*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.983

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВ $L^1[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ И $L^1[0,\infty)+L^\infty[0,\infty)$

© 2001 С.Я. Новиков[1]

Доказано, что не существует симметричного функционального пространства (*СФП*) $E$ на $[0,1]$, которое изоморфно пространству $L^1[0,\infty)\cap L^\infty[0,\infty)$ или пространству $L^1[0,\infty)+L^\infty[0,\infty)$.

Кроме того, доказано, что оператор вложения

$$L^1[0,\infty)\cap L^\infty[0,\infty)\hookrightarrow E[0,\infty)$$

строго сингулярен для любого рефлексивного *СФП* $E$. Построен пример, который показывает, что условие рефлексивности существенно.

## 1. Обозначения, определения и предварительные сведения

Оператором мы называем ограниченный линейный оператор, подпространства предполагаются замкнутыми. Подпространство банахова пространства называется *дополняемым*, если оно является образом непрерывного проектора (см. [1], гл. 5).

Будем рассматривать симметричные функциональные пространства *(СФП)* как банаховы, так и квазибанаховы. Квазибанахово *СФП* — это полное квазинормированное векторное пространство $(E,\|\cdot\|)$ измеримых функций на $[0,1]$ или $[0,\infty)$ такое, что $\|\chi_A\|=1$, если $\operatorname{mes} A=1$, и если $g\in E$, то $f\in E$ и $\|f\|\le\|g\|$, если $f$ — измеримая функция такая, что $f^*\le g^*$, где $h^*$ обозначает неубывающую перестановку функции $|h|$ (см. [2], гл. 2), $\chi_A$ — характеристическая функция измеримого множества $A$.

Квазинормой называется функционал, который удовлетворяет ослабленным аксиомам нормы с заменой неравенства треугольника на неравенство

$$\|x+y\|\le K(\|x\|+\|y\|)$$

с некоторым $K\ge 1$.

Оператор $T$ между двумя квазибанаховыми пространствами $X$ и $Y$ называется *строго сингулярным (SS) (или оператором Като)*, если он не является изоморфизмом ни на одном из бесконечномерных подпространств пространства $X$. Класс таких операторов образует замкнутый операторный идеал [3].

[1]Новиков Сергей Яковлевич, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; nvks@ssu.samara.ru

Оператор $T$ между квазибанаховой решеткой $X$ и квазибанаховым пространством $Y$ называется *дизъюнктно строго сингулярным (DSS)*, если не существует дизъюнктной последовательности ненулевых векторов $(x_n)$ в $X$ такой, что сужение $T$ на подпространство $[x_n]$, порожденное векторами $(x_n)$, является изоморфизмом. *DSS* операторы были введены в [4].

Очевидно, каждый *SS* оператор является *DSS*. Обратное, вообще говоря, неверно (например, оператор канонического вложения $L^p[0,1] \hookrightarrow L^q[0,1]$, для $0 < q < p < \infty$ является *DSS*, но не является *SS*). Класс $DSS$ операторов не является двусторонним операторным идеалом, он не устойчив по отношению к умножению справа.

Как известно [2], для произвольного банахова *СФП* $E$ имеют место непрерывные вложения:

a) на отрезке $[0,1]$ :

$$L_\infty \subset E \subset L_1;$$

b) на полупрямой $[0,\infty)$ :

$$L_\infty \bigcap L_1 \subset E \subset L_\infty + L_1.$$

Здесь и в дальнейшем через $L_p$ обозначены классические лебеговы пространства.

Позднее было доказано, что оператор вложения $E \hookrightarrow L_1$ банахова *СФП* $E$ на $[0,1]$, ($E \neq L^1$ как множества) в $L_1$ является *DSS* [5], а оператор вложения из $L^\infty$ в $E$ является *SS* для любого банахова *СФП* $E$, отличного от $L^\infty$ [6]. Последнее утверждение является обобщением теоремы Гротендика о строгой сингулярности вложения $L^\infty \hookrightarrow L^p$, $1 \le p < \infty$ (см. [1], гл. 5).

Оператор вложения $E \hookrightarrow L_1$ не является, вообще говоря, строго сингулярным, это можно заметить и при рассмотрении вложения $L_p \hookrightarrow L_1$, $p > 1$. Во всей шкале пространств $L_p$ есть "сквозные" бесконечномерные подпространства, наиболее известным из которых является подпространство, порожденное системой функций Радемахера [7].

