МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

 О.П. Филатов[1]

Приводятся новые доказательства теорем усреднения для систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными, которые основаны на теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных включений от их правых частей и начальных условий.

Введение

В Самарском государственном университете на третьем и четвертом курсах механико-математического факультета мне неоднократно приходилось читать курс по дифференциальным включениям. Основные трудности, как показывает практика, были связаны с изложением теорем усреднения для дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными, так как доказательство этих теорем весьма громоздко [1]. Предлагаемый метод основан на теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных включений от правой части системы и начальных условий. Это позволяет существенно упростить доказательство теорем усреднения дифференциальных включений.

Все сведения из многозначного анализа и теории дифференциальных включений, которые используются в данной статье, можно найти, например, в обзоре [2] или в [3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных включений

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \mu F(t,x,y,\mu), \qquad x(0) = x_0,\\ &\dot{y} \in G(t,x,y,\mu), \qquad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где отображения $F, G : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, $Kv(\mathbb{R}^n)$ определены на множестве $D = \mathbb{R}_+ \times B(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$, малый параметр $\mu \in [0, a]$, $a > 0$. Конечномерные пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ являются нормированными, при этом норма в любом из них обозначается одним и тем же символом $\|\cdot\|$, так как из контекста ясно, о каком пространстве

[1]Филатов Олег Павлович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; filt@ssu.samara.ru

идет речь. $B(x_0, r_0)$ — шар из $\mathbb{R}^m$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$ достаточно большого радиуса $r_0 > 0$.

Как обычно, $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых и компактных множеств из $\mathbb{R}^m$. Множество всех непустых компактов из $\mathbb{R}^m$ обозначается $K(\mathbb{R}^m)$. Для множеств $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$ вводится расстояние по Хаусдорфу следующим образом:

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

где полуотклонение множества A от множества B определяется соотношением

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \|a - B\|,$$

при этом $\|a - B\|$ — расстояние от точки $a \in \mathbb{R}^m$ до множества B. Пара $(K(\mathbb{R}^m), \alpha)$ является метрическим пространством.

Под решением дифференциального включения понимается абсолютно непрерывная функция (на любом отрезке $[t_1, t_2]$ из промежутка определения решения), производная которой почти всюду по t удовлетворяет этому дифференциальному включению.

Наряду с системой дифференциальных включений (1.1) рассмотрим усредненное дифференциальное включение

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $F_0 : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m)$, множество $D_0 = \mathbb{R}_+ \times B(x_0, r_0)$. Здесь, в зависимости от задачи усреднения (аппроксимация сверху или снизу) [1], отображение F_0 удовлетворяет одному из основных условий, которые вводятся с использованием порождающей системы дифференциальных включений

$$\begin{array}{ll} \dot{\xi} = 0, & \xi(t_0) = \xi_0, \\ \dot{\eta} \in G(t, \xi, \eta, 0), & \eta(t_0) = \eta_0. \end{array} \tag{1.3}$$

Система (1.3) получается из системы (1.1) при $\mu = 0$, при этом начальные данные $(t_0, \xi_0) \in D_0$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ здесь произвольные. Если символом $Z(t_0, \xi_0, \eta_0)$ обозначить множество всех решений порождающей задачи (1.3), определенных при всех $t \geq t_0$, то указанные основные условия в задачах усреднения можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\Delta \to \infty} \beta\left(J(t_0, \xi_0, \eta_0, \Delta), \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} F_0(t, \xi_0)\, dt\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \beta\left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} F_0(t, \xi_0)\, dt, J(t_0, \xi_0, \eta_0, \Delta)\right) = 0, \tag{1.5}$$

при этом требуется, чтобы пределы существовали равномерно по начальным условиям $(t_0, \xi_0) \in D_0$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$. Здесь

$$J(t_0, \xi_0, \eta_0, \Delta) = \bigcup \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} F\big(t, \xi_0, \eta(t), 0\big)\, dt,$$

где объединение берется по всем решениям $Z(t_0, \xi_0, \eta_0)$ порождающей задачи.

