации включений в теории упругости и физической теории пластичности соответствует однородному напряженно-деформированному состоянию изолированного эллипсоидального включения, помещенного в матрицу неограниченных размеров.

Положение хаотически разориентированных в пространстве эллипсоидальных включений для каждой фракции будем описывать характеристическими функциями $\chi_{s,a}(r)$, $(a = 1, \dots, s_a)$ описывающими положение эллипсоидальных включений направления α фракции s. Тогда

$$\chi_s(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}), V_s = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} V_{s,\alpha},$$

где $V_{s,\alpha}$ — объем всех эллипсоидальных включений направления α фракции s.

Допустим распределение включений в матрице таким равномерным, что относительно произвольно выделенного эллипсоидального включения направления α фракции s каждому эллипсоидальному включению того же направления фракции s соответствует симметрично расположенное эллипсоидальное включение фракции s направления α. Это допущение справедливо в силу предполагаемой статистической однородности композиционного материала в окрестности выделенного эллипсоидального включения.

Заменяя дискретное распределение включений непрерывным ($s_\alpha \to \infty$), с учетом сделанных допущений можно записать следующее приближенное соотношение [4]

$$e_{ij}(\mathbf{r}) = \langle e_{ij} \rangle + \int\limits_{W_{s,\alpha}} G_{i(k,l)j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \left(\chi_f(\mathbf{r}_1)\tau_{kl}(\mathbf{r}_1) - c_f \langle \tau_{kl} \rangle_f \right) d(\mathbf{r}_1). \tag{12}$$

Здесь $W_{s,\alpha}$ — объем произвольно выбранного включения. Физический смысл соотношения (12) заключается в том, что для этого эллипсоидального включения поле скоростей деформаций в нем определяется суперпозицией среднего поля скоростей деформаций в объеме среды и некоторого возмущения, величина которого зависит от ориентации главных полуосей выбранного эллипсоидального включения и материальных характеристик матрицы и включения.

Следуя работе [5], умножим уравнение (11) на $\chi'_{s,a}(\mathbf{r}) = \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) - c_{s,\alpha}$ и, усредняя полученное соотношение по полному объему V, получим

$$\langle e_{ij}\rangle_{s,\alpha} = \langle e_{ij}\rangle + \frac{S^{(s,\alpha)}_{ijkl}}{2\lambda_m}\left[\langle\tau_{kl}\rangle_{s,\alpha} - c_f\langle\tau_{kl}\rangle_f\right] \tag{13}$$

Здесь $S^{(s,\alpha)}_{ijkl}$ — компоненты тензора Эшелби.

Учитывая, что

$$\tau_{kl}(\mathbf{r}) = -2\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]\sum_{\alpha=1}^{s_\alpha}\chi_{s,\alpha}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})$$

преобразуем соотношение (13) к виду

$$\langle e_{ij}\rangle_{s,\alpha} = \langle e_{ij}\rangle + \frac{S^{(s,\alpha)}_{ijkl}}{\lambda_m}\left[\sum_{q=1}^{n}[\lambda_q]c_q\langle e_{kl}\rangle_q - [\lambda_s]\langle e_{kl}\rangle_{s,\alpha}\right], \tag{14}$$

или

$$\langle e_{ij}\rangle_{s,\alpha} = \frac{1}{[\lambda_s]}\,Q^{(s,\alpha)}_{ijmr}P^{(s,\alpha)}_{mrkl}\left[\sum_{q=1}^{n}[\lambda_q]c_q\langle e_{kl}\rangle_q\right] + Q^{(s,\alpha)}_{ijkl}\langle e_{kl}\rangle. \tag{15}$$

Здесь

$$P^{(s,\alpha)}_{ijkl} = \frac{[\lambda_s]}{\lambda_m}S^{(s,\alpha)}_{ijkl}, \quad Q^{(s,\alpha)}_{ijkl} = \left[I_{ijkl} + P^{(s,\alpha)}_{ijkl}\right]^{-1}.$$

Умножим (15) на $c_{s,\alpha}$ и, суммируя по всем направлениям α, получим

$$c_s\langle e_{ij}\rangle_s = \frac{c_s}{[\lambda_s]}\sum_{q=1}^{n}[\lambda_q]c_q\langle e_{ij}\rangle_q - \frac{1}{[\lambda_s]}\,K^{(s)}_{ijkl}\sum_{q=1}^{n}[\lambda_q]c_q\langle e_{kl}\rangle_q + K^{(s)}_{ijkl}\langle e_{kl}\rangle, \tag{16}$$