Опубликованная в 2000 г. работа [8], в которой получено полное описание *СФП* со свойством Данфорда–Петтиса, позволила получить частичные аналоги перечисленных выше результатов для оператора вложения на полуоси. Говорят, что банахово пространство $X$ обладает *свойством Данфорда–Петтиса*, если каждый слабо компактный оператор, определенный на $X$, переводит слабо компактные множества в сильно компактные; сокращенная запись такова: $X \in (\mathcal{DP})$[9].

## 2. Изоморфизмы симметричных функциональных пространств на отрезке и на полупрямой

**Теорема 2.1** (см. [10], с. 102). Пространства $L_p[0,\ 1]$ и $L_p[0,\ \infty)$ линейно изометричны для каждого $0 < p \le \infty$.

**Доказательство.** Построение изометрии осуществляется в явном виде.

Пусть $\Delta_k = [1/(k+2), 1/(k+1)]$ и пусть $\sigma_k$ — аффинное отображение $\Delta_k$ на $[k, k+1]$. Оператор

$$T : f(t) \in L_p[0,\infty) \longrightarrow g(x) = \frac{f(\sigma_k\, x)}{|\Delta_k|^{1/p}} \qquad (x \in \Delta_k),$$

линейно изометрически отображает $L_p[0,\infty)$ на $L_p[0,1]$.

В случае $p = \infty$ функция $g(x)$ определяется следующим образом:

$$g(x) = f(\sigma_k x) \qquad (x \in \Delta_k)$$

что и завершает доказательство.

В связи с теоремой 2.1 в работе [10] поставлен вопрос: может ли симметричное пространство $E$ измеримых функций на $[0,1]$, отличное от $L_p$, $1 \le p \le \infty$, быть изоморфно какому-либо симметричному пространству $\tilde{E}$ измеримых функций на полуоси $[0,\infty)$?

Этот вопрос является предметом многочисленных исследований. Наиболее полное отражение результаты, полученные на эту тему к концу 70-х гг., нашли в монографии [11]. Однако и после ее выхода в свет многие вопросы остались без ответа. Исследования в этом направлении активно продолжаются и в настоящее время.

Рассмотрим, например, пространства Лоренца $L_{p,q}$, которые являются естественным расширением шкалы пространств $L_p$.

Определяем их на произвольном пространстве $(\mathcal{J},\nu)$ с $\sigma$-конечной мерой $\nu$ так, чтобы элементами этих пространств могли быть как измеримые функции, так и числовые последовательности. Итак, пусть $(\mathcal{J},\nu)$ — пространство с полной $\sigma$-конечной положительной мерой $\nu$, $L_\circ(\mathcal{J},\nu)$ — пространство всех измеримых почти всюду конечных функций:

$$L_{p,q}(\mathcal{J},\nu) = \{x \in L_\circ(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \left[\int\limits_0^{\nu(\mathcal{J})} (x^*(t))^q \, d(t^{q/p})\right]^{1/q} < \infty\}, \quad \text{если} \quad q < \infty;$$

$$L_{p,\infty}(\mathcal{J},\nu) = \{x \in L_\circ(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathcal{J})} x^*(t)\, t^{1/p} < \infty\}.$$

Здесь $x^*(t)$ обозначает невозрастающую перестановку функции $|x(t)|$, то есть

$$x^*(t) = \inf\left(\tau : d_x(\tau) < t\right),$$

где $d_x(\tau) = \nu(t : |x(t)| > \tau)$.

При $p = q$ пространства $L_{p,q}$ и $L_p$ совпадают; если $q_1 < q_2$ , то $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$. Пространства $L_{p,q}(\mathbb{N})$, построенные на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, (их элементами являются числовые последовательности), принято обозначать $l_{p,q}$. Эти пространства хорошо известны (см. [12], гл. 5).

**Теорема 2.2.** Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$. Пространства $L_{p,q}[0,1]$ и $L_{p,q}[0,\infty)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $p = q$. Пространства $L_{p,\infty}[0,\,1]$ и $L_{p,\infty}[0,\infty)$ изоморфны.

**Доказательство.** Если пространство $H$ с симметричным базисом изоморфно дополняемому подпространству $L_{p,q}[0,\,1]$, то $H = l_q$ или $H = l_2$ (см. лемма 8.10 [11]).

С другой стороны, пространство $L_{p,q}[0,\,\infty)$ содержит дополняемую копию пространства $l_{p,q}$, порожденную нормированными дизъюнктными функциями. Пространство $l_{p,q}$ неизоморфно ни $l_q$, ни $l_2$, если $p \ne q$, поэтому изоморфизм пространств $L_{p,q}[0,\,1]$ и $L_{p,q}[0,\infty)$ возможен лишь в случае $p = q$.