Условие (1.4) используется при решении задачи аппроксимации сверху, которая ставится следующим образом [1]. Требуется указать отображение $F_0 : D_0 \to$

$Kv(\mathbb{R}^m)$, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\mu_0 > 0$ такое, что если $\mu \in (0, \mu_0]$, то для любого решения $x(t), y(t)$ задачи (1.1) нашлось бы решение $u(t)$ усредненного дифференциального включения (1.2), для которого

$$\|x(t) - u(t)\| \le \varepsilon, \quad t \in [0, \mu^{-1}]. \tag{1.6}$$

В задаче аппроксимации снизу требуется, чтобы для любого решения $u(t)$ дифференциального включения (1.2) существовало решение $x(t), y(t)$ исходной задачи (1.1), для которого выполняется неравенство (1.6).

2. Основные классы отображений

Опишем теперь общие свойства отображений, которые определяют дифференциальные включения. Для формализации свойств отображений удобно использовать класс $K(\mathbb{R}_+)$ непрерывных строго возрастающих функций $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$.

Множество всех отображений

$$F : D \to Kv(\mathbb{R}^m), \quad (t, x, y, \mu) \to F(t, x, y, \mu),$$

для которых выполняются условия:
1) при любых (x, y, μ) отображение $F(\cdot, x, y, \mu)$ является измеримым;
2) отображение F ограничено, т.е. существует такая постоянная $c = c(F)$, что модуль множества $\|F(t, x, y, \mu)\| \le c$ для любых значений $(t, x, y, \mu) \in D$;
3) отображение F удовлетворяет условию Липшица по фазовым переменным x, y и равномерно непрерывно по μ в точке $\mu = 0$, т.е. для некоторой постоянной $l = l(F)$ и функции $\sigma = \sigma(F) \in K(\mathbb{R}_+)$ выполняется неравенство

$$\alpha\big(F(t, x_1, y_1, \mu), F(t, x_2, y_2, 0)\big) \le l\big(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\big) + \sigma(\mu),$$

будем обозначать символом $L(D, m)$ или использовать более детальное обозначение $L(D, m, l, \sigma)$, если это требуется.

Следующее множество отображений вводится для описания правых частей усредненных дифференциальных включений. Совокупность всех отображений

$$F : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m), \quad (t, x) \to F(t, x),$$

для которых выполняются условия:
1) при любом x отображение $F(\cdot, x)$ является измеримым;
2) отображение F ограничено;
3) отображение F удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной x, будем обозначать через $L_0(D_0, m)$.

3. Теоремы усреднения

Сформулируем две основные теоремы [1]. Первая из них относится к задаче аппроксимации снизу.

Теорема 1. Пусть $F \in L(D, m, l_1, \sigma_1)$, $G \in L(D, n, l_2, \sigma_2)$ и выполняется основное условие (1.5) для отображения $F_0 \in L_0(D_0, m, l_0)$. Тогда задача (1.2) аппроксимирует снизу задачу (1.1).

Вторая теорема связана с задачей аппроксимации сверху.

Теорема 2. Пусть $F \in L(D,m,l_1,\sigma_1)$, $G \in L(D,n,l_2,\sigma_2)$ и выполняется основное условие (1.4) для отображения $F_0 \in L_0(D_0,m,l_0)$. Тогда задача (1.2) аппроксимирует сверху задачу (1.1).

В качестве следствия из этих утверждений получается теорема о взаимной аппроксимации.

Теорема 3. Пусть $F \in L(D,m)$, $G \in L(D,n)$ и одновременно выполняются условия (1.4), (1.5) для отображения $F_0 \in L_0(D_0,m)$. Тогда задача (1.2) аппроксимирует взаимно задачу (1.1).

Заметим, что одновременное выполнение условий (1.4), (1.5) означает сходимость по Хаусдорфу.

Доказательство этих теорем будет основано на некоторых леммах, которые будут доказаны в следующем разделе.

4. Леммы

Начнем с леммы о непрерывной зависимости решений дифференциального включения от исходных данных. Заметим, что обычно получают оценки отклонений функций от решения дифференциального включения [2], с. 218, теорема 9. Здесь нас интересует соответствующая оценка отклонения проекции решения на пространство медленных переменных, поэтому для полноты изложения приведем соответствующее доказательство, используя метод последовательных приближений [3], теорема 14.1.

