

**О ГЕОМЕТРИИ ОБЛАСТИ ПОЛНОСТЬЮ
ПОВРЕЖДЕННОГО МАТЕРИАЛА У ВЕРШИНЫ
ТРЕЩИНЫ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА
В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ
(СВЯЗКА "ПОЛЗУЧЕСТЬ — ПОВРЕЖДЕННОСТЬ")**

© 2001 Л.В. Степанова,¹ М.Е. Федина²

Представлено приближенное решение задачи о растущей трещине антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности с использованием автомодельной переменной, предложенной для степенных определяющих соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжения. Характерной особенностью задач о трещинах в связанной постановке (связка "ползучесть — поврежденность") является существование у вершины трещины области "полностью поврежденного материала", в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Поэтому наряду с определением напряженно-деформированного состояния интерес представляет исследование геометрии данной области. Построены асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности (при больших расстояниях от вершины трещины) и приведена конфигурация области "полностью поврежденного материала" для различных значений показателей степеней степенного закона ползучести и кинетического уравнения накопления повреждений.

Введение

Проблемам определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и распространяющейся трещины в связанной постановке задач теории упругости, теории пластичности и теории ползучести с механикой поврежденности в последнее время посвящается большое количество исследований [1]–[13]. Основной интерес представляет оценка влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и деформаций (или скоростей деформаций ползучести). С практической точки зрения важно определить скорость докритического подрастания трещины.

¹Степанова Лариса Валентиновна, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1; lst@ssu.samara.ru

²Федина Мария Ефимовна, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1; phedina@ssu.samara.ru

Можно выделить характерные особенности, свойственные двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (упругость — поврежденность, ползучесть — поврежденность).

В [1], [2], [7], [8], [13], [14] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном устранении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений (показатель степени α в $r^{-\alpha}$ уменьшается). В [1] установлено, что эффективные напряжения σ_{ij}/ψ , где ψ — параметр сплошности Качанова–Работнова, ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом спадают до нуля при $r \rightarrow 0$. В [13] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений для различных значений констант m и n , входящих в кинетическое уравнение, задающее степенной закон накопления повреждений, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений m и n , тогда как при возрастании значений данных параметров особенность вообще исчезает. В [7], [8], где представлено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно-вязком материале со степенной зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, также учет влияния поврежденности приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [1], [2]. В данных работах при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности (угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности) оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла θ_d (значение $\theta = \pi$ соответствует верхнему берегу трещины, $\theta = 0$ — ее продолжению), функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось для $0 \leq \theta \leq \theta_d$. Оставшаяся область $\theta_d \leq \theta \leq \pi$, локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, есть полностью разрушенная зона, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю, на границе же введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. В [13] авторы апеллируют к невозможности выполнения граничных условий на берегах трещины и переходят к модифицированной постановке задачи, вводя область полностью разрушенного материала, примыкающую к берегам трещины.

Необходимо отметить, что вместе с асимптотическим изучением полей в окрестности вершины трещины в связанной постановке использовались и иные методы. Например, для анализа растущей трещины антиплоского сдвига в [12] сделана попытка использования метода годографа. Однако авторы отказываются от проблемы интегрирования кинетического уравнения и оперируют с предполагаемым результатом интегрирования, полагая, что параметр сплошности (или поврежденности) есть функция лишь от напряжений, но не физических координат x_1, x_2 , что, вообще го-

воря, неверно. Явная зависимость параметра сплошности от физических координат вносит сложности в процедуру метода годографа и ставит под сомнение возможность его использования для движущейся трещины.

Проблема определения геометрии области полностью разрушенного материала либо зоны процесса заслуживает особого внимания.

Моделирование разрушения вблизи вершины трещины осуществляется с помощью введения либо зоны процесса, в которой происходит активное накопление повреждений, либо области полностью поврежденного материала (или так называемой зоны насыщения, в которой параметр поврежденности (или сплошности) достиг своего критического значения и, следовательно, поврежденность больше не накапливается). Так, в [6] представлены решения задач о неподвижной и растущей трещинах антиплоского сдвига в квазихрупком материале. В этой работе предполагается, что определяющие соотношения линейны до и после достижения некоторых двух характерных для этого материала значений интенсивности деформации. Для промежуточных значений справедлива степенная зависимость. С помощью метода годографа определены конфигурации каждой из трех областей, соответствующих трем различным определяющим зависимостям. Согласно предложенной модели введенные области отвечают: а) неповрежденной области, б) области, в которой происходит процесс накопления повреждений, в) регион "насыщения", непосредственно охватывающий вершину трещины, в котором новые микродефекты уже не образуются. Показано, что данные области разделены окружностями с центром в вершине трещины (окружность, разделяющая область насыщения и зону активного накопления повреждений) и с центром, смещенным вправо относительно вершины трещины (граница, разделяющая неповрежденную область и зону накопления повреждений).

В уже упомянутой работе [13] представлено асимптотическое исследование усталостного роста трещины нормального отрыва в среде с поврежденностью. Показано, что у вершины трещины существует область процесса — зона, в которой происходит накопление рассеянных повреждений (в отличие от области полностью поврежденного материала). Для определения границы данной области использовано то обстоятельство, что кинетическое уравнение, задающее закон накопления рассеянных повреждений, имеет две "ветви," разделяющие два состояния материала, находящегося под действием усталостного нагружения: накопление повреждений в окрестности вершины трещины и отсутствие накопления повреждений.

В [9], [10] исследованы асимптотики напряжений и параметра сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва. Авторы статьи, основываясь на экспериментальных данных, предполагают, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и прямые, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и сплошности. Заметим, что авторы не определяют геометрию области процесса, а задают ее априори. Таким образом, задача нахождения конфигурации областей полностью поврежденного материала либо области активного накопления повреждений у вершины трещины не является еще полностью исследованной.

В [1], [2] рассмотрено докритическое подрастание трещины нормального отрыва, поперечного и антиплоского сдвига в связной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Установлено, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Данная область примыкает к берегам трещины в окрестности вершины трещины и занимает об-

ласть, определяемую соотношениями $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ и $-\pi \leq \theta \leq -3\pi/2$, где θ — полярный угол. Однако в рамках данного исследования не удастся найти конфигурацию этой области, поскольку результаты указывают лишь на существование вертикальной касательной к границе этой области при $\theta = 0$. Геометрию этой области можно определить, находясь от вершины трещины на расстояниях, сравнимых с характерным линейным размером зоны полностью поврежденного материала или превышающих это расстояние.

В [4] приведено асимптотическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке теории ползучести и механики поврежденности с использованием автомодельной переменной, предложенной в [11] для степенных определяющих соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжений. На основе упомянутых выше исследований в [4] предполагалось существование области полностью разрушенного материала, где все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. В силу наличия данной зоны вблизи вершины трещины нельзя разыскивать асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в непосредственной окрестности вершины трещины, как это обычно принимается в механике разрушения. Поэтому все асимптотические разложения определялись в системе координат, сдвинутой вправо от вершины на расстояние, равное характерному линейному размеру области полностью поврежденного материала. Оказалось, что, в отличие от ранее упомянутых исследований, степени в разложениях по собственным функциям параметра сплошности и компонент тензора напряжения не связаны друг с другом. Поэтому приходилось одну из степеней задавать априори (т.е. приходилось задавать асимптотическое поведение параметра сплошности), что ограничивает общность задачи. Тем не менее геометрия области полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант при данных предположениях найдена и приведена в [4].

К числу еще неразрешенных задач, требующих детального изучения, относятся оценка скорости роста трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью и связанная с данным вопросом проблема сращивания "ближнего поля" — решения, полученного в окрестности вершины трещины, с "дальним полем" — заданных граничных условий на бесконечности (в задачах о росте полубесконечной трещины в бесконечном теле). Стандартным приемом сращивания "ближнего" и "дального" полей является использование инвариантных интегралов механики разрушения: J -интеграла, C^* -интеграла и некоторых иных инвариантных интегралов, полученных обобщением упомянутых. Однако такие параметры не обладают свойством инвариантности при связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности.

В этой работе приведено новое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности в связанной постановке задачи с введением автомодельной переменной, предложенной в [11], моделирование процесса роста трещины с введением области полностью разрушенного материала и определение ее геометрии.

1. Автомодельная переменная в задаче о росте трещины в среде с поврежденностью

Рассмотрим растущую полубесконечную трещину в бесконечном теле в материале с определяющими соотношениями связанной задачи теории ползучести и механики поврежденности, построенных на основе степенной связи между скоростями

деформаций ползучести и напряжениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где ψ — параметр сплошности; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений; B, n — константы материала.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t = 0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1.2)$$

где C^* — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести, I_n — функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^* -интеграл, $\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ — функции, известные из решения Хатчинсона–Райса–Розенгрена (HRR) [5]; r, θ — полярные координаты.

Асимптотическое условие при $r \rightarrow \infty$ определяется решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений ($\psi \equiv 1$):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n). \quad (1.3)$$

Заметим, что начальное условие при $t = 0$ (1.2) и граничное условие в бесконечно удаленной точке (1.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi \equiv 1$.

Следует подчеркнуть, что асимптотическое условие (1.3) есть гипотеза о том, что вдали от вершины трещины поле напряжений совпадает с полем напряжений у вершины стационарной трещины в материале со степенными определяющими соотношениями (с решением Хатчинсона–Райса–Розенгрена). Однако исследуемая проблема есть задача о растущей трещине. Поэтому отметим, что (1.3) — гипотеза, справедливость или несправедливость которой должна быть установлена полученным решением.

В [11] установлено, что для определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3) существует автомодельная переменная

$$R = \frac{r}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad (1.4)$$

где $k(n) = C^*/(BI_n)$; A, m — постоянные кинетического уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (1.5)$$

или в декартовой системе координат

$$X_1 = \frac{x_1}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad X_2 = \frac{x_2}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.4) и само существование автомодельной переменной R без труда обосновывается с помощью анализа размерностей.

Перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}, \quad (1.7)$$

где L — некоторая характерная длина, T — характерное время. Характерные длина и время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений (1.5), позволяющего установить

$$T = \frac{1}{A} \left(\frac{k(n)}{L} \right)^{-m/(n+1)}. \quad (1.8)$$

В этом случае безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции от безразмерных переменных запишутся в следующей форме:

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \theta, \hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}} \sigma_{ij} \left(r/L, \theta, tA (k(n)/L)^{\frac{m}{n+1}} \right). \quad (1.9)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер L , то необходимо его исключить из аргументов функции $\hat{\sigma}_{ij}$, что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{\left[tA (k(n)/L)^{m/(n+1)} \right]^{(n+1)/m}}. \quad (1.10)$$

В результате имеем автомодельную переменную (1.4).

В этом случае напряжения и параметр сплошности представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{(n+1)/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), \quad \psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta), \quad (1.11)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R, \theta)$ и $\hat{\psi}(R, \theta)$ являются безразмерными функциями безразмерных переменных R, θ и подлежат определению в ходе решения конкретных краевых задач.

2. Автомодельное решение связанной задачи антиплоского сдвига пространства с полубесконечной трещиной

В механике деформируемого твердого тела часто оказывается целесообразным начинать изучение явления с наиболее простой с математической точки зрения задачи антиплоского сдвига. Поэтому сначала рассматривается проблема докритического подрастания полубесконечной трещины антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью. На основе результатов исследований [1], [2], [4] принимается, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{\tau}_{Rz}) + \frac{\partial \hat{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} = 0; \quad (2.1)$$

условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций ползучести $\hat{\gamma}_{\theta z}$ и $\hat{\gamma}_{Rz}$,

$$\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{\gamma}_{\theta z}) = \frac{\partial \hat{\gamma}_{Rz}}{\partial \theta}, \quad (2.2)$$

где

$$\hat{\gamma}_{Rz} = \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\tau}_{Rz}}{\hat{\psi}}, \quad \hat{\gamma}_{\theta z} = \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\tau}_{\theta z}}{\hat{\psi}}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\gamma}_{ij}(R, \theta) = \frac{2\gamma_{ij}(r, \theta, t)}{3B} (At)^{n(n+1)/m}; \quad \tau = \sqrt{(\tau_{Rz})^2 + (\tau_{\theta z})^2};$$

кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R} = -sm \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^m, \quad (2.4)$$

где $s = -1/(n+1)$. Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) должно удовлетворять граничным условиям: условиям отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$\hat{\tau}_{\theta z}(R, \theta = \pi) = 0 \quad (2.5)$$

и условию симметрии на ее продолжении

$$\hat{\tau}_{Rz}(R, \theta = 0) = 0. \quad (2.6)$$

Асимптотическое условие сближения разыскиваемого решения с распределением HRR при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\hat{\tau}_{ij}(R, \theta) = R^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (2.7)$$

(граничное условие в бесконечно удаленной точке).

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4), подчиняющееся граничным условиям (2.5)–(2.7), разыскивается во всей плоскости за исключением полностью поврежденной зоны, внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью разрушенного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе введенной области разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям непрерывности:

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\tau}_{ij} = 0. \quad (2.8)$$

В дальнейшем знак $\hat{\cdot}$ опускается.

3. Метод разложения по собственным функциям (при больших R)

Попытаемся построить асимптотические разложения компонент тензора эффективных напряжений и параметра сплошности при больших R (при больших R по

сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но малых по сравнению с характерным линейным размером рассматриваемого тела по сравнению с длиной трещины). Составной частью решения является исследование геометрии полностью поврежденной зоны, существующей у вершины трещины. Поскольку данная область, в которой параметр сплошности и все компоненты тензора напряжений равны нулю, образуется у вершины трещины, то в непосредственной окрестности вершины трещины невозможно разыскивать асимптотические разложения напряжений и параметра сплошности. Следует отметить, что возможным является подход, заключающийся в переходе к новой системе координат, сдвинутой относительно старой на расстояние, равное характерному линейному размеру области полностью поврежденного материала. Такой подход был реализован в [4]. Однако, как было установлено, показатели степеней радиальной координаты в асимптотических разложениях поля напряжений и параметра сплошности оказываются не связанными друг с другом, что приводит к тому, что одно собственное число задачи не определяется из решения, но задается априори, что ограничивает общность получаемого решения. Для преодоления этих сложностей можно исследовать конфигурацию области полностью поврежденного материала, приближаясь к ней от бесконечно удаленной точки. Для этого главные члены асимптотического разложения естественно разыскивать в виде

$$\tau_{ij}(R, \theta) = R^s f_{ij}^{(0)}(\theta), \quad \psi(R, \theta) = 1 \quad (R \rightarrow \infty, s < 0). \quad (3.1)$$

Подстановка соотношений (3.1) в систему уравнения равновесия (2.1) и условия сплошности (2.2) приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_{Rz}^{(0)}(\theta)$ и $f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$:

$$\frac{df_{\theta z}^{(0)}}{d\theta} + (s+1)f_{Rz}^{(0)} = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \left(f^{n-1} f_{Rz}^{(0)} \right) = (sn+1)f^{n-1} f_{\theta z}^{(0)}, \quad (3.2)$$

где $f = \sqrt{\left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2 + \left(f_{\theta z}^{(0)}\right)^2}$.

Решение системы уравнений (3.2) должно удовлетворять граничному условию на верхнем берегу трещины и условию симметрии на ее продолжении:

$$f_{Rz}^{(0)}(\theta = 0) = 0, \quad f_{\theta z}^{(0)}(\theta = \pi) = 0. \quad (3.3)$$

В силу однородности системы уравнений (3.2) функции $\kappa f_{ij}^{(0)}(\theta)$, где κ — произвольный множитель, являются решением рассматриваемой системы уравнений, если функции $f_{ij}^{(0)}(\theta)$ есть решение системы (3.2). Поэтому может быть сформулировано условие нормировки решения

$$f_{\theta z}^{(0)}(0) = 1. \quad (3.4)$$

Поэтому угловые распределения главных членов асимптотического разложения компонент тензора напряжений при больших R определяются как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{df_{Rz}^{(0)}}{d\theta} = f_{\theta z}^{(0)} \frac{(sn+1)f^2 + (n-1)(s+1) \left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2}{(n-1) \left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2 + f^2},$$

$$\frac{df_{\theta z}^{(0)}}{d\theta} = -(s+1)f_{Rz}^{(0)},$$
(3.5)

которая должна быть решена с учетом граничных условий

$$f_{Rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\theta z}^{(0)}(0) = 1. \quad (3.6)$$

Следует отметить, что последняя система уравнений хорошо известна в нелинейной механике разрушения, поскольку ее решение, соответствующее собственному числу $s = -1/(n+1)$, есть угловое распределение в решении Хатчинсона–Райса–Розенгрена [5].

Поскольку граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического сближения с решением Хатчинсона–Райса–Розенгрена, то для выполнения этого условия следует положить $s = -1/(n+1)$ и считать функции $f_{ij}^{(0)}(\theta)$ совпадающими с угловыми распределениями решения Хатчинсона–Райса–Розенгрена.

Угловые распределения компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(0)}(\theta)$ и интенсивности напряжений $f(\theta)$ показаны на рис. 1–5.

Анализ кинетического уравнения (2.4) позволяет найти второй член асимптотического разложения параметра сплошности: подстановка известного главного члена асимптотического разложения интенсивности напряжений

$$\frac{\tau}{\psi}(R, \theta) = R^s f(\theta) \quad (3.7)$$

в кинетическое уравнение (2.4) приводит к уравнению

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -sm R^{sm} f^m, \quad (3.8)$$

которое может быть проинтегрировано по R . Интегрирование кинетического уравнения по R и учет условия в бесконечно удаленной точке дает

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{sm} f^m(\theta). \quad (3.9)$$

Полученные два члена асимптотических разложения позволяют найти конфигурацию области полностью поврежденного материала, в которой параметр сплошности обращается в нуль. Граница этой области определяется уравнением

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{sm} f^m(\theta) = 0 \quad (3.10)$$

или

$$R = R(\theta) = (f(\theta))^{-1/s}. \quad (3.11)$$

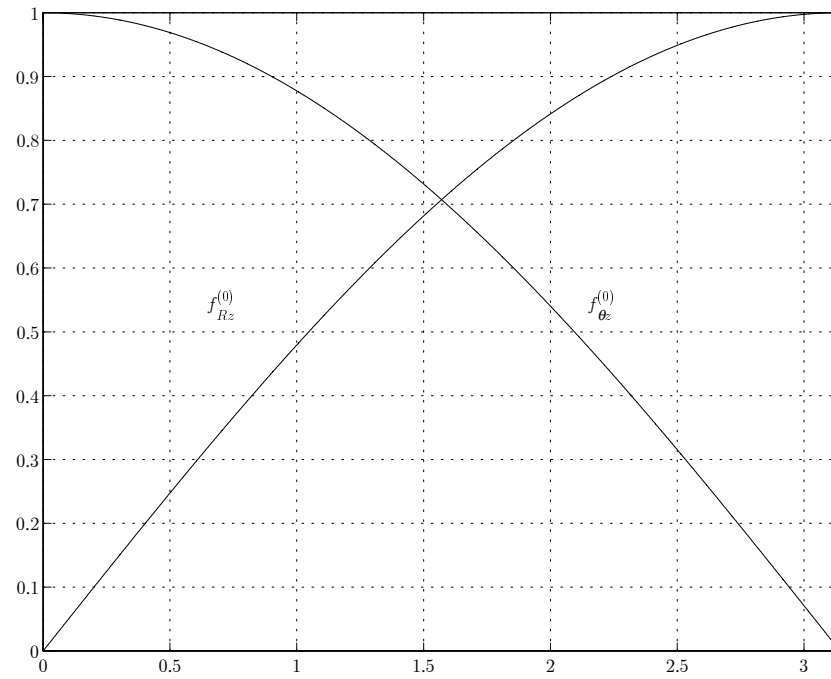


Рис. 1. Угловые распределения компонент тензора напряжений для $n = 1$, $m = 1$; $\tau_{Rz}(R, \theta) = R^s f_{Rz}^{(0)}(\theta)$, $\tau_{\theta z}(R, \theta) = R^s f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$

