МАТЕМАТИКА

УДК 517.982

$\mathcal{K}$–МОНОТОННЫЕ ПАРЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2001 Р.Ф. Узбеков[1]

В работе рассматриваются вопросы, связанные с описанием некоторых $\mathcal{K}$–монотонных пар конечномерных пространств. Их изучение было стимулировано развитием теории интерполяции линейных операторов, в частности, попытками обобщить на как можно более широкий класс пространств знаменитую теорему Кальдерона–Митягина.

Если $w_1 \geq ...w_n \geq 0$, то конечномерным пространством Лоренца $\lambda^n(w)$ называется пространство $\mathbb{R}^n$ со следующей нормой:

$$\|x\|_{\lambda^n(w)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* w_i.$$

Была получена формула для $\mathcal{K}$–функционала на паре пространств $(\lambda^n(w), l^n_\infty)$. Найдено достаточное условие $\mathcal{K}$–монотонности одной пары конечномерных пространств: если $(\lambda^n(w), l^n_\infty)$ является точной $\mathcal{K}$–монотонной парой, то $w_n > 0$.

Вещественный метод интерполяции является важным по общности и приложениям способом построения интерполяционных пространств. Существует достаточное количество вопросов, относящихся к теории вещественного метода. Один из них — это задача описания точных $\mathcal{K}$–монотонных пар конечномерных пространств.

Определение 1. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, то есть два банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в некоторое отделимое линейное топологическое пространство, X — промежуточное банахово пространство между X_0 и X_1. Это означает,что $X_0 \bigcap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ (вложения непрерывны). В этом случае любой линейный оператор, определенный на X_0 и X_1, одновременно определен на X. Тогда X называется точным интерполяционным пространством между X_0 и X_1, если из того, что линейный оператор $T\colon X_0 \longrightarrow X_0$, $T\colon X_1 \longrightarrow X_1$, следует, что $T\colon X \longrightarrow X$ и

$$\|T\|_{X \longrightarrow X} \leq \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}.$$

Определение 2. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара. Тогда для любого $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$–функционал Петре

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\big\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} \colon x = x_0 + x_1,\, x_i \in X_i \; i = 0, 1\big\}.$$

[1]Узбеков Роман Фатихович, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1

Определение 3. Банахова пара (X_0, X_1) называется $\mathcal{K}$–монотонной с константой $K > 0$, если из того,что X — точное интерполяционное пространство между X_0 и X_1, следует выполнение условия: если для $y \in X_0 + X_1$ и $x \in X$

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0), \tag{1}$$

то $y \in X$ и $\|y\|_X \leq K\|x\|_X$. Если $= 1$, то пара называется точной $\mathcal{K}$–монотонной.

Теорема 1. Банахова пара (X_0, X_1) $\mathcal{K}$–монотонна с константой $C > 0$ тогда и только тогда, когда выполнено условие: если $x, y \in X_0 + X_1$ и выполнено (1), то для любого $\varepsilon > 0$ существует линейный оператор T, ограниченный в X_0 и X_1, такой, что

$$\max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \leq C + \varepsilon \quad \text{и} \quad Tx = y. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть X — точное интерполяционное пространство относительно пары (X_0, X_1), $x \in X$, $y \in X_0 + X_1$, и выполнено (1). Тогда по условию существует линейный оператор T со свойствами (2). По определению T ограничен в X и

$$\|T\|_{X \longrightarrow X} \leq \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|y\|_X = \|Tx\|_X \leq \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \|x\|_X \leq (C + \varepsilon)\|x\|_X.$$

Отсюда $y \in X$ и $\|y\|_X \leq (C + \varepsilon)\|x\|_X$, и $\mathcal{K}$–монотонность доказана.

Обратно, пусть (X_0, X_1) $\mathcal{K}$–монотонна с константой $C > 0$. Предположим, что для некоторых $x, y \in X_0 + X_1$ выполнено (1). Без ограничения общности считаем, что $x \neq 0$ (если $x = 0$, то все тривиально). Рассмотрим "орбиту" вектора x, то есть пространство, состоящее из всех $z = Tx$, где T — произвольный ограниченный оператор в X_i $(i = 0, 1)$ с нормой

$$\|z\|_Z = \inf\bigl\{ \max \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \bigr\}, \tag{3}$$

где точная нижняя грань берется по всем линейным операторам $T\colon X_i \longrightarrow X_i$ $(i = 0, 1)$ таким, что $z = Tx$. Тогда Z — точное интерполяционное пространство относительно (X_0, X_1).