Введем функцию

$$E(t,\mu) = \frac{\mu l_1}{\mu l_1 + l_2}\Big(\exp\big((\mu l_1 + l_2)t\big) - 1\Big),$$

где постоянные l_1, $l_2 > 0$, и постоянную $\Delta > 0$.

Лемма 1. Пусть $F \in L(D,m,l_1,\sigma_1)$, $G \in L(D,m,l_2,\sigma_2)$ и для абсолютно непрерывных функций

$$a,b : [0,\Delta] \to \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$$

почти всюду на отрезке $[0,\Delta]$ выполняются неравенства

$$\|\dot{a}(t) - \mu F\big(t,a(t),b(t),\mu\big)\| \le \alpha_1(t), \tag{4.1}$$

$$\|\dot{b}(t) - \mu G\big(t,a(t),b(t),\mu\big)\| \le \alpha_2(t) \tag{4.2}$$

для некоторых интегрируемых по Лебегу функций $\alpha_1,\alpha_2 \in L_1([0,\Delta])$. Тогда существует решение $x(t), y(t)$ задачи (1.1), для которого выполняется оценка

$$\|x(t) - a(t)\| \le \big(1 + E(t,\mu)\big)r_1 + E(t,\mu)r_2 + \int_0^t \big(1 + E(t-s,\mu)\big)\alpha_1(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t E(t-s,\mu)\alpha_2(s)\,ds,$$

где $r_1 = \|x_0 - a(0)\|$, $r_2 = \|y_0 - b(0)\|$.

Доказательство. Построим последовательности функций $\{x_n(t)\}$, $\{y_n(t)\}$ ($n = 0,1,\dots$), которые удовлетворяют начальным условиям $x_n(0) = x_0$, $y_n(0) = y_0$ при любом n. В качестве начальных приближений при $n = 0$ примем

$$x_0(t) = a(t), \quad y_0(t) = b(t),$$

а при $n \geq 1$ потребуем, чтобы выполнялись включения

$$\dot{x}_n(t) \in \mu F\big(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t), \mu\big), \tag{4.3}$$

$$\dot{y}_n(t) \in G\big(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t), \mu\big) \tag{4.4}$$

при следующих ограничениях:

$$\|\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)\| \leq \|\dot{x}_{n-1}(t) - \mu F\big(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t), \mu\big)\|, \tag{4.5}$$

$$\|\dot{y}_{n-1}(t) - \dot{y}_n(t)\| \leq \|\dot{y}_{n-1}(t) - G\big(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t), \mu\big)\|. \tag{4.6}$$

Схема доказательства леммы основана на построении равномерно сходящихся вместе со своими производными последовательностей функций $\{x_n(t)\}$, $\{y_n(t)\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ к решению системы дифференциальных включений. Для этого достаточно построить абсолютно и равномерно сходящиеся на отрезке $[0, \Delta]$ ряды

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(x_n(t) - x_{n-1}(t)\big), \quad y(t) = y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(y_n(t) - y_{n-1}(t)\big), \tag{4.7}$$

которые допускают почленное дифференцирование.

Начнем с построения функций $x_1(t)$, $y_1(t)$, значения которых известны при $t = 0$. Поэтому достаточно определить их производные на основании теоремы о выборе измеримого селектора (см., например, [3], теорема 7.2), с учетом ограничений (4.5), (4.6) и начальных оценок (4.1), (4.2). В результате получим функции $\dot{x}_1(t)$, $\dot{y}_1(t)$, для которых выполняются оценки

$$\|\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq \alpha_1(t), \quad \|\dot{y}_0(t) - \dot{y}_1(t)\| \leq \alpha_2(t).$$

Следовательно, с учетом формулы Ньютона–Лейбница, получим неравенства

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq r_1 + \int_0^t \alpha_1(s)\, ds, \tag{4.8}$$

$$\|y_0(t) - y_1(t)\| \leq r_2 + \int_0^t \alpha_2(s)\, ds. \tag{4.9}$$

Далее, на основании (4.3)–(4.6) и теоремы о выборе измеримого селектора, определяются функции $\dot{x}_2(t)$, $\dot{y}_2(t)$ и, с учетом (4.8), (4.9), получаются следующие оценки:

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \leq \alpha\Big(\mu F\big(t, x_0(t), y_0(t), \mu\big), \mu F\big(t, x_1(t), y_1(t), \mu\big)\Big) \leq$$

$$\leq \mu l_1 \big(\|x_0(t) - x_1(t)\| + \|y_0(t) - y_1(t)\|\big) \leq \mu l_1 \Big(r_1 + r_2 + \int_0^t \big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\, ds\Big). \tag{4.10}$$

Аналогично получим неравенство

$$\|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\| \leq l_2 \Big(r_1 + r_2 + \int_0^t \big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\, ds\Big). \tag{4.11}$$

Из (4.10), (4.11) следуют соотношения

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \mu l_1 \Big((r_1 + r_2)t + \int_0^t (t - s)\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\, ds\Big), \tag{4.12}$$

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq l_2\Big((r_1 + r_2)t + \int_0^t (t-s)\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big). \tag{4.13}$$

Дальнейшие построения проводятся по индукции. В результате получаются следующие оценки при $n \geq 2$:

$$\|\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)\| \leq A_1(\mu, n)\Big((r_1 + r_2)t^{n-2} + \int_0^t (t-s)^{n-2}\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big), \tag{4.14}$$

$$\|\dot{y}_{n-1}(t) - \dot{y}_n(t)\| \leq B_1(\mu, n)\Big((r_1 + r_2)t^{n-2} + \int_0^t (t-s)^{n-2}\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big), \tag{4.15}$$

$$\|x_{n-1}(t) - x_n(t)\| \leq A_2(\mu, n)\Big((r_1 + r_2)t^{n-1} + \int_0^t (t-s)^{n-1}\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big), \tag{4.16}$$

$$\|y_{n-1}(t) - y_n(t)\| \leq B_2(\mu, n)\Big((r_1 + r_2)t^{n-1} + \int_0^t (t-s)^{n-1}\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big), \tag{4.17}$$

где

$$A_1(\mu, n) = \frac{\mu l_1(\mu l_1 + l_2)^{n-2}}{(n-2)!}, \quad B_1(\mu, n) = \frac{l_2(\mu l_1 + l_2)^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$A_2(\mu, n) = \frac{\mu l_1(\mu l_1 + l_2)^{n-2}}{(n-1)!}, \quad B_2(\mu, n) = \frac{l_2(\mu l_1 + l_2)^{n-2}}{(n-1)!}.$$

Из (4.14)–(4.17) следует, что ряды (4.7) являются равномерно сходящимися на отрезке $[0, \Delta]$ и их можно почленно дифференцировать. При этом $x(t)$, $y(t)$ является решением задачи (1.1), так как в условиях леммы можно сделать предельный переход в (4.3), (4.4) при $n \to \infty$.

Теперь из первого равенства (4.7) и оценок (4.8), (4.9), (4.16), (4.17) следует требуемое соотношение

$$\|x(t) - a(t)\| \leq r_1 + \int_0^t \alpha_1(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} A_2(\mu, n)\Big((r_1 + r_2)t^{n-1} + \int_0^t (t-s)^{n-1}\big(\alpha_1(s) + \alpha_2(s)\big)\,ds\Big) =$$

$$= \big(1 + E(t, \mu)\big)r_1 + E(t, \mu)r_2 + \int_0^t \big(1 + E(t-s, \mu)\big)\alpha_1(s)\,ds + \int_0^t E(t-s, \mu)\alpha_2(s)\,ds.$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Далее потребуется частный случай этой леммы при $r_2 = 0$, $\alpha_1 = \mathrm{const}$, $\alpha_2 = \mathrm{const}$. Тогда из основной оценки получим неравенство

$$\|x(t) - a(t)\| \leq r_1 q(\mu, \Delta) + d(\mu, \Delta), \quad t \in [0, \Delta], \tag{4.18}$$

где

$$q(\mu, \Delta) = 1 + E(\mu, \Delta),$$

$$d(\mu, \Delta) = \frac{E(\mu, \Delta)}{\mu l_1 + l_2} + \frac{\Delta}{\mu l_1 + l_2}(\alpha_1 l_2 - \mu l_1 \alpha_2).$$

В следующей лемме символ Z_+ обозначает множество неотрицательных целых чисел.