где

$$K^{(s)}_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha}c_{s,\alpha}Q^{(s,\alpha)}_{ijkl}.$$

Умножая выражение (16) на $[\lambda_s]$, суммируя по s и разрешая полученное тензорное уравнение, находим

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]c_s\langle e_{ij}\rangle_s = a_{ijkl}\langle e_{kl}\rangle. \tag{17}$$

В этом уравнении тензор a_{ijkl} задается соотношениями

$$a_{ijkl} = \left[c_m I_{ijkl} + N_{ijmr}\right]^{-1}\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s]K^{(s)}_{mrkl},$$

$$N_{mrkl} = \sum_{s=1}^{n} K_{mrkl}^{(s)}.$$

Подставляя соотношение (17) в уравнение (8), запишем макроскопический закон течения рассматриваемого композиционного материала

$$\langle s_{ij} \rangle = E_{ijkl}^{*} \left(\Lambda_m, \Lambda_f, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \right) \langle e_{kl} \rangle. \tag{18}$$

Эффективный тензор вязкопластического закона течения имеет вид

$$E_{ijkl}^{*} = 2\lambda_m I_{ijkl} + 2a_{ijkl}.$$

Если включения всех фракций ориентированы равновероятно по всем направлениям ($c_{s,1} = c_{s,2} = \ldots = c_{s,s_\alpha}$), то тензоры

$$K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}$$

будут изотропными, и их общее представление будет иметь вид

$$K_{ijkl}^{(s)} = c_s \left(\alpha_s I_{ijkl} + \beta_s \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \tag{19}$$

где

$$\alpha_s = \frac{1}{15} \left[3Q_{pqpq}^{(s)} - Q_{ppqq}^{(s)} \right], \qquad \beta_s = \frac{1}{15} \left[Q_{pqpq}^{(s)} - 2Q_{ppqq}^{(s)} \right]$$

— инварианты этих тензоров.

Подставляя выражение (19) в тензорное уравнение (16), находим скорости деформаций, усредненные по объемам фракций

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \alpha_s} \langle e_{ij} \rangle. \tag{20}$$

Эффективный закон течения (18) примет вид

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\lambda^{*} \left(\Lambda_m, \Lambda_f, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \right) \langle e_{ij} \rangle, \tag{21}$$

где

$$\lambda^{*} = \lambda_m + \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} [\lambda_s] c_s \alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \alpha_s}.$$

Из (20) и правила смесей следует

$$\Lambda_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \alpha_s} e, \quad \Lambda_m = \frac{1}{c_m + \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \alpha_s} e. \tag{22}$$

Так как в (21) входят величины Λ_m, Λ_s, то эти уравнения необходимо решать совместно с уравнениями (22), задавая вид функций $\lambda_m(\Lambda_m), \lambda_s(\Lambda_s)$ по экспериментальным данным и вычисляя инварианты α_s после обращения тензоров $I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)}$.

Литература

[1] Глущенков В.С. Прогнозирование эффективных параметров многокомпонентных вязкопластических микронеоднородных сред// Вестник СамГТУ, Вып. 6., Серия "Физико-математические науки", Самара, 1998. С. 40–46.

[2] Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

[3] Беран М.Дж. Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов/ Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978, Т.2. С. 242–286.

[4] Левин В.М. К определению упругих и термоупругих модулей композиционных материалов// Докл. АН СССР. Сер. мат. и физ. 1975. Т.220, № 5, С. 1042–1045.

[5] Сараев Л.А. Моделирование макроскопических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: Изд-во "Самарский ун-т", 2000. 182 с.

MACROSCOPIC CONSTITUTIVE EQUATIONS OF VISCO-ELASTIC-PLASTIC COMPOSITE MATERIAL REINFORCED BY ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

© 2001 V.S. Gluschenkov,[4] L.A. Sarayev,[5] A.Y. Sarantsev[6]

With the aid of statistical averaging of the system of integral equations of composite material equilibrium, the effective constitutive relations of the visco-elastic-plastic flow of multi-component composite, which is chaotically reinforced by ellipsoidal inclusions, are analysed.

Поступила в редакцию 14/IV/2001;
в окончательном варианте — 5/VI/2001.

[4]Gluschenkov Vyacheslav Sergeyevich, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia; gluschenkov@ssu.samara.ru

[5]Sarayev Leonid Alexandrovich, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia; saraev@ssu.samara.ru

[6]Sarantsev Andrey Yrievich, Dept. of Higher Mathematics and Information Science, Samara State University, Samara, 443011, Russia; standr@ssu.samara.ru