Если $p = q$, то пространства $L_{p,q}$ совпадают с пространствами $L_p$, и изоморфизм имеет место в силу теоремы 1.

Изоморфизм пространств $L_{p,\infty}[0,1]$ и $L_{p,\infty}[0,\infty)$ установлен в [13]. Теорема, таким образом, доказана.

Теперь докажем результат, который устанавливает единственность симметричной структуры "крайних" банаховых *СФП* на полуоси.

**Теорема 2.3.** Не существует *СФП* пространства $E$ на $[0,1]$ , которое изоморфно пространству $L^1 \bigcap L^\infty$, или пространству $L^1 + L^\infty$.

**Доказательство.** Пространства $L^1 \bigcap L^\infty$ и $L^1 + L^\infty$ имеют свойство Данфорда-Петтиса [8], которое сохраняется при изоморфизмах. На $[0,1]$ только два пространства, $L^\infty$ и $L^1$ имеют $(\mathcal{DP})$-свойство [6].

Пространства $L^1 \bigcap L^\infty$ и $L^1 + L^\infty$ несепарабельны (см. гл. 2, пар. 3 [2]). Поэтому пространство $L^1$ отпадает в силу сепарабельности. Покажем, что $L^\infty$ не изоморфно $L^1 \bigcap L^\infty$. Пространство $L^1 \bigcap L^\infty$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное $l_1$ (порождено системой $\chi_{[n-1,n)}$), а в $L^\infty$ каждое бесконечномерное дополняемое подпространство содержит изоморфную копию $c_\circ$ (теор. II.4.33 [9]), где $c_\circ$ обозначает классическое пространство числовых последовательностей, сходящихся к нулю. Если допустить, что пространства $L^1 \bigcap L^\infty$ и $L^\infty$ изоморфны, то получим, что пространство $l_1$ содержит подпространство, изоморфное $c_\circ$. Но это невозможно, так как пространство $l_1$ и все его подпространства слабо полны, а $c_\circ$ таковым не является (теор. X.4.9 [14]).

Покажем что $L^\infty$ не изоморфно $L^1 + L^\infty$. Пространство $L^1 + L^\infty$ содержит дополняемое $L^1[0,1]$ (проектор $Px = x\chi_{[0,1]}$ ), а, следовательно, и дополняемое $l_1$, этого не может быть, как показано выше. Теорема, следовательно, доказана.

## 3. Строгая сингулярность вложения $L^1[0,\infty) \bigcap L^\infty[0,\infty)$ в рефлексивное *СФП*

Теорема, которая будет доказана в этом разделе, проясняет роль свойства Данфорда–Петтиса в этом круге вопросов.

**Теорема 3.1.** Пусть $E_1$, $E_2$ — *СФП* на $[0,1]$ или на $[0,\infty)$. Если $E_1 \subset E_2$, $E_1 \in (\mathcal{DP})$, а $E_2$ рефлексивно, то вложение $E_1 \hookrightarrow E_2$ строго сингулярно.

**Доказательство.** В силу рефлексивности пространства $E_2$, оператор вложения $I : E_1 \subset E_2$ слабо компактен. Если $H$ — подпространство $E_2$ и $H \subset E_1$, то $H$ рефлексивно и, следовательно, единичный шар $B_H$ слабо компактен в $E_1$. Так как $E_1 \in (\mathcal{DP})$, то образ единичного шара $I(B_H)$ компактен в $E_2$. По классической теореме Ф. Рисса получаем, что $\dim H < \infty$. Теорема, следовательно, доказана.

**Следствие 3.1.** Пространство $L^1[0,\infty) \bigcap L^\infty[0,\infty)$ строго сингулярно вложено в любое рефлексивное банахово симметричное пространство функций $E[0,\infty)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $L^1 \bigcap L^\infty \in (\mathcal{DP})$ [8].

Важными числовыми характеристиками симметричного функционального пространства являются индексы Бойда, которые определяются с помощью оператора растяжения. Если $I = [0,\, \infty)$, то полагаем для измеримой функции $f$ на $I$

$$(D_s f)(t) = f(t/s), \quad 0 < s < \infty, \quad 0 \le t < \infty.$$

Если $I = [0,\, 1]$, то полагаем для измеримой $f$ на $I$ и для $0 < s < \infty$

$$(D_s f)(t) = \begin{cases} f(t/s), & t \le \min(1,s), \\ 0, & s < t \le 1 \quad (\text{если } s < 1). \end{cases}$$

Оператор $D_s$ ограничен в любом банаховом симметричном пространстве, причем $\|D_s\|_{E\to E} \le \max(1,s)$.