Действительно, если $x = x_0 + x_1$, $x_i \in X_i$ $(i = 0, 1)$, то

$$z = Tx = Tx_0 + Tx_1, \quad Tx_i \in X_i \quad (i = 0, 1).$$

Можно заключить, что $z \in X_0 + X_1$, то есть $Z \subset X_0 + X_1$. Если $z \in X_0 \bigcap X_1$, то по теореме Хана–Банаха найдется линейный функционал $f \in (X_0 + X_1)^*$ такой, что $f(x) = 1$.

Определим линейный оператор соотношением

$$T'u = f(u)z.$$

Оператор T' определен на $X_0 + X_1$ и для $i = 0, 1$ справедливо

$$\|T'u\|_{X_i} = \|f(u)z\|_{X_i} = |f(u)|\, \|z\|_{X_i} \leq \|f\|_{(X_0+X_1)^*} \|z\|_{X_i} \|u\|_{X_i},$$

то есть $T'\colon X_i \longrightarrow X_i$ $(i = 0, 1)$ с нормой, не превосходящей $\|f\|_{(X_0+X_1)^*}\|z\|_{X_i}$. И, наконец, $T'x = z$.

В результате получаем, что $z \in Z$, то есть $X_0 \bigcap X_1 \subset Z$.

Пусть $A: X_i \longrightarrow X_i$ $(i = 0,1)$, тогда для любого $z \in Z$ и любого его представления $z = Tx$ $(T: X_i \longrightarrow X_i)$ имеем

$$Az = A(Tx) = (AT)x = T_1 x,$$

где $T_1 = AT: X_i \longrightarrow X_i$. Кроме того,

$$\|T_1\|_{X_i \longrightarrow X_i} \leq \|A\|_{X_i \longrightarrow X_i} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}.$$

Отсюда согласно определению (3)

$$\|Az\|_Z \leq \max \|T_1\|_{X_i \longrightarrow X_i} \leq \max \|A\|_{X_i \longrightarrow X_i} \max \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \quad (i = 0,1).$$

И, переходя к точной нижней грани по T, получим:

$$\|Az\|_Z \leq \max \|A\|_{X_i \longrightarrow X_i} \|z\|_Z \quad (i = 0,1).$$

В итоге получаем, что $A: Z \longrightarrow Z$ и $\|A\|_{Z \longrightarrow Z} \leq \max \|A\|_{X_i \longrightarrow X_i}$ $(i = 0,1)$.

Поэтому по определению Z является точным интерполяционным пространством относительно пары (X_0, X_1). В силу условия (1) и того факта, что $x \in Z$ $(x = Ix$, где I — тождественный оператор), имеем:

$$y \in Z \quad \text{и} \quad \|y\|_Z \leq C\|x\|_Z. \tag{4}$$

Покажем, что $\|x\|_Z = 1$. С одной стороны, $x = Ix$ и поэтому

$$\|x\|_Z \leq \max \|I\|_{X_i \longrightarrow X_i} = 1,$$

т.е. $\|x\|_Z \leq 1$.

С другой стороны, возьмем произвольный линейный оператор $T: X_i \longrightarrow X_i$ такой, что $Tx = x$. Тогда можно заключить, что

$$\|x\|_{X_i} = \|Tx\|_{X_i} \leq \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \|x\|_{X_i},$$

т.е.

$$\|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \geq 1 \quad (i = 0,1).$$

Следовательно, по определению нормы в Z находим, что $\|x\|_Z \geq 1$. Таким образом, $\|x\|_Z = 1$.

С помощью (4) получаем: $\|y\|_Z \leq C$, откуда ввиду определения нормы (3) для любого $\varepsilon > 0$ существует линейный оператор $T: X_i \longrightarrow X_i$ $(i = 0,1)$, удовлетворяющий условию (2). Теорема 1, следовательно, доказана.

Следствие 1. Если $X_0 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_0)$, $X_1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, то в теореме 1 можно положить $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Пространство L линейных операторов $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|T\| = \max \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}$ конечномерно. По теореме 1, если выполнено (1), то для значений $\varepsilon_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ найдется последовательность линейных операторов $\{T_n\}$ такая, что

$$\max_{i=0,1} \|T_n\|_{X_i \longrightarrow X_i} \leq C + \frac{1}{n}, \quad T_n x = y. \tag{5}$$

Последовательность $\{T_n\}$ ограничена в L и поэтому, в силу предкомпактности ограниченного множества в конечномерном пространстве, существуют подпоследовательность $\{T_{n_j}\} \subset \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ и линейный оператор $T \in L$ такие, что

$$\lim_{j \to \infty} \max_{i=0,1} \|T_{n_j} - T\|_{X_i \longrightarrow X_i} = 0. \tag{6}$$

Неравенство (6) можно переписать в следующем виде:

$$\max_{i=0,1} \|T_{n_j}\|_{X_i \longrightarrow X_i} \longrightarrow \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}.$$

Рассматривая далее неравенство (5) только при $n = n_j$ и переходя к пределу при $j \longrightarrow \infty$, получим:

$$\max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i} \leq C.$$

Из условий (5), (6), а также неравенства

$$\|y - Tx\| = \|T_{n_j}x - Tx\| \leq \|T_{n_j} - T\|\|x\|$$

получаем, что $y = Tx$, и следствие 1 доказано.