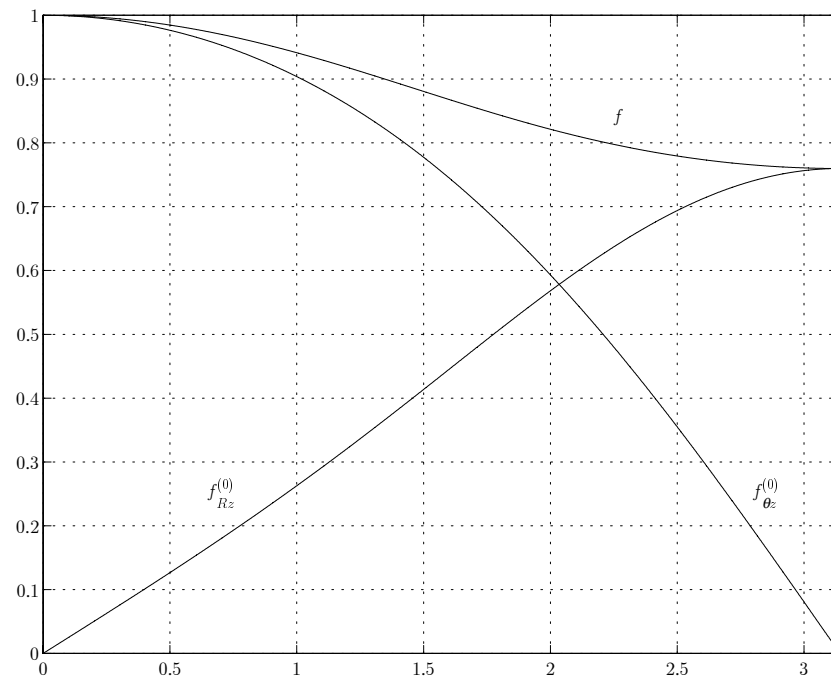


Рис. 2. Угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для $n = 3$, $m = 0.7n$; $\tau_{Rz}(R, \theta) = R^s f_{Rz}^{(0)}(\theta)$, $\tau_{\theta z}(R, \theta) = R^s f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$

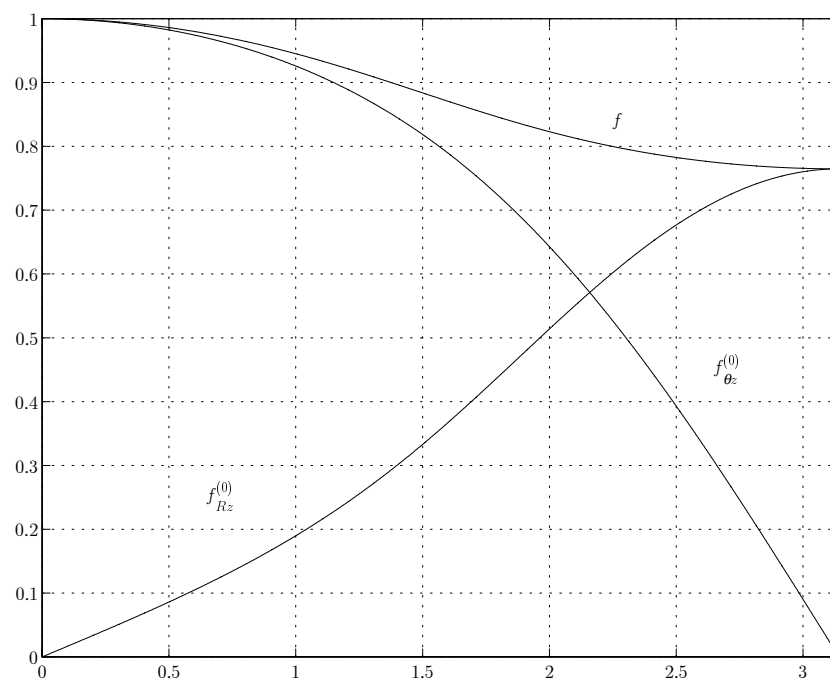


Рис. 3. Угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для $n = 5$, $m = 0.7n$: $\tau_{Dz}(R, \theta) = R^s f_{Rz}^{(0)}(\theta)$, $\tau_{\theta z}(R, \theta) = R^s f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$

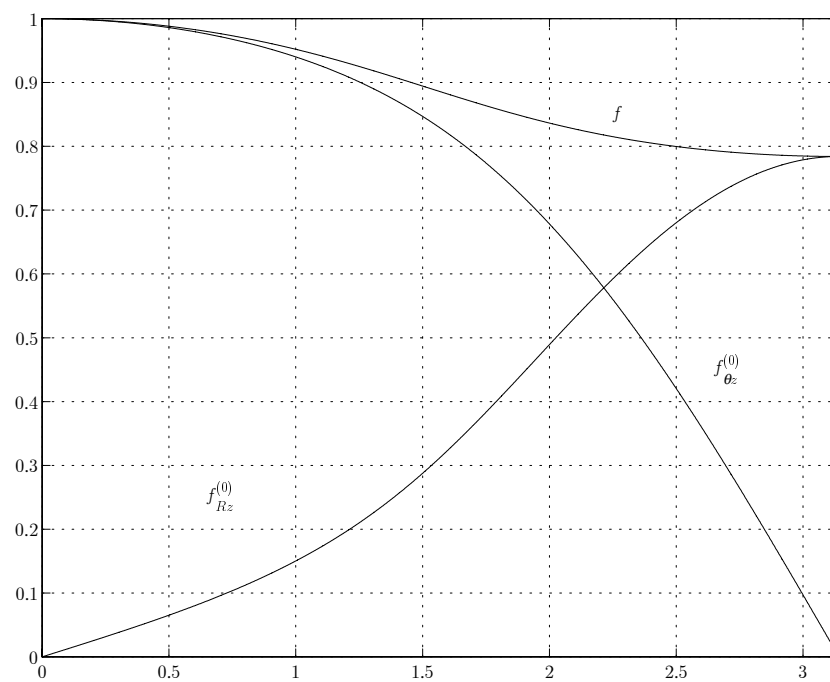


Рис. 4. Угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для $n = 7$, $m = 0.7n$: $\tau_{Rz}(R, \theta) = R^s f_{Rz}^{(0)}(\theta)$, $\tau_{\theta z}(R, \theta) = R^s f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$

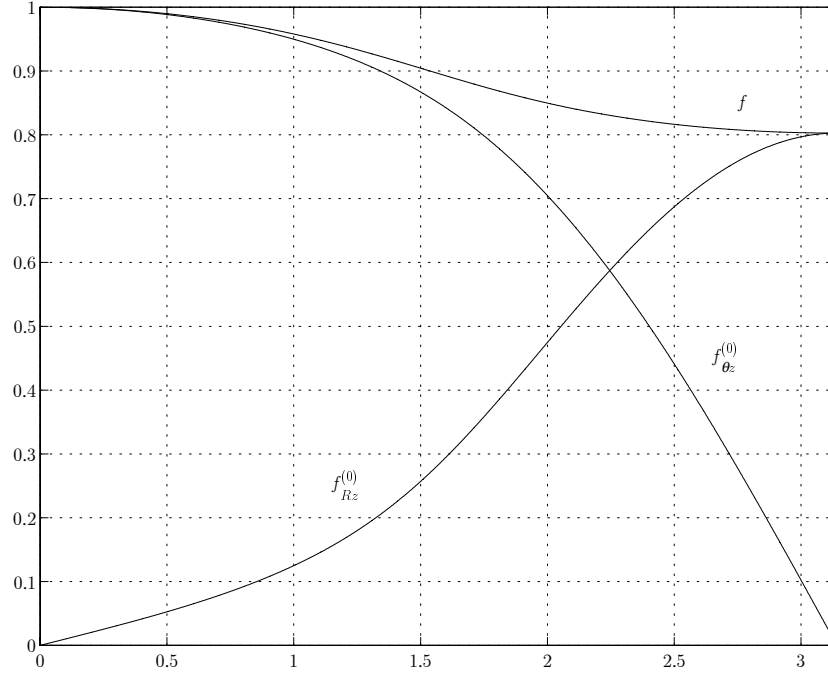


Рис. 5. Угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для $n = 9$, $m = 0.7n$; $\tau_{Rz}(R, \theta) = R^s f_{Rz}^{(0)}(\theta)$, $\tau_{\theta z}(R, \theta) = R^s f_{\theta z}^{(0)}(\theta)$

Границы областей полностью разрушенного материала для различных значений показателя n и $m = 0.7n$ приведены на рис. 6.

С целью уточнения полученного решения найдем следующие члены асимптотических разложений компонент тензора эффективных напряжений и параметра сплошности.

