МАТЕМАТИКА

УДК 517.98.22

ЕЩЕ ОДНО УСЛОВИЕ ГИЛЬБЕРТОВОСТИ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

© 2001 В.А. Кушманцева[1]

Содержанием настоящей статьи является теорема, в которой доказано новое достаточное условие гильбертовости равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства; проверка этого условия проще известного равенства параллелограмма. В качестве техники используется теория пространств с полускалярным произведением Г.Люмера.

Доказанный в статье результат формулируется следующим образом: если дуальное отображение равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства переводит сегменты в выпуклые множества, то пространство — гильбертово.

Среди множества характеристик гильбертова пространства наиболее цитируемой является теорема Какутани [1], однако в данной статье уместно напомнить, что вышеназванная теорема в действительности есть переформулировка свойства *квазивыпуклости* Канторовича [2], которое можно понимать как свойство оптимальности всех конечномерных подпространств: для всякой системы элементов $x_1, \ldots, x_n$ и элемента $x_0 \in X$, не принадлежащего линейной оболочке $L(x_1, \ldots x_n)$, найдется элемент $\bar{x}_0$ вида: $\bar{x}_0 = c_1x_1 + \ldots c_nx_n$ такой, что $\|x_1 - \bar{x}_0\| \leq \|x_1 - x_0\|, \ldots, \|x_n - \bar{x}_0\| \leq \|x_n - x_0\|$.

При решении конкретных задач функционального анализа более удобной является, конечно, характеристика [2], поскольку она сводится к проверке некоторых неравенств для норм элементов пространства. Вообще, метрические характеристики предпочтительнее, именно поэтому большое количество характеристик пространств со скалярным произведением сформулировано в терминах метрических проекторов (небольшой список таких работ можно найти в статье [3], включая и саму ее характеристику).

Сформулируем необходимые для дальнейшего определения и факты.

Обозначим через X линейное нормированное пространство над полем вещественных чисел, S — единичная сфера в X, X^* — сопряженное к X, $J(x)$ — множество функционалов, достигающих норму на элементе $x \in X$:

$$J(x) = \{f \in X^*: f(x) = \|x\|^2, \ \|f\| = \|x\|\}.$$

[1]Кушманцева Вероника Асасовна, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; kouchmantseva@ssu.samara.ru

Пусть J — *дуальное отображение,* сопоставляющее каждому $x \in X$ его опорное множество $J(x)$. Через $x \to f_x$ будем обозначать каждое отдельное сечение дуального отображения и будем называть его *опорным отображением.* Говорят, что пространство X *гладко в точке* $x \in S$, если множество $J(x)$ содержит только один элемент: $J(x) = \{f_x\}$.

Говорят, что норма пространства X:

(i) *слабо (в смысле Гато) дифференцируема в точке* $x \in S$, если для вещественных λ предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

существует для всех $y \in S$;

(ii) *строго (в смысле Фреше) дифференцируема в точке* $x \in S$, если сходимость к пределу в пункте (i) равномерна для всех $y \in S$;

(iii) *равномерно строго (равномерно по Фреше) дифференцируема,* если сходимость к пределу в (i) равномерна для всех $(x, y) \in S \times S$.

Пространство X *равномерно гладко,* если для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x \in S$

$$\|x + y\| + \|x - y\| < 2 + \varepsilon \|y\|,$$

если $\|y\| < \delta$.

Пространство X *равномерно выпукло,* если для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для x, $y \in S$, $\|x - y\| < \varepsilon$, если $\|x + y\| > 2 - \delta$.

Если $A \subset X$, то *метрический проектор* на A — это множественнозначное отображение, сопоставляющее каждому элементу (возможно, пустое) множество его лучших аппроксимаций в A: $P_A x = \{y \in A \colon \|x - y\| = d(x, A)\}$. Если X — гильбертово пространство и A — замкнутое подпространство в X, то P_A — это ортопроектор на A. Последний (известный автору этой статьи) результат в этом направлении — работа [4], где метрические проекторы определяются только для подпространств, и нулевой элемент обязательно является одним из ближайших элементов в подпространстве, но зато все конструкции приобретают геометрическую наглядность; в частности, квазиортогональное множество к подпространству — это множество ортогональных элементов n к Y: $\|n\| \leq \|n + ty\|, t$ — константа (см. утверждение 1 в работе 4]).