Лемма 1. Любая пара норм на $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{K}$–монотонна.

Доказательство. Пусть $X_0 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_0)$, $X_1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, а $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ — точное интерполяционное пространство относительно (X_0, X_1), x, $y \in \mathbb{R}^n$. Так как для любого $t > 0$ величина $\mathcal{K}(t, \cdot; X_0, X_1)$ — норма на $\mathbb{R}^n$, а все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, то из (1) следует:

$$C^{-1}\|y\|_X \leq \mathcal{K}(1, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(1, x; X_0, X_1) \leq C\|x\|_X,$$

где $C > 0$. Отсюда $\|y\|_X \leq C^2\|x\|_X$, и лемма 1 доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать n-мерные пространства Лоренца (сведения о функциональном пространстве Лоренца имеются в [4]).

Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, где x_i^* — перестановка модулей координат вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в невозрастающем порядке, то есть $x_1^* \geq x_2^* \geq \ldots \geq x_n^* \geq 0$. Для "весовой" последовательности $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n \geq 0$ через $\lambda^n(w)$ будем обозначать $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{\lambda^n(w)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* w_i.$$

Как обычно, l_∞^n — это пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{l_\infty^n} = \max_{i=1,n} |x_i|$.

Лемма 2. Пусть $x = u + v$ $(u, v \in \mathbb{R}^n)$, $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$. Тогда для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{k} c_i u_i^* + \sum_{i=1}^{k} c_i v_i^*.$$

Доказательство. Напомним, что для любых наборов чисел $a = (a_i)_{i=1}^m$, $b = (b_i)_{i=1}^m$ справедливо известное преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_m b_m,$$

где $A_k = \sum_{i=1}^{m} a_i$ $(1 \leq k \leq m)$. С помощью приведенной формулы нетрудно показать, что при условии $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$

$$\sup \sum_{i=1}^{k} c_i b_i = \sum_{i=1}^{k} c_i a_i^* \ \ (1 \leq k \leq m),$$

где точная верхняя грань берется по всем $b = b_{i\,i=1}^{k}$ таким, что $b^* = a^*$. Поэтому, выбирая перестановку $\pi(i)$ чисел $1, 2, \dots, n$ такую, что $x^*{}_i = |x_{\pi(i)}|$, получим:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x^*{}_i = \sum_{i=1}^{k} c_i |x_{\pi(i)}| \leq \sum_{i=1}^{k} c_i |u_{\pi(i)}| + \sum_{i=1}^{k} c_i |v_{\pi(i)}| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} c_i u_i^* + \sum_{i=1}^{k} c_i v_i^*.$$

Лемма 2 доказана.

Для удобства введем обозначения

$$\sum_{j=1}^{i} w_j = \delta_i, \quad \sum_{j=1}^{i} x_j^* w_j = \Delta_i.$$

Теорема 2. Для любых $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n > 0$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right) = \begin{cases} t x_1^*, & 0 < t \leq \delta_1; \\ \Delta_i + (t - \delta_i) x_{i+1}^*, & \delta_i < t \leq \delta_{i+1}; \\ \Delta_n, & t > \delta_n. \end{cases}$$

Доказательство. Можно считать, что $x = x^*$. Рассмотрим различные возможные случаи:

1) $0 < t \leq w_1$. По определению $\mathcal{K}$–функционала

$$\mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right) \leq t \|x\|_{l_\infty^n} = t \max_{i=1,n} |x_j| = t x_1.$$

Для доказательства противоположного неравенства воспользуемся определением $\mathcal{K}$–функционала и леммой 2. Возьмем любое разложение $x = u + v$, где $u, v \in \mathbb{R}^n$. Так как $x_1 \leq u_1^* + v_1^*$, то

$$t x_1 \leq t u_1^* + t v_1^* \leq w_1 u_1^* + t \max_{i=1,n} |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^* w_i^* + t \|v\|_{l_\infty^n} = \|u\|_{\lambda^n(w)} + t \|v\|_{l_\infty^n}.$$

Откуда следует требуемое неравенство;