Будем разыскивать асимптотическое разложение компонент тензора эффективных напряжений в виде

$$\frac{\tau_{ij}}{\psi}(R, \theta) = R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\theta) + \dots \quad (3.12)$$

Так как два первых члена асимптотического разложения параметра сплошности имеют вид (3.9), то асимптотическое разложение компонент тензора напряжений определяется посредством формулы

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(R, \theta) &= \left[R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\theta) \right] \psi = \\ &= \left[R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\theta) \right] (1 - R^{sm} f^m(\theta)) = \\ &= R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\theta) - R^{s+sm} f_{ij}^{(0)}(\theta) f^m(\theta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сравнение последних двух слагаемых в полученном асимптотическом разложении (3.13) приводит к предположению о равенстве порядка их малости (так как

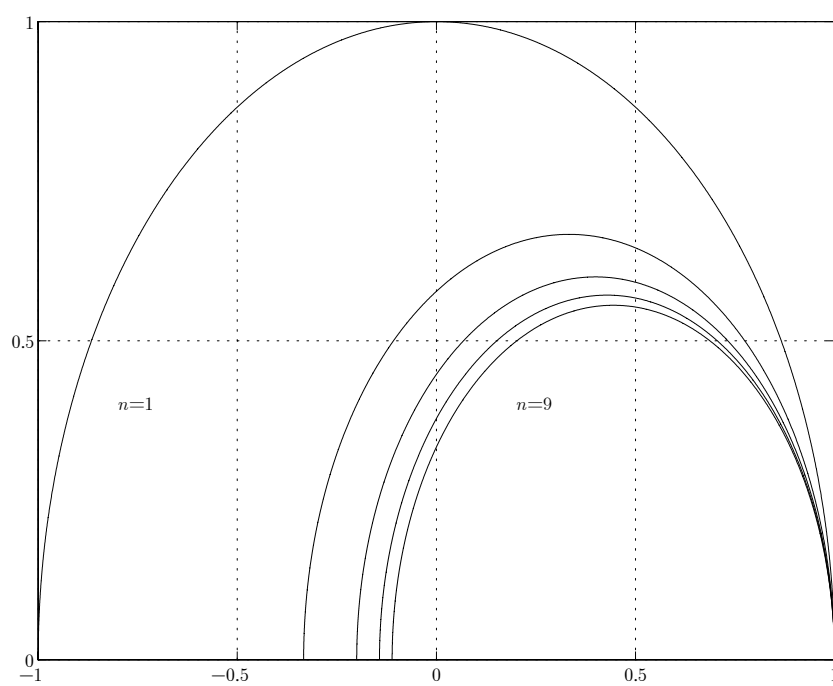


Рис. 6. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 1, 3, 5, 7, 9$; $m = 0.7n$

слагаемое $R^{s+sm} f_{ij}^{(0)}(\theta) f^m(\theta)$ не содержит новых неизвестных функций, то степень $s+sm$ не может быть меньше, чем s_1 , поэтому $s+sm \geq s_1$; предположение о том, что $s+sm = s_1$, позволит учесть в уравнении равновесия все имеющиеся слагаемые). Таким образом, $s+sm = s_1$.

Окончательное выражение для асимптотического разложения компонент тензора напряжений имеет вид

$$\tau_{ij}(R, \theta) = R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} \left[f_{ij}^{(1)}(\theta) - f_{ij}^{(0)}(\theta) f^m(\theta) \right]. \quad (3.14)$$

Для дальнейшего полезными будут следующие асимптотические разложения: интенсивности эффективных напряжений

$$\frac{\tau}{\psi}(R, \theta) = R^s f(\theta) + R^{s_1} \left[f_{Rz}^{(0)}(\theta) f_{Rz}^{(1)}(\theta) + f_{\theta z}^{(0)}(\theta) f_{\theta z}^{(1)}(\theta) \right] f^{-1}, \quad (3.15)$$

скоростей деформаций ползучести

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ij}(R, \theta) &= R^{sn} f^{n-1} f_{ij}^{(0)} + \\ &+ R^{sn+s_1-s} f^{n-1} \left[f_{ij}^{(1)} + (n-1) \left(f_{Rz}^{(0)} f_{Rz}^{(1)} + f_{\theta z}^{(0)} f_{\theta z}^{(1)} \right) f^{-2} f_{ij}^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подстановка асимптотических разложений компонент тензоров напряжений (3.14) и скоростей деформаций ползучести и (3.16) в уравнение равновесия (2.1), а также условие совместности деформаций (2.2) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях R приводит к системам уравнений для определения главного члена асимптотического разложения (3.5) и второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \left(f_{\theta z}^{(1)} \right)' &= \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' f^m + m f_{\theta z}^{(0)} f^{m-2} \left[f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' \right] - \\ &\quad - (s_1 + 1) \left[f_{Rz}^{(1)} - f_{Rz}^{(0)} f^m \right], \\ \left(f_{Rz}^{(1)} \right)' &= -(n-1) f_{Rz}^{(0)} \left[\left(f_{Rz}^{(0)} \right)' f_{Rz}^{(1)} + \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' f_{\theta z}^{(1)} + \left(f_{\theta z}^{(1)} \right)' f_{\theta z}^{(0)} \right] - \\ &\quad - (n-1) \left[f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' \right] \left[f_{Rz}^{(1)} + (n-1) f_{Rz}^{(0)} f_1 / f^2 \right] - \\ &\quad - 2(n-1) f_1 f_{Rz}^{(0)} \left[f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' \right] f^{-2} + \\ &\quad + (sn + s_1 - s + 1) \left[f_{\theta z}^{(1)} + (n-1) f_{\theta z}^{(0)} \right] - \\ &\quad - (n-1) f_1 \left(f_{Rz}^{(0)} \right)', \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $f_1 = f_1(\theta) = f_{Rz}^{(0)} f_{Rz}^{(1)} + f_{\theta z}^{(0)} f_{\theta z}^{(1)}$, с граничными условиями

$$f_{Rz}^{(1)}(\theta = 0) = 0, \quad f_{\theta z}^{(1)}(\theta = \pi) = 0. \quad (3.18)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.17) разыскивалось численно с помощью процедуры метода Рунге–Кутты в сочетании с методом

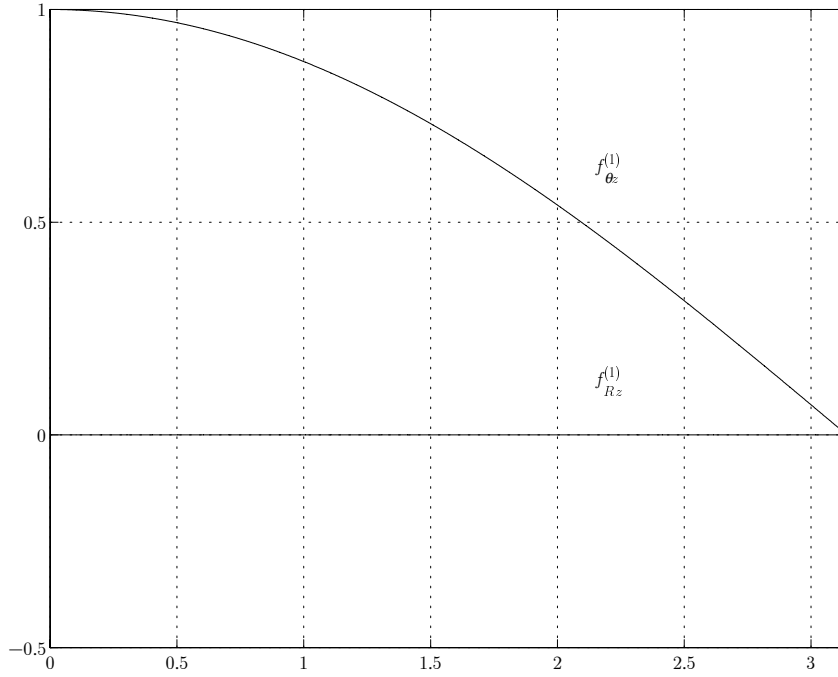


Рис. 7. Угловые распределения коэффициента второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(1)}$ для $n = 1$, $m = 1$

пристрелки. Действительно, для реализации метода Рунге–Кутты необходимо сформулировать условия при $\theta = 0$ для всех искомых функций:

$$f_{Rz}^{(1)}(\theta = 0) = 0, \quad f_{\theta z}^{(1)}(\theta = 0) = c, \quad (3.19)$$

где c – неизвестная константа. Таким образом, в ходе построения численного решения подбиралось значение константы c для выполнения оставшегося граничного условия на верхнем берегу трещины. Результаты численного счета для различных значений констант степенного закона ползучести и кинетического уравнения приведены на рис. 7–11.

В силу (3.15)

$$\left(\frac{\tau}{\psi}\right)^m = R^{ms} f^m (1 + R^{s_1-s} m f_1 f^{-2}) \quad (3.20)$$

и кинетическое уравнение (2.4) может быть представлено как

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -sm (R^{sm} f^m + m R^{2sm} f^{m-2} f_1), \quad (3.21)$$

интегрирование которого по R приводит к трехчленному асимптотическому разложению скалярного параметра сплошности

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1 / 2. \quad (3.22)$$

Последнее выражение для параметра сплошности позволяет найти следующее

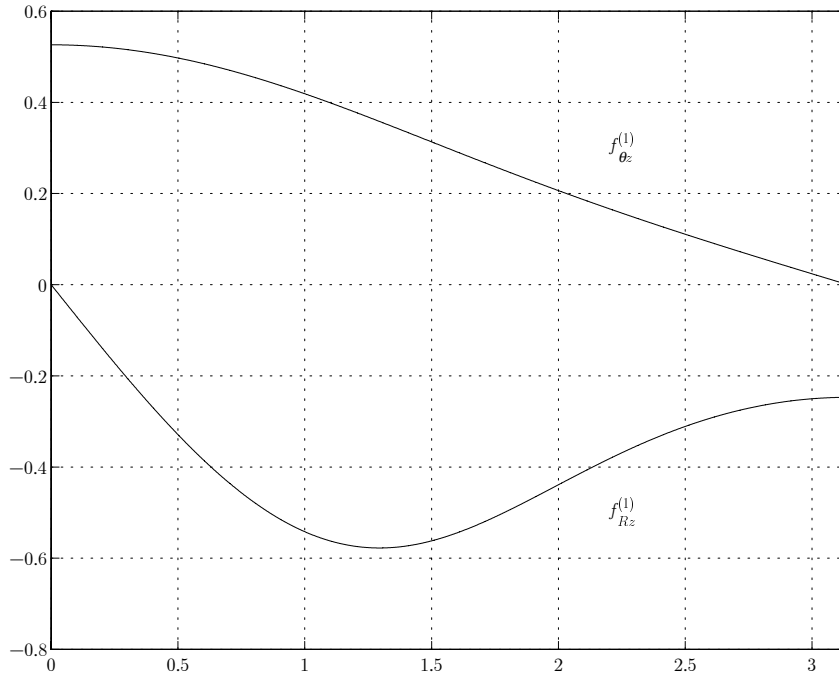


Рис. 8. Угловые распределения коэффициента второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(1)}(\theta)$ для $n = 3$, $m = 0.7n$

приближение для границы области полностью поврежденного материала посредством выделения геометрического места точек, для которого