В работе [4] в терминах квазиортогональных множеств приведены критерии гильбертовости пространства, обобщающие теорему Какутани.

В данной работе используется техника теории пространств с полускалярным произведением Люмера [5].

Пусть X — комплексное (вещественное) векторное пространство. Будем говорить, что на X определено комплексное (вещественное) *полускалярное произведение,* и X является пространством с полускалярным произведением, если произвольным $x, y \in X$ поставлено в соответствие комплексное (вещественное) число $[x, y]$, причем выполнены следующие соотношения:

(1) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;

(2) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$, $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y]$ для x, y, $z \in X$, λ — комплексное (вещественное) число;

(3) $[x, x] > 0$ для $x \neq 0$;

(4) $|[x, y]|^2 \leq [x, x] \cdot [y, y]$.

Значение введенного понятия показывает следующее утверждение (см. теорему 2 в работе [5]).

Утверждение 1. Пространство с полускалярным произведением является нормированным с нормой, равной $\sqrt{[x,x]}$. С другой стороны, всякое нормированное пространство может быть превращено в пространство с полускалярным произведением (вообще говоря, бесчисленным множеством способов).

Укажем способ построения полускалярного произведения. Пусть X — линейное нормированное пространство. Для любого $x \in X$ по теореме Хана–Банаха найдется, по меньшей мере, один (и мы выберем в точности один) функционал $f_x \in J(x)$. Легко видеть, что формула

$$[x,y] = f_y(x), \quad f_y \in J(y) \tag{1}$$

определяет полускалярное произведение со свойствами (1)–(4) (обратное тоже справедливо). Например, в пространствах $L^p(\Omega, \Sigma\mu)$, $1 \leq p < \infty$, как нетрудно проверить, для функции $x \in L^p$ дуальная ей функция $f_x \in Lq, 1/p + 1/q = 1$ имеет вид

$$f_x = \operatorname{sgn} x|x|^{p-1}\|x\|^{2-p}.$$

Тогда правая часть формулы (1) задается соответствующим интегралом.

Всюду в дальнейшем будем считать, что топология нормированного пространства индуцирована нормой $\sqrt{[x,x]}$.

Выясним теперь, когда пространство с полускалярным произведением является гильбертовым.

Утверждение 2. Гильбертово пространство H может быть превращено в пространство с полускалярным произведением единственным способом; полускалярное произведение является скалярным в том и только в том случае, если индуцированная им норма удовлетворяет закону параллелограмма.

Отметим, что выполнение для нормы пространства закона параллелограмма означает линейность полускалярного произведения по второй переменной, или, что то же, аддитивность опорного отображения: $f_{x+y} = f_x + f_y$; в обоих случаях такое возможно только для гильбертова пространства.

В данной статье приводится одно достаточное условие для того, чтобы нормированное пространство было гильбертовым. На пространство наложены ограничения равномерной выпуклости и равномерной гладкости. *Отрезком* в X называется множество $I = [x,y] = \{u = ty + (1-t)x, t \in [0,1]\}$.

Теорема. Пусть X — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство над полем $\mathbb{R}$, $J\colon X \to X^*$ — его дуальное отображение. Если образ любого отрезка из X при отображении J является выпуклым множеством, то X — гильбертово пространство.