2) $\sum_{j=1}^{i} w_j < t \leq \sum_{j=1}^{i+1} w_j$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

Пусть e_k $(k = 1, \dots, n)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n-1$ определим векторы

$$u^0 = \sum_{j=1}^{i} (x_j - x_{i+1}) e_j, v^0 = x - u^0 = x_{i+1} \sum_{j=1}^{i} e_j + \sum_{j=i+1}^{n} x_j e_j.$$

Тогда заключаем, что

$$\mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right) \leq \|u^0\|_{\lambda^n(w)} + t \|v^0\|_{l_\infty^n} = \sum_{j=1}^{i} (x_j - x_{i+1}) w_j + t x_{i+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} x_j w_j + \left(t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) x_{i+1}.$$

Покажем справедливость противоположного неравенства. Для этого воспользуемся определением $\mathcal{K}$–функционала и леммой 2.

Возьмем произвольное разложение $x = u + v$, где $u,\, v \in \mathbb{R}^n$, тогда на основании леммы 2 имеем

$$\sum_{j=1}^{i} x_j^* w_j + \left(t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) x_{i+1}^* \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{i} u_j^* w_j + \left(t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) u_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{i} v_j^* w_j + \left(t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) v_{i+1}^* \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} u_j^* w_j + v_1^* \left(\sum_{j=1}^{i} w_j + t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) = \|u\|_{\lambda^n(w)} + t\|v\|_{l_\infty^n}.$$

Поэтому справедливо неравенство:

$$\sum_{j=1}^{i} x_j^* w_j + \left(t - \sum_{j=1}^{i} w_j\right) x_{i+1}^* \le \mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right);$$

3) $t > \sum_{j=1}^{n} w_j$. Тогда, представив вектор x в виде $x = x + 0$ и воспользовавшись определением $\mathcal{K}$–функционала, получим

$$\mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right) \le \|x\|_{\lambda^n(w)} = \sum_{j=1}^{n} x_n^* w_j.$$

Для доказательства противоположного неравенства заметим, что для любого $y \in \mathbb{R}^n$ верно неравенство:

$$\|y\|_{\lambda^n(w)} \le \left(\sum_{j=1}^{n} w_j\right) \|y\|_{l_\infty^n}.$$

Пусть $x = u + v$ — разложение вектора x, тогда

$$\|u\|_{\lambda^n(w)} + t\|v\|_{l_\infty^n} \ge \|u\|_{\lambda^n(w)} + \sum_{j=1}^{n} w_j \|v\|_{l_\infty^n} \ge$$

$$\ge \|u\|_{\lambda^n(w)} + \|v\|_{\lambda^n(w)} \ge \|u + v\|_{\lambda^n(w)} = \|x\|_{\lambda^n(w)}.$$

Поэтому по определению $\mathcal{K}$–функционала

$$\|x\|_{\lambda^n(w)} \le \mathcal{K}\left(t, x; \lambda^n(w), l_\infty^n\right)$$

и теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если пара $(\lambda^n(w), l_\infty^n)$ является точной $\mathcal{K}$–монотонной, то

$$w_n > 0. \tag{7}$$

Доказательство. При доказательстве этой теоремы была использована идея примера из работы [5]. Предположим, что утверждение теоремы не верно, т.е. $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_i = \ldots = w_n = 0$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $i = n$:

$$w_{n-1} > 0, \quad w_n = 0. \tag{8}$$

Покажем, что при выполнении условия (8) пара $(\lambda^n(w), l_\infty^n)$ не будет точной $\mathcal{K}$–монотонной. Для этого достаточно найти два вектора $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\mathcal{K}\left(t, x^0; \lambda^n(w), l_\infty^n\right) = \mathcal{K}\left(t, y^0; \lambda^n(w), l_\infty^n\right),$$

но для произвольного линейного оператора $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ со свойством $Tx^0 = y^0$

$$\max\{\|T\|_{\lambda^n(w)\to\lambda^n(w)}, \|T\|_{l_\infty^n\to l_\infty^n}\} > 1. \tag{9}$$

Положим,что

$$x^0 = (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1), \quad y^0 = (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1).$$

Учитывая теорему 2 и то, что $(x^0)_i^* = (y^0)_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, заключаем: $\mathcal{K}\left(t, x^0\right) = \mathcal{K}\left(t, y^0\right)$. Предположим, что существует линейный оператор $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\max\left(\|T\|_{\lambda^n(w)\to\lambda^n(w)}, \|T\|_{l_\infty^n\to l_\infty^n}\right) \leq 1, \quad Tx^0 = y^0. \tag{10}$$