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1 / 2 = 0. \quad (3.23)$$

С математической точки зрения определение геометрического места точек $R = R(\theta)$, для которого справедливо (3.23), сводится к решению квадратного уравнения. Действительно, вводя обозначения $R^{-sm} = z$, уравнение (3.23) преобразуется к виду

$$z^2 - z f^m - m f^{m-1} f_1 / 2 = 0. \quad (3.24)$$

Поэтому граница области полностью поврежденного материала определяется зависимостью

$$R = R(\theta) = \left[\left(f^m + \sqrt{f^{2m} + 2m f^{m-2} f_1} \right) / 2 \right]^{-1/(sm)}. \quad (3.25)$$

Геометрия области полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант показана на рис. 12–16 (используются следующие обозначения: 1 — конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 — конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности). Из приведенных графиков можно заключить, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала (значение $R(0)$) существенно увеличивается по сравнению с первой оценкой размера этой зоны, даваемой двучленным асимптотическим

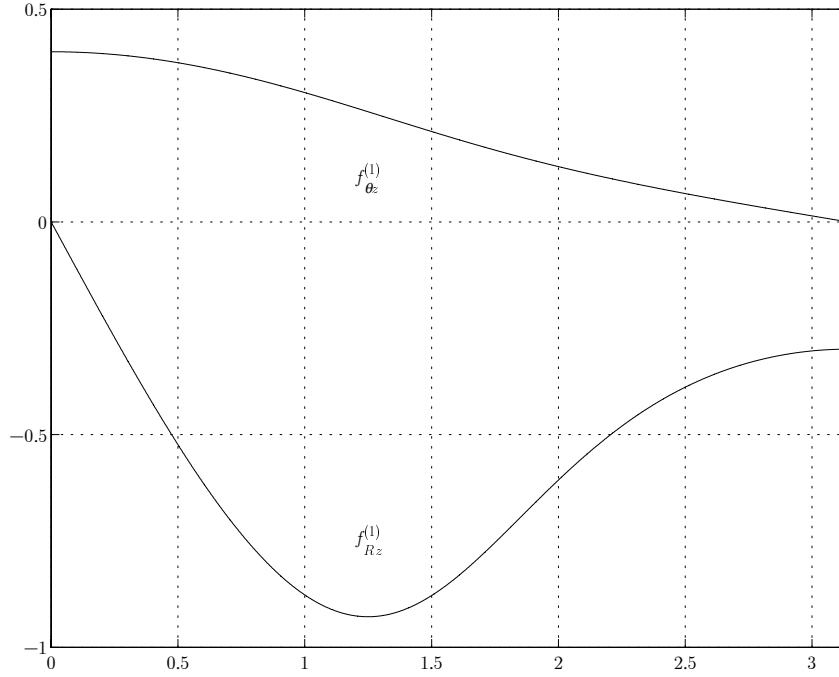


Рис. 9. Угловые распределения коэффициента второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(1)}(\theta)$ для $n = 5$, $m = 0.7n$

разложением параметра сплошности, и, следовательно, главным членом асимптотического разложения компонент тензора напряжений. Таким образом, необходимо построить третий член асимптотического разложения напряжений и четырехчленное разложение параметра сплошности, а затем получить следующую оценку границы области полностью поврежденного материала.

Будем разыскивать трехчленное асимптотическое разложение компонент тензора эффективных напряжений в форме

$$\frac{\tau_{ij}}{\psi}(R, \theta) = R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\theta) + R^{s_2} f_{ij}^{(2)}(\theta). \quad (3.26)$$

Учитывая, что для параметра сплошности справедливо представление

$$\psi = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1, \quad (3.27)$$

то можно найти, повторяя проведенные ранее рассуждения, что $s_2 = s + 2sm$, и асимптотическое разложение самих напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(R, \theta) = & R^s f_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{s+sm} \left[f_{ij}^{(1)}(\theta) - f_{ij}^{(0)}(\theta) f^m(\theta) \right] + \\ & + R^{s+2sm} \left[f_{ij}^{(2)}(\theta) - f_{ij}^{(1)}(\theta) f^m(\theta) - m f_{ij}^{(0)}(\theta) f^{m-2}(\theta) f_1(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для дальнейшего анализа будут полезными асимптотические разложения интенсивности эффективных напряжений

$$\frac{\tau}{\psi} = R^s f \left[1 + R^{sm} \frac{f_1}{f^2} + R^{2sm} \frac{f_2}{2f^2} \right], \quad (3.29)$$

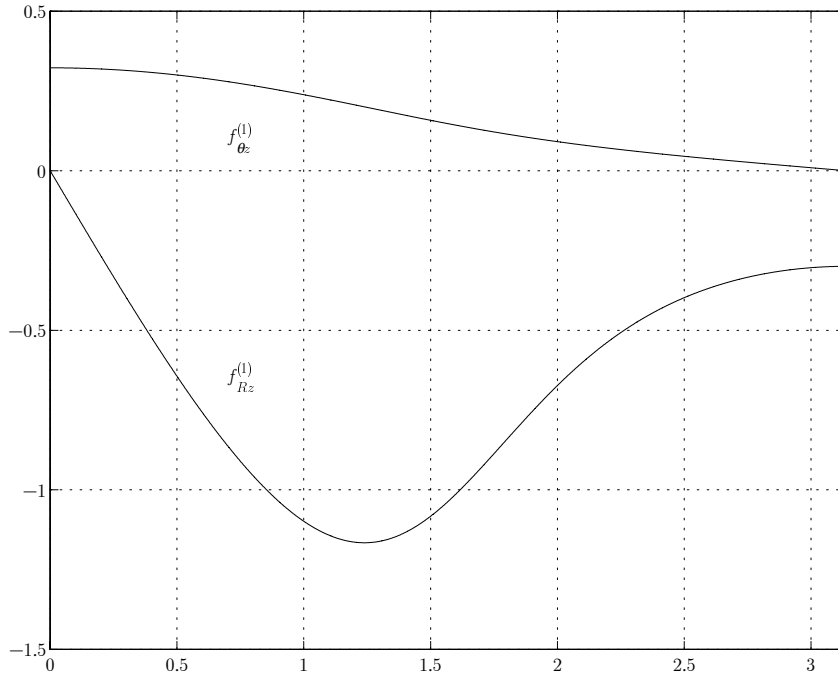


Рис. 10. Угловые распределения коэффициента второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(1)}(\theta)$ для $n = 7$, $m = 0.7n$

где

$$f_2 = f_2(\theta) = \left(f_{Rz}^{(1)}\right)^2 + \left(f_{\theta z}^{(1)}\right)^2 + 2 \left[f_{Rz}^{(0)} f_{Rz}^{(0)} + f_{\theta z}^{(2)} f_{\theta z}^{(2)}\right], \quad (3.30)$$

и компонент тензора скоростей деформаций сдвига

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ij} = R^{sn} f^{n-1} & \left\{ f_{ij}^{(0)} + \right. \\ & + R^{sm} \left[f_{ij}^{(1)} + (n-1) f_{ij}^{(0)} f_1 f^{-2} \right] + \\ & \left. + R^{2sm} \left[f_{ij}^{(2)} + (n-1) f_{ij}^{(1)} f_1 f^{-2} + \frac{(n-1) f_{ij}^{(0)} f_2}{2 f^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подстановка асимптотических разложений (3.26), (3.28) и (3.29) в систему уравнений равновесия и сплошности приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_{ij}^{(2)}(\theta)$:

$$\begin{aligned} \left(f_{\theta z}^{(2)}\right)' &= \left(f_{\theta z}^{(1)}\right)' f^m + m f_{\theta z}^{(1)} f^{m-2} h + \\ &+ m f_{\theta z}^{(0)} f^{m-2} \left[\left(f_{Rz}^{(0)}\right)' f_{Rz}^{(1)} + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(1)}\right)' + \left(f_{\theta z}^{(0)}\right)' f_{\theta z}^{(1)} + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(1)}\right)' \right] / 2 + \\ &+ m(m-2) f_{\theta z}^{(0)} f^{m-4} f_1 h / 2 + m \left(f_{\theta z}^{(0)}\right)' f^{m-2} f_1 / 2 - \\ &- (s + 2sm + 1) \left(f_{Rz}^{(2)} - f_{Rz}^{(1)} f^m - m f_{Rz}^{(0)} f^{m-2} f_1 / 2\right), \end{aligned}$$

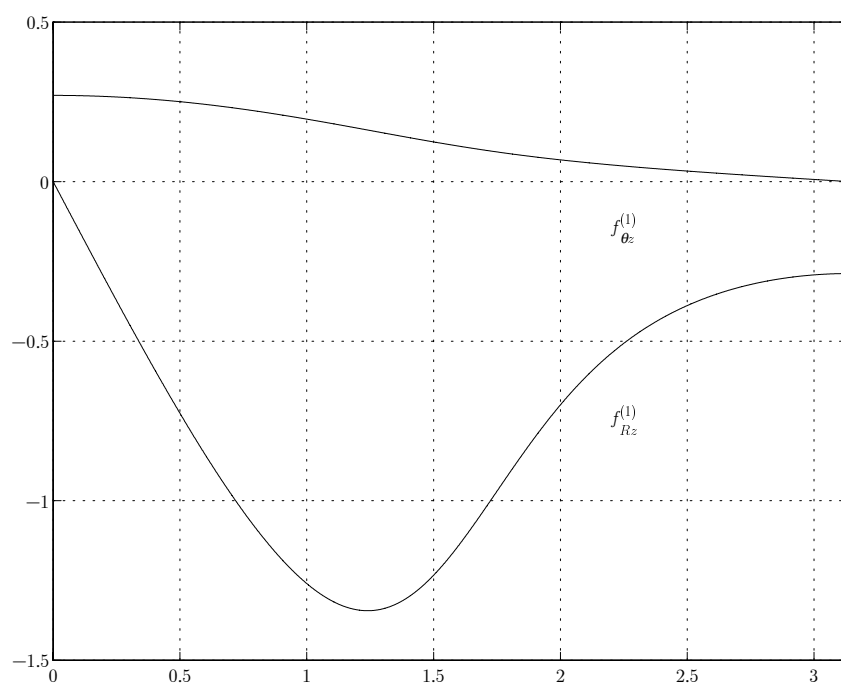


Рис. 11. Угловые распределения коэффициента второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений $f_{ij}^{(1)}(\theta)$ для $n = 9$, $m = 0.7n$