В качестве комментария к условию теоремы отметим, что знание дуального отображения обязательно для понимания геометрии конкретного пространства, и исследование любого нового нормированного пространства начинается с отыскания функционалов, достигающих норму на элементах пространства. Тогда доказанная ниже теорема позволяет легко ответить на вопрос о гильбертовости пространства. При этом проверка условия теоремы не сложнее закона параллелограмма из утверждения 2. Например, для пространства L^p при $p \neq 2$ $J(I)$ не является выпуклым множеством: $\forall t \in [0;1]$ справедливо

$$tf_x + (1-t)f_y \neq f_{tx+(1-t)y},$$

т.к.

$$\operatorname{sgn} x|x|^{p-1}\|x\|^{2-p} + (1-t)\operatorname{sgn} y|y|^{p-1}\|y\|^{2-p} \neq$$
$$\neq \operatorname{sgn}(tx + (1-t)y)|tx + (1-t)y|^{p-1}\|tx + (1-t)y\|^{2-p}.$$

Однако последнее неравенство обращается в равенство при $p = 2$.

Подчеркнем еще раз, что на нормированном пространстве X может быть много полускалярных произведений в зависимости от мощности множества $J(x)$, $x \in X$; нормированное пространство превращается в пространство с полускалярным произведением единственным способом лишь в том случае, если пространство X гладко. В своей работе мы считаем исходное пространство равномерно выпуклым и равномерно гладким. Известно, что эти свойства находятся в двойственности (В.Шмульян).

Утверждение 3. Для банахова пространства следующие условия эквивалентны:

(i) существует опорное отображение, равномерно непрерывное на X, когда X и X^* наделены топологией сходимости по норме;

(ii) X равномерно гладко;

(iii) X^* равномерно выпукло.

Доказательство этой теоремы вместе с дополнительными геометрическими свойствами опорного отображения можно найти в работе [6]. Здесь же доказан еще один необходимый для дальнейшего результат.

Утверждение 4. Если норма пространства дифференцируема в точке x, $\|x\| = 1$, то дифференциал Гато нормы x в направлении вектора y равен $\mathrm{Re}\{f_x(y)\} = \mathrm{Re}\,[y, x]$.

Другой вспомогательный для данной статьи результат доказан в [7].

Утверждение 5. Пусть X — равномерно выпуклое и равномерно дифференцируемое банахово пространство, и J — дуальное отображение X на X^*. Пусть, далее, C — замкнутое, линейное и собственное подмножество в X, $C^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Если $h \in X$ и $k \in X^*$ — заданные элементы, то множества $C^{\perp} + k$ и $J(C + h)$ имеют один и только один общий элемент.

Обсудим еще связь между отношением ортогональности элементов и равенством нулю их полускалярного произведения. Говорят, что элемент x *ортогонален* y ($x \perp y$), если для каждого $t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\|x\| \le \|x + ty\|$. В произвольном банаховом пространстве это несимметричное отношение, однако в гильбертовом пространстве оно эквивалентно обычному понятию ортогональности элементов. Будем писать $M \perp N$ в случае, если M, $N \subset X$, $x \in M$, $y \in N$ влечет $x \perp y$. Через $[M, N]$ обозначим совокупность чисел вида $[x, y]$ где $x \in M$, $y \in N$. В работе [8] доказано следующее.

Утверждение 6. Пусть X — нормированное пространство, M, N — подпространства X со свойством $M \perp N$ ($M \cap N = \{0\}$). Тогда существует полускалярное произведение $[\cdot, \cdot]$, для которого $[M, N] = 0$.

В рассматриваемом случае полускалярные произведения в X и X^* единственны, т.к. оба пространства равномерно выпуклы и гладки (утверждение 3), так что в обоих пространствах из ортогональности подпространств следует равенство нулю полускалярных произведений для произвольных элементов из этих подпространств.

Доказательство теоремы опирается на характеристику гильбертова пространства из работы [3].

Утверждение 7. Банахово пространство является гильбертовым в том и только в том случае, если для каждого двумерного подпространства V и каждого сегмента $I \subset V$ соответствующие метрические проекторы коммутируют: $P_I P_V = P_V P_I$.

Перейдем теперь к изложению результатов данной статьи. Начнем со вспомогательного результата, обобщающего случай пространств $L_p, 1 < p < \infty$ [9, лемма 1]; этот результат может быть интересен и безотносительно доказываемой в статье теоремы.