Индексами Бойда пространства $E$ называют числа

$$p_E = \lim_{s\to\infty} \frac{\log s}{\log \|D_s\|} = \sup_{s>1} \frac{\log s}{\log \|D_s\|},$$

$$q_E = \lim_{s \to +0} \frac{\log s}{\log \|D_s\|} = \inf_{0<s<1} \frac{\log s}{\log \|D_s\|}.$$

Если $E$ — банахово симметричное функциональное пространство, то справедливы неравенства (см. нер. 2.b.1, 2.b.2 [7]):

$$1 \le p_E \le q_E \le \infty.$$

**Следствие 3.2.** Если $E$ — пространство Орлича [15] с $1 < p_E \le q_E < \infty <$, то вложение $L^1 \bigcap L^\infty \subset E$ строго сингулярно.

Действительно, из условия следует рефлексивность пространства Орлича (см. теор. 5.8 [16], теор. 7.2 [2]).

**Замечания.** 1) ранее было известно, что в условиях следствия 2 вложение *дизъюнктно* строго сингулярно ([17], cor 4.10);

2) условие рефлексивности в следствиях 1, 2 существенно. Например, вложение

$$L^1[0,\infty) \bigcap L^\infty[0,\infty) \subset L^1[0,\infty)$$

не является даже дизъюнктно строго сингулярным. Это утверждение можно обосновать подпространством, натянутым на функции $\chi_{[n,\,n+1)}$, которое изоморфно $l_1$ и замкнуто в обоих пространствах.

## Литература


[1] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.

[2] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

[3] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. 536 с.

[4] Hernandez F.L. Disjointly Strictly Singular Operators in Banach Lattices// Acta Univ. Carolinae – Math. et Phys. 1990. V. 31, No.2. P. 35–40.

[5] Новиков С.Я. Свойства оператора вложения между СФП на пространствах с конечной и $\sigma$-конечной мерой// Труды II Международного семинара "Дифференциальные уравнения и их приложения". Самара, 1998. С. 122–128.

[6] Новиков С.Я. Об особенностях оператора вложения СФП на $[0,1]$// Математические заметки. 1997. Т.62 № 4. С. 549–556.

[7] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, II. Ergebnisse der Math. V.97. Berlin: Springer, 1979. 243 pp.

[8] Kaminska A., Mastylo M. The Dunford-Pettis property for symmetric spaces// Canad. J. Math. 2000. V.52, No.4. P. 789–803.

[9] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Lect. Notes Math. V.338. Berlin: Springer, 1973. 243 pp.

[10] Митягин Б.С.Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства// Успехи матем. наук. 1970. Т.XXV, № 5. С. 63–106.

[11] Johnson W.B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L. Symmetric structures in Banach spaces. Memoirs AMS. 1979. V.217. 335 pp.

[12] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 331 с.

[13] Leung D.H. Isomorphism of certain weak $L_p$-spaces// Studia Math. 1993. V.104, No.2. P. 151–160.

[14] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
[15] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
[16] Boyd D.W.The Hilbert tranform on RIS// Canad. J. Math. 1967. V.19, No.3. P. 599–616.
[17] Amo A.G. del, Hernandez F.L., Ruiz C. Disjointly strictly singular operators and interpolation// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 1996. V.A 126. P. 1011–1026.

# THE UNIQUENESS OF THE SYMMETRIC STRUCTURE OF THE SPACES $L^1[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ AND $L^1[0,\infty)+L^\infty[0,\infty)$

© 2001 S.Ya. Novikov[2]

It is proved, that there is no rearrangement invariant space (*RIS*) $E$ on $[0,1]$, isomorphic to the space $L^1[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ or to the space $L^1[0,\infty)+L^\infty[0,\infty)$.

Besides it's shown, that the inclusion map

$$L^1[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)\hookrightarrow E[0,\infty)$$

is strictly singular for each reflexive *RIS* $E$. The example given shows that the reflexivity condition is essential.

Поступила в редакцию $14/IV/2001$;
в окончательном варианте — $5/VI/2001$.

[2]Novikov Sergei Yakovlevitsch, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia; nvks@ssu.samara.ru