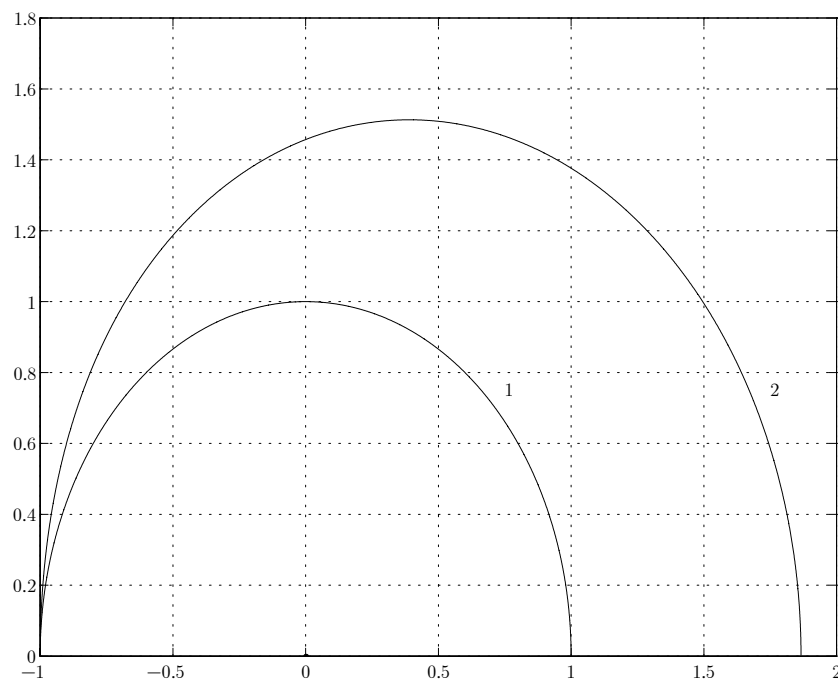
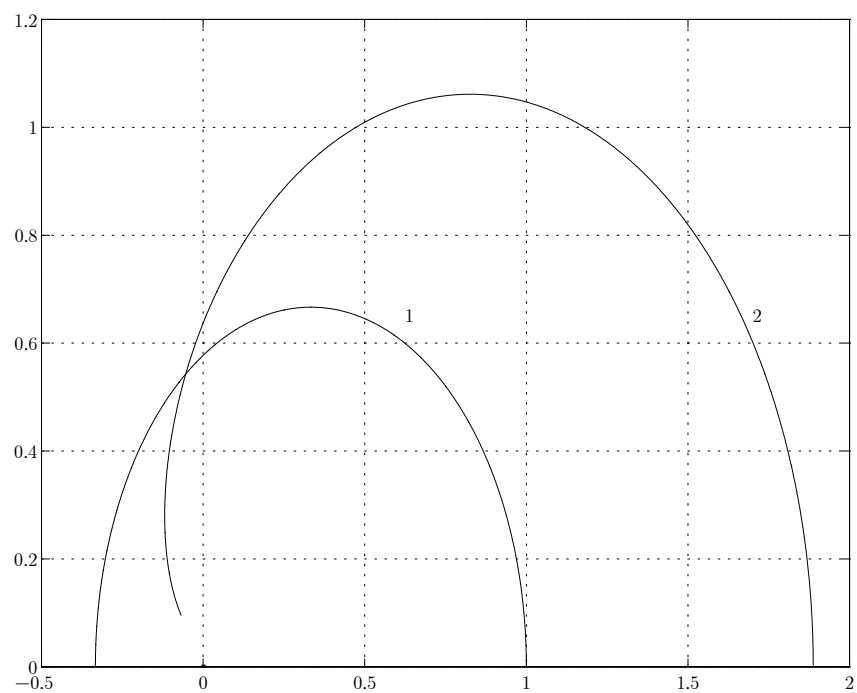
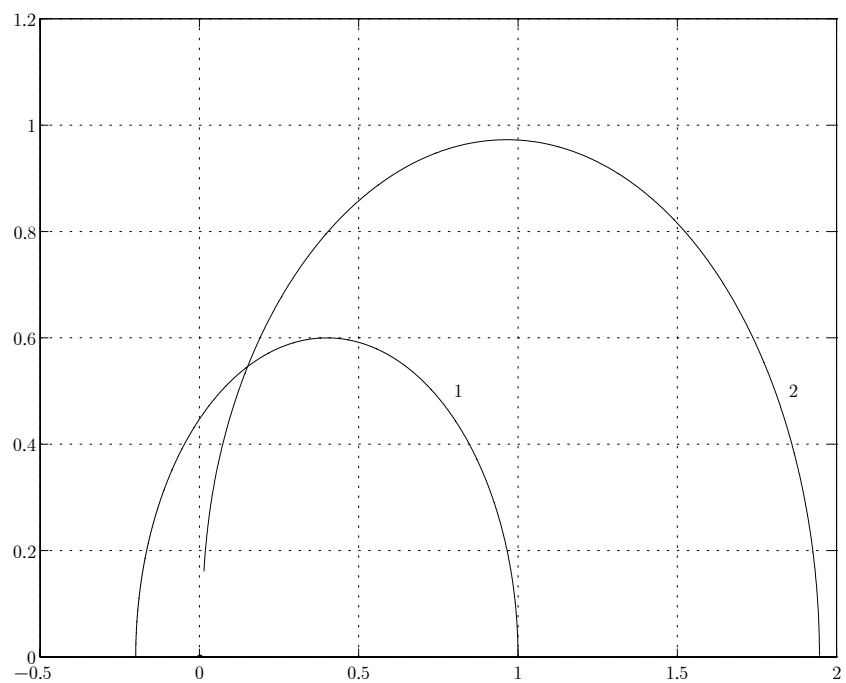
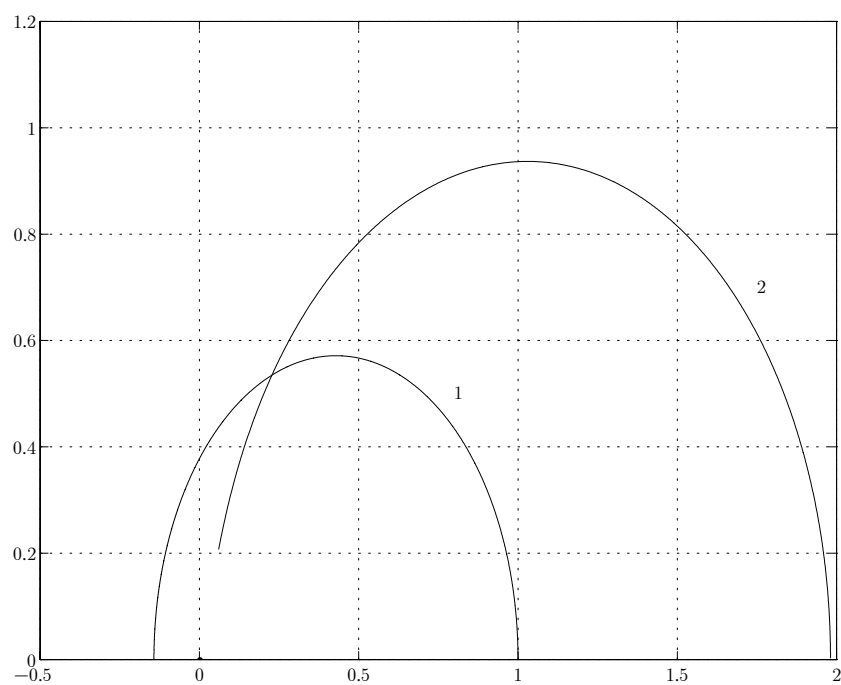
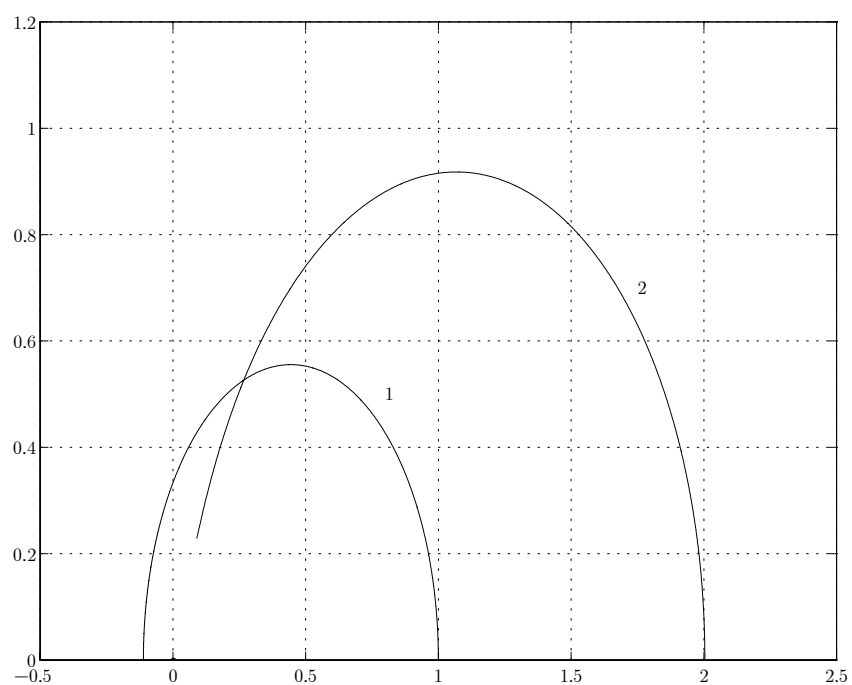


Рис. 12. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = m = 1$

Рис. 13. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ Рис. 14. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$

Рис. 15. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 7$ Рис. 16. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 9$