Лемма. Пусть X — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство над полем вещественных чисел, $C \subset X$ — замкнутое, выпуклое подмножество. Тогда для каждого $z \in X$ и любого $h \in C$ выполнено неравенство

$$[h, P_C z - z] \geq [P_C z, P_C z - z]. \tag{2}$$

Доказательство леммы. Положим $P_C z = g, g \in C$. Пусть элемент $h \in C$ фиксирован, тогда для каждого $t \in [0,1]$ определим функцию $g(t) = \|tg+(1-t)h-z\|^2$. В силу выпуклости C элемент $tg+(1-t)h \in C$, поэтому из определения метрического проектора существует

$$\min_{t\in[0,1]} g(t) = \|g - z\|^2 = g(1).$$

Тем самым функция $g(t)$ монотонно убывает на $[0,1]$, и ее производная неположительна; в частности, $g'(1) \leq 0$. С другой стороны, в силу утверждения 4 $g'(1)-$ это дифференциал нормы элемента $g - z$ в направлении вектора $g - h$. По формуле из утверждения 4,

$$0 \geq g'(1) = [P_C z - h, P_C z - z];$$

используя теперь линейность по первой переменной полускалярного произведения, получаем неравенство (2), как и утверждалось.

Доказательство теоремы. Как отмечено выше, полускалярные произведения в X и X^* определяются однозначно. Кроме того, в рефлексивном пространстве всегда выполнено равенство

$$\forall x, y \in X, [x, y] = [f_y, f_x], \tag{3}$$

т.к. по формуле (1) $[f_y, f_x] = F_{f_x}(f_y) = (x)(f_y) = [x, y]$.

Пусть V — произвольное двумерное подпространство в X, $I \subset V$ — сегмент. Пусть $z \in X$ произволен, $P_V z = v$, $v \in V$, $P_I z = u$, $u \in I$ (u, v определяются однозначно в силу выпуклости множеств I, V и равномерной выпуклости пространства X). Докажем сначала, что $P_{J(I)} f_z = f_u$. Для этого воспользуемся утверждением 5. В качестве C возьмем одномерное подпространство, порожденное вектором z: $C = [z]$, $h = P_I z = u$, $k = P_{J(I)} f_z$. Тогда $C^\perp + k = \{g + k, g \in C^\perp\}$, $J(C + h) = J(\{tz + u : t \in \mathbb{R}\}) = \{f_{tz+u} : t \in \mathbb{R}\}$. Поскольку по условию их пересечение одноэлементно, то константа t в определении $J(C + h)$ должна принять значение 0, т.к., в частности, на элементе z значения функционалов должны совпадать, а поскольку $k \in J(I)$, то и $f_{tz+u} \in J(I)$.

Итак, можно заключить, что

$$P_{J(I)} f_z = f_u, \quad P_{J(V)} f_z = f_v. \tag{4}$$

Далее, из включения $I \subset V$ всегда выполнено равенство $P_V(P_I z) = P_I z$. Поэтому для завершения доказательства теоремы по утверждению 7 осталось проверить, что $P_I v = u$.

Предположим противоположное, т.е. $P_I v = w$, $w \in I$, $w \neq u$. Применим лемму к множеству $J(I)$, которое по условию теоремы выпукло: $[f_w, f_u - f_z] \geq [f_u, f_u - f_z]$ (формула (4)). Положим $f_u - f_z = f_{z_1}$, тогда по правилу (3)

$$[z_1, w] \geq [z_1, u]. \tag{5}$$

С другой стороны, хорошо известно, что дуальное отображение монотонно в том смысле, что если x, $y \in X$, $f \in J(x)$, $g \in J(y)$, то $(f - g)(x - y) \geq 0$ (для полноты изложения приведем соответствующие выкладки и отметим, что в правой части равенства каждое из трех слагаемых неотрицательно:

$$(f - g)(x - y) = (\|f\| - \|g\|)(\|x\| - \|y\|) + (\|f\| \cdot \|y\| - f(y)) + (\|g\| \cdot \|x\| - g(x)).$$