Лемма 2. Для произвольных постоянных $\mu > 0$, $\Delta > 0$, $l \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ и последовательности $\{z_j\}$ $(j \in Z_+)$, удовлетворяющей неравенствам

$$0 \leq z_{j+1} \leq z_j(1 + \mu\Delta l) + \mu\Delta\varepsilon$$

для любого целого $0 \leq j \leq (\mu\Delta)^{-1}$, выполняется оценка

$$z_j \leq z_0 \exp(l) + \frac{\varepsilon}{l}\bigl(\exp(l) - 1\bigr).$$

Доказательство. Обозначим

$$q = (1 + \mu\Delta l), \quad d = \mu\Delta\varepsilon.$$

Пусть $w(j)$, $j \in Z_+$ — решение задачи Коши для разностного уравнения

$$w_{j+1} = w_j q + d, \quad w(0) = z_0.$$

Поскольку $z_j \leq w(j)$ при любом j и решение задачи Коши

$$w(j) = z_0 q^j + \frac{d}{q-1}(q^j - 1),$$

то

$$z(j) \leq z_0 q^j + \frac{d}{q-1}(q^j - 1). \tag{4.19}$$

Остается воспользоваться вторым замечательным пределом

$$q^j \leq q^{p(\mu,\Delta)} = (1 + \mu\Delta l)^{p(\mu,\Delta)} < \lim_{\mu\to 0}(1 + \mu\Delta l)^{p(\mu,\Delta)} = \exp(l),$$

где $p(\mu, \Delta) = (\mu\Delta)^{-1}$, что и требовалось. Лемма 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Введем сетку $t_j = j\Delta$, $j \in Z_+$, где постоянная $\Delta > 0$, и рассмотрим произвольное решение $u(t)$ усредненной задачи (1.2). Тогда

$$u(t) = \mu v(t), \quad v(t) \in F_0(t, u(t)).$$

Так как при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеет имеет место неравенство

$$\alpha\bigl(F_0(t, u_j), F_0(t, u(t)\bigr) \leq l_0\|u_j - u(t)\| \leq l_0(\mu m_0\Delta),$$

то по теореме о выборе селектора существует функция

$$v^1(t) \in F_0(t, u_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

для которой

$$\|v(t) - v^1(t)\| = \|v(t) - F_0(t, u_j)\| \leq \alpha\bigl(F_0(t, u(t)), F_0(t, u_j)\bigr) \leq \mu\Delta l_0 m_0.$$

Здесь используется обозначение $u_j = u(t_j)$. Из последнего неравенства следует оценка

$$\left\| \frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta} \bigl(v(t) - v^1(t)\bigr)\, dt \right\| \leq \mu l_0 m_0. \tag{5.1}$$

Построим теперь функции

$$a, b : [0, t_k] \to \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \quad k = k(\mu, \Delta),$$

где $k(\mu, \Delta)$ — целая часть числа $(\mu\Delta)^{-1}$, а также решение $x(t)$, $y(t)$ задачи (1.1), последовательно на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, считая, что

$$a(0) = x(0), \quad b(0) = y(0).$$

Сначала определим селектор

$$v^2(t) \in F_0(t, a_0),$$

который на начальном отрезке полагаем равным селектору $v^1(t)$, и функцию

$$a(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^2(s)\, ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Затем зафиксируем некоторое число $\varepsilon_1 > 0$. Тогда по основному условию (1.5) теоремы на начальном отрезке $[0, t_1]$ существует решение $b(t)$ задачи

$$\dot{b} \in G(t, a_0, b, 0), \quad b(0) = y_0 \tag{5.2}$$

и селектор

$$v^3(t) \in F\big(t, a_0, b(t), 0\big), \quad t \in [0, t_1], \tag{5.3}$$

для которого выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_j+\Delta} (v^2(t) - v^3(t))\, dt \right\| \le \varepsilon_1 \tag{5.4}$$

при достаточно большом $\Delta \ge \Delta_0(\varepsilon_1)$.

Заметим, что справедливы неравенства

$