(3.32)

$$\begin{aligned}
\left(f_{Rz}^{(2)}\right)' &= \left\{ (sn + 2sm + 1)f^2 \left((n-1)f_{\theta z}^{(1)}f_1/f^2 + (n-1)f_{\theta z}^{(0)}f_2/(2f^2) + \right. \right. \\
&+ f_{\theta z}^{(2)} \left. \right) - (n-1)f_{Rz}^{(0)} \left[f_{Rz}^{(1)} \left(f_{Rz}^{(1)} \right)' + f_{\theta z}^{(1)} \left(f_{\theta z}^{(1)} \right)' + \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' f_{Rz}^{(2)} + \right. \\
&+ \left. \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' f_{\theta z}^{(2)} + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(2)} \right)' \right] - (n-1)h \times \\
&\times \left(f_{Rz}^{(2)} + (n-1)f_{Rz}^{(1)}f_1/f^2 + (n-1)f_{Rz}^{(0)}f_2/(2f^2) \right) - (n-1) \left(f_{Rz}^{(1)} \right)' f_1 + \\
&+ (n-1)f_{Rz}^{(1)} \left(\left(f_{Rz}^{(0)} \right)' f_{Rz}^{(1)} + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(1)} \right)' + \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' f_{\theta z}^{(1)} + f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(1)} \right)' \right) + \\
&+ 2(n-1)f_{Rz}^{(1)}f_1hf^{-2} - (n-1) \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' f_2/2 - \\
&- (n-1)f_{Rz}^{(0)}f_2hf^{-2} \left. \right\} \left(f^2 + (n-1)(f_{Rz}^{(0)})^2 \right)^{-1},
\end{aligned}$$

где

$$h = \left[f_{\theta z}^{(0)} \left(f_{\theta z}^{(0)} \right)' + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)} \right)' \right].$$

Граничные условия, накладываемые на искомые функции $f_{Rz}^{(2)}(\theta)$ и $f_{\theta z}^{(2)}(\theta)$, есть условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины $f_{\theta z}^{(2)}(\theta = \pi) = 0$ и условие симметрии на ее продолжении $f_{Rz}^{(2)}(\theta = 0) = 0$. Снова, как и при исследовании угловых распределений второго члена асимптотического разложения компонент тензора эффективных напряжений, решение системы дифференциальных уравнений (3.32) разыскивалось с помощью метода Рунге–Кутты в сочетании с методом пристрелки: граничное условие на верхнем берегу трещины заменялось условием $f_{\theta z}^{(2)}(\theta = 0) = c_1$, где c_1 — неизвестная константа, подбираемая таким образом, чтобы выполнялось граничное условие при $\theta = \pi$. Численное решение сформулированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений показало, что ни при каком значении искомой константы c_1 не удастся выполнить граничное условие при $\theta = \pi$ для $n = m = 1$. Этот случай представляет интерес, поскольку при данных значениях материальных констант удастся построить аналитическое решение: можно построить аналитическим способом все рассматриваемые слагаемые в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений и параметра сплошности. Аналитическое решение подтверждает результаты численного эксперимента. Аналитическое решение для данных значений материальных констант показывает принципиальную невозможность удовлетворения граничного условия на верхнем берегу трещины (рис. 17). Граничное условие при $\theta = \pi$ для второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений выполнилось лишь по счастливой случайности. Для остальных значений материальной константы n и связанной с ней константы кинетического уравнения $m = 0.7n$ удастся удовлетворить граничному условию на берегу трещины.

Кинетическое уравнение с учетом третьего члена асимптотического разложения интенсивности эффективного напряжения может быть представлено в форме

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -smR^{sm}f^m \left(1 + mR^{sm}f_1f^{-2} + R^{2sm}\frac{mf_2}{2f^2} \right), \quad (3.33)$$

интегрирование которого по автомодельной переменной R приводит к четвертому

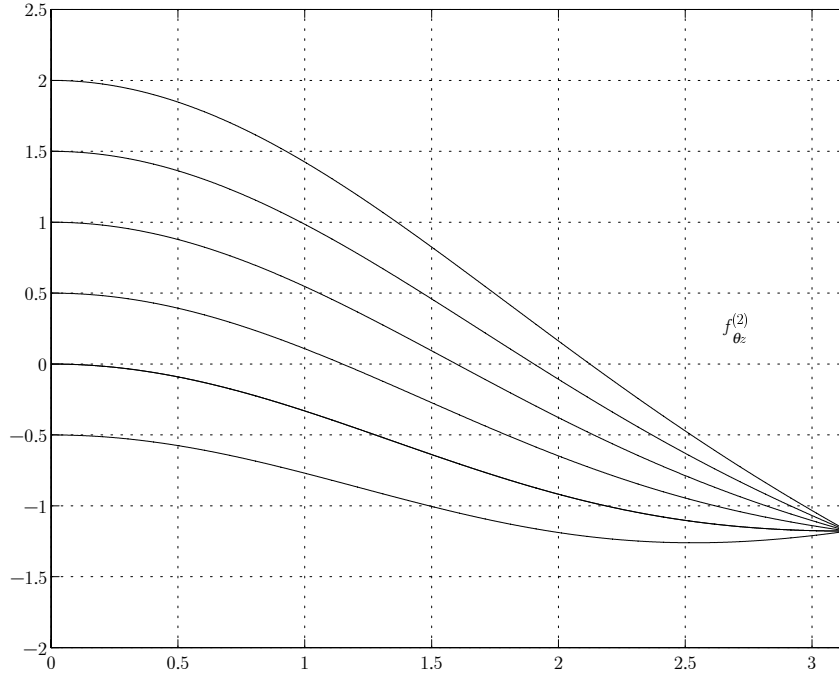


Рис. 17. Иллюстрация метода пристрелки при построении третьего члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений для $n = m = 1$. Очевидно, что никакие значения константы c_1 не приводят к выполнению граничного условия $f_{\theta z}^{(2)}(\theta = \pi) = 0$

члену асимптотического разложения параметра сплошности

$$\psi = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1/2 - m R^{3sm} f^{m-2} f_2/6. \quad (3.34)$$

Используя полученное разложение, можно найти уравнение, определяющее границу области полностью поврежденного материала

$$\psi = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1/2 - m R^{3sm} f^{m-2} f_2/6 = 0. \quad (3.35)$$

Обозначение $z = R^{-sm}$ приводит к алгебраическому уравнению третьей степени относительно z :

$$z^3 - z^2 f^m - m z f^{m-2} f_1/2 - m f^{m-2} f_2/6 = 0, \quad (3.36)$$

решение которого для различных значений материальных констант разыскивалось численно. Оказалось, что корней этого кубического уравнения, отвечающих физическому смыслу задачи, не существует (установлено, что для всех исследуемых значений материальных констант n уравнение имеет один отрицательный действительный корень и два комплексно сопряженных).

Таким образом, принятая гипотеза о том, что решение Хатчинсона–Райса–Розенгрена определяет геометрию области полностью поврежденного материала вблизи трещины, не является верной. Поэтому примем граничное условие в бесконечно удаленной точке (а, следовательно, и начальное условие исходной задачи) в более общей форме:

$$\sigma_{ij}(R, \theta) = \tilde{C} R^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (3.37)$$

и найдем ту асимптотику поля напряжений, которая определяет геометрию области полностью поврежденного материала. Основным критерием выбора собственного числа s (разумеется, при выполнении всех уравнений задачи и граничных условий) является близость границ областей полностью поврежденного материала, получаемых при уточнении асимптотического разложения (каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малым по сравнению с предыдущим, и, как следствие, характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, вычисленный с помощью $k+1$ слагаемого, не должен сильно отличаться от оценки этого размера при рассмотрении k -членного асимптотического разложения).

Следует отметить, что введение автомодельной переменной для граничного условия в бесконечно удаленной точке (3.37) осуществляется способом, аналогичным ранее изложенному, и основано на анализе размерностей величин, входящих в задачу. Действительно, для степенных определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями в бесконечно удаленной точке

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (3.38)$$

существует автомодельная переменная вида

$$R = r \left[t A \tilde{C}^m \right]^{1/(sm)} \quad (3.39)$$

или

$$R = r k^{-1} t^{1/(sm)}, \quad (3.40)$$

где $k = (A \tilde{C}^m)^{-1/(sm)}$.

Тогда напряжения представляются в виде

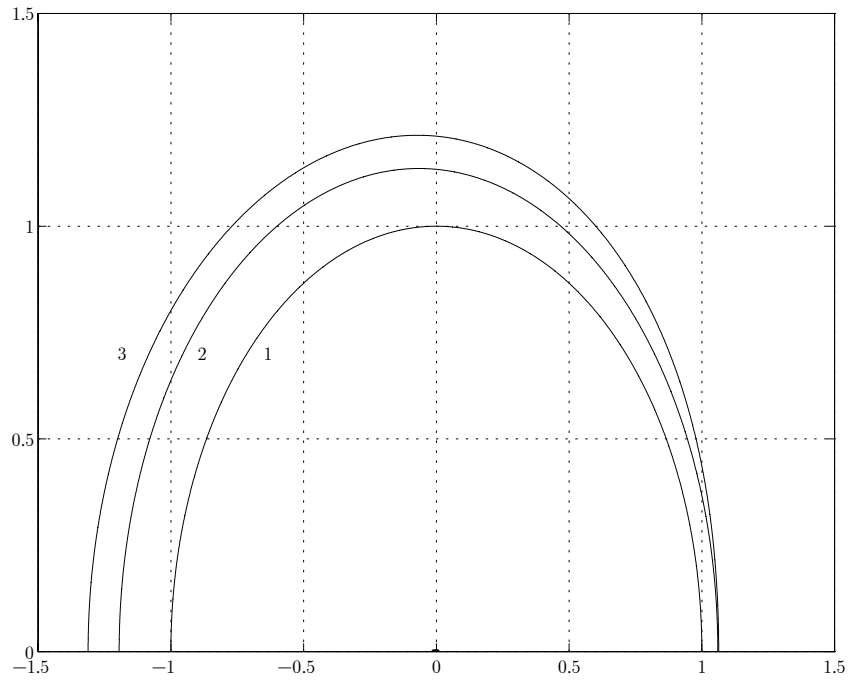
$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \tilde{C} k^s t^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta). \quad (3.41)$$

Введение автомодельной переменной (3.40) не вызывает изменение системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия, условия совместности и кинетического уравнения. Изменение претерпевает граничное условие в бесконечно удаленной точке, что приводит к проблеме определения нового собственного числа s , отличного от $-1/(n+1)$. В силу этого необходимо проанализировать системы дифференциальных уравнений (3.5), (3.17) и (3.32) с прежними граничными условиями.