Но тогда, как отмечено в работе [7], из последнего неравенства (свойство монотонности дуального отображения) и однозначно определяемого дуального отображения следует, что элемент z_1 лежит на том же луче, что и $u-z$: из неравенств $(f_u - f_z)(u-z) \geq 0, (f_{z_1})(z_1) \geq 0$ следует

$$z_1 = t(u-z), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Заметим теперь, что вектор $v-z$ ортогонален каждому вектору плоскости V: для любых $t \in \mathbb{R}$ $h \in V, th+v \in V$, где $v = P_V z$, следовательно, $\|v-z\| \leq \|v-z+th\|$. Если в утверждении 6 положить $M=[v-z], N=V$, то $[h, v-z]=0$ $\forall h \in V$. Точно также в сопряженном пространстве для $J(V)$ доказывается, что $[f_h, f_v - f_z]=0$; используя аналог (6) в сопряженном пространстве, окончательно получаем $[f_h, f_{v-z}]=0$ $\forall f_h \in J(V)$. Положим здесь $f_h = f_u - f_v$, тогда

$$[f_u - f_v, \quad f_{v-z}] = 0. \tag{7}$$

Доказательство теоремы завершается следующим образом. Из обеих частей неравенства (5) отнимем по $f_v(z_1)$, тогда

$$(f_w - f_v)(z_1) \geq (f_u - f_v)(z_1). \tag{8}$$

По формуле (6) $z_1 = t(u-z) = t(u-v) + t(v-z)$, поэтому из (7) получаем $(f_u - f_v)(z_1) = t(f_u - f_v)(u-v) \geq 0$. Тогда из (8) немедленно следует $\|f_w - f_v\| \geq \|f_u - f_v\|$, что противоречит предположению $w = P_I v$. Т.е. в действительности $u = P_I v$, что завершает доказательство теоремы.

Литература

[1] Kakutani S. Some characterizations of euclidean space// Japan. J. Math. 1939. V.16, No.2. P. 93–97.

[2] Канторович Л.В. О продолжении семейств линейных функционалов// ДАН СССР. 1935. Т.1, № 4. С. 204–207.

[3] Amir D., Deutsch F. Another approximation theoretic haracterization of inner product spaces// Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.71, No.1. P. 99–102.

[4] Бородин П.А. Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства// Матем. сборник. 1997. Т.188, № 8. С. 63–74.

[5] Lumer G.Semi – inner – product spaces// Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V.100. P. 29–43.

[6] Giles R.J. On a characterization of differentiability of the norm of a normed linear space// J. Austral. Math. Soc. 1972. V.12. P. 106–114.

[7] Berling A., Livingston A.E. A theorem on duality mapping in Banach spaces// Arkiv for Mathematik. 1962. B.4, No.32. P. 405–411.

[8] Faulkner G.D. Representation of linear functionals in a Banach space// Rocky Mountain J. Math. 1977. V.7, No.4. P. 789–792.

[9] Lander D., Rogge L. On progections and motonony in L_p – spaces// Manuscripta Math. 1979. V.26. P. 363–369.

ONE MORE CONDITION FOR BANACH SPACE TO BE HIL'BERT

 V.A. Kouchmantseva[2]

Contents of this article is a theorem, in which it is proved new sufficient condition for uniformly smooth and uniformly rotund Banach space to be Hil'bert space; the verification of this condition is rather easy than well-known parallelogram law. As a technique it is used the theory of spaces with semi-inner product by G. Lumer.

In this note it is proved that if support mapping in uniformly smooth and uniformly rotund Banach space maps line segments to convex sets, then space is Hil'bert.

Поступила в редакцию 14/ V/2001;
в окончательном варианте — 15/ VI/2001.

[2]Veronika Asasovna Kouchmantseva, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia; kouchmantseva@ssu.samara.ru