Известно, что

$$\|T\|_{l_\infty^n\to l_\infty^n} = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |t_{ij}|,$$

где $(t_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица, которая определяет оператор T. Тогда на основании (10) при всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^n |t_{ij}| \leq 1. \tag{11}$$

Равенство $y^0 = Tx^0$ приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} nt_{1,1} + (n-1)t_{1,2} + \ldots + t_{1,n} = n, \\ \vdots \\ nt_{n-1,1} + (n-1)t_{n-1,2} + \ldots + t_{n,n} = 2, \\ nt_{n,1} + (n-1)t_{n,2} + \ldots + t_{n,n} = 2. \end{cases} \tag{12}$$

Представим выражение $nt_{1,1} + (n-1)t_{1,2} + \ldots + t_{1,n}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &nt_{1,1} + (n-1)t_{1,2} + \ldots + t_{1,n} = \\ &\qquad = (t_{1,1} + t_{1,2} + \ldots + t_{1,n}) + (t_{1,1} + \ldots + t_{1,n-1}) + \ldots + (t_{1,1} + t_{1,2}) + t_{1,1}. \end{aligned}$$

Согласно (11) каждая скобка не превосходит единицы, следовательно, $t_{1,1} = 1$. Но тогда, снова используя неравенство (11) при $i = 1$, получим:

$$|t_{1,1}| + |t_{1,2}| + \ldots + |t_{1,n}| = 1 + |t_{1,2}| + \ldots + |t_{1,n}| \leq 1,$$

откуда

$$t_{1,2} = t_{1,3} = \ldots = t_{1,n} = 0.$$

Обозначим $u = Te_1 = (1, t_{2,1}, \ldots, t_{n,1})$, тогда в силу (10) имеем

$$\|u\|_{l^n{}_\infty} \leq \|e_1\|_{l^n{}_\infty} = 1.$$

Введем в рассмотрение вектор $u^* = (1, u_2^*, u_3^*, \ldots, u_n^*)$, где u_i^* — перестановка модулей координат вектора в невозрастающем порядке. Используя оценку (10), получим

$$\|u\|_{\lambda^n(w)} \leq \|e_1\|_{\lambda^n(w)} = w_1,$$

т.е. $w_1 + w_2 u_2^* + \ldots w_{n-1} u_{n-1}^* \leq w_1$. В силу последнего неравенства и того, что $u_i^* \geq 0$, получаем

$$t_{2,1} = \ldots = t_{n,1} = 0.$$

Применяя те же рассуждения к остальным уравнениям системы (12), получим

$$\begin{cases} t_{2,2} = 1, t_{2,1} = t_{2,3} = \ldots = t_{2,n} = 0, \\ \vdots \\ t_{n-1,n-1} = 1, t_{n-1,2} = \ldots = t_{n-1,n} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, из последнего уравнения (12) находим $t_{n,n} = 2$, но тогда $Te_n = (0, 0, \ldots, 0, 2)$, что противоречит (10). Итак, теорема 3 доказана.

Литература

[1] Calderon A.P. Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkievich// Studia Math. 1966. V.26, No.3. P. 273–299.

[2] Митягин Б.С. Интерполяционная теорема для модулярных пространств// Матем. сб. 1965. Т.66, № 4. С. 473–482.

[3] Рудин У. Функциональный анализ. М.:Мир, 1975, 460 с.

[4] Седаев А.А., Семенов Е.М. О возможности описания интерполяционных пространств в терминах $\mathcal{K}$–метода Петре/ Оптимизация, Вып. 4 (21). Новосибирск, 1971. С. 98–114.

ON $\mathcal{K}$–MONOTONIC COUPLES IN FINITE DIMENSIONAL SPACES

© 2001 R.P. Uzbeckov[2]

The problems related to the description of some $\mathcal{K}$–monotonic couples in finite dimensional spaces are considered. Well-known the Calderon–Mityagin theorem is generalized on the Lorentz spaces.

[2]Roman Phatikhovich Uzbeckov, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia

If $w_1 \geq ... w_n \geq 0$ then the finite dimensional Lorentz space $\lambda^n(w)$ is the space $\mathbb{R}^n$ with the norm

$$\|x\|_{\lambda^n(w)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* w_i.$$

We give the formula for the $\mathcal{K}$–functional of the couple $(\lambda^n(w), l_\infty^n)$. We obtain a sufficient condition of the $\mathcal{K}$–monotony of spaces of this class: if $(\lambda^n(w), l_\infty^n)$ is a precise $\mathcal{K}$–monotonic couple then $w_n > 0$.

Поступила в редакцию 06/*II*/2001;
в окончательном варианте — 19/*VI*/2001.