Вычислительный эксперимент показал, что значения собственного числа s , приводящие к разложениям компонент тензора напряжений и параметра сплошности по собственным функциям, которые дают сходящиеся (к некоторому предельному контуру) контуры областей полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант, сведены в таблице:

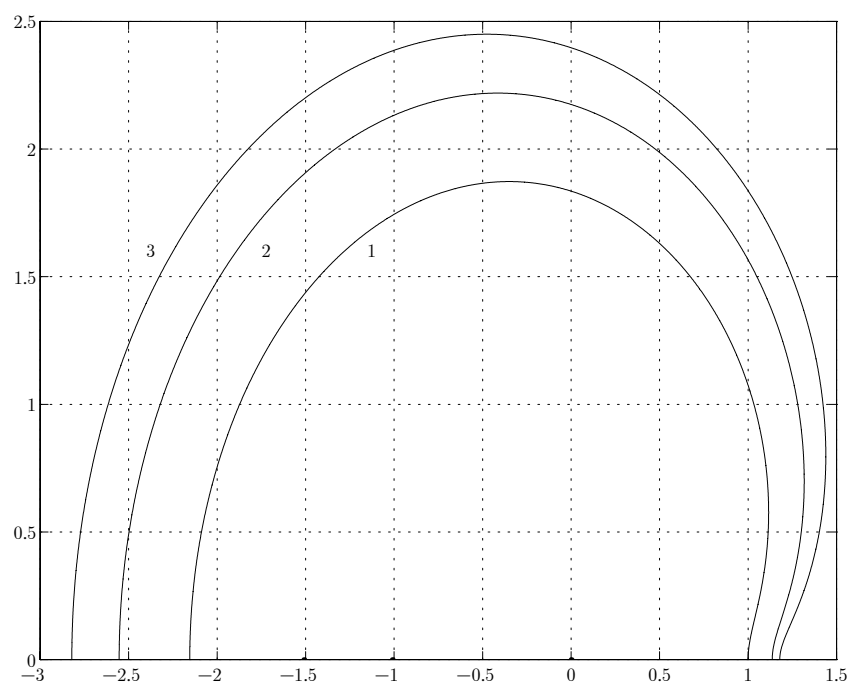
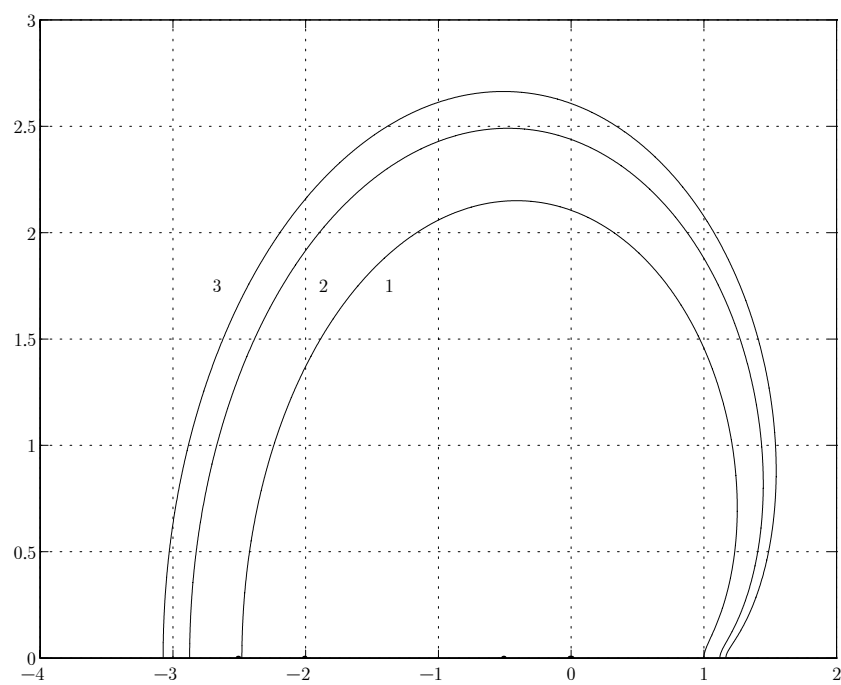
Таблица

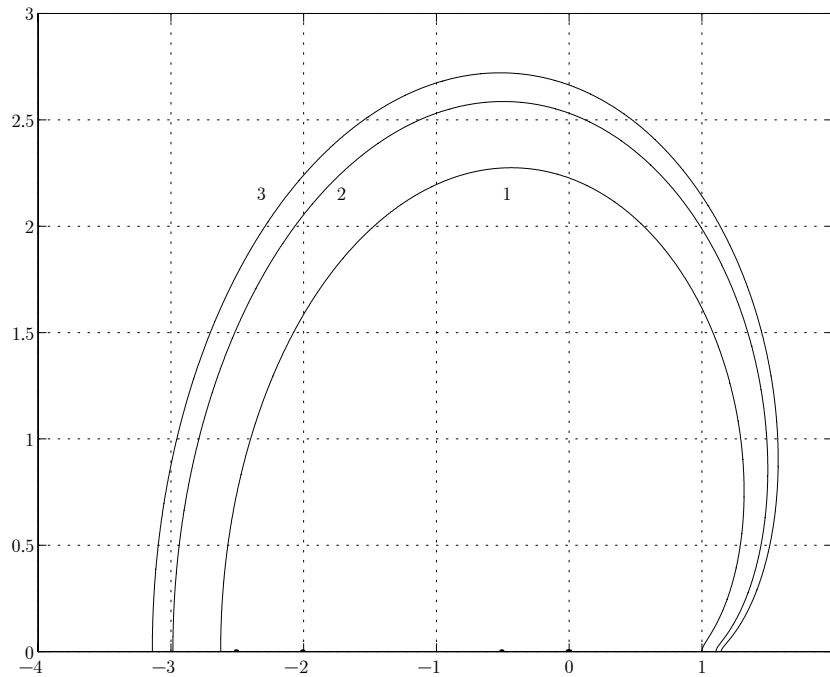
Собственные числа s для различных значений материальных констант

Рис. 18. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = m = 1$

$n = m = 1$	$s = -1.5$
$n = 2, m = 0.7n$	$s = -1.2303$
$n = 3, m = 0.7n$	$s = -1.1830$
$n = 4, m = 0.7n$	$s = -1.1648$
$n = 5, m = 0.7n$	$s = -1.1553$
$n = 6, m = 0.7n$	$s = -1.1495$
$n = 7, m = 0.7n$	$s = -1.1455$
$n = 8, m = 0.7n$	$s = -1.1425$
$n = 9, m = 0.7n$	$s = -1.1405$
$n = 10, m = 0.7n$	$s = -1.1390$

Делая вывод, можно заключить, что асимптотика Хатчинсона–Райса–Розенгрена не определяет конфигурацию области полностью поврежденного материала. Установлена новая асимптотика дальнего поля напряжений в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Показано, что именно такая асимптотика поля напряжений и параметра сплошности ведет к сходящимся границам областей полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант определяющего соотношения и кинетического уравнения (рис. 18–21, используются следующие обозначения: 1 — конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 — конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 3 — конфигурация области, определяемая четырехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности).

Рис. 19. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ Рис. 20. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$

Рис. 21. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 7$

Литература

- [1] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести// ФХММ, 1992. Т.2. № 1. С. 5–11.
- [2] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины// Изв. РАН. МТТ, 1995. № 3. С. 160–166.
- [3] Астафьев В. И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара.: Изд-во "Самарский ун-т", 2001. С. 435–539.
- [4] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (связка "ползучесть–поврежденность")// Вестник СамГУ. 2000. № 4(18). С. 128–145.
- [5] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V.16. P. 1–12.
- [6] Jin Z.H., Batra R.C. Crack shielding and material deterioration in damaged materials: an antiplane shear fracture problem// Arch. Appl. Mech. 1998. No.68. P. 247–258.
- [7] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part I. Small damage region around the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V.34. No.24. P. 3163–3178.
- [8] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part II. Small damage region around the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V.34. No.10. P. 1183–1197.

- [9] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth// *Int. J. Solids Structures*. 2000. No.37. P. 6203–6220.
- [10] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics// *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000. V.183. P. 15–33.
- [11] Riedel H. *Fracture at high temperature*. Berlin: Springer, 1987. 418 pp.
- [12] Wang T., Kishimoto K. Higher order fields for damaged nonlinear antiplane shear notch, crack and inclusion problems// *Engn. J. Mech. A. Solids*. 1999. No.18. P. 963–986.
- [13] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics// *Engn. Frac. Mech.* 1995. V.50. No.1. P. 131–141.
- [14] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage// *Int. J. of Fracture*. 2001. V.108. P. 383–395.

ON THE GEOMETRY OF THE FULLY DAMAGED ZONE NEAR A MODE III CRACK TIP OF THE CREEP–DAMAGE COUPLED BOUNDARY VALUE PROBLEM

© 2001 L.V. Stepanova,³ M.E. Fedina⁴

Asymptotic stress and damage fields for a growing crack under creep conditions for creep–damage coupled formulation of the problem are given. The self–similar variable proposed by Riedel is used for the analysis and a self–similar solution of the creep–damage coupled boundary value problem is obtained. It is shown that the totally damaged zone near the crack tip, where all stresses and scalar integrity parameter are equalled to zero, does exist. The geometry of the totally damaged zone for different values of material constants is investigated and presented.

Поступила в редакцию 20/ V/2001;
в окончательном варианте — 20/ VI/2001.

³Stepanova Larisa Valentinovna, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara 443011, Russia; lst@ssu.samara.ru

⁴Fedina Maria Efimovna, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia; phedina@ssu.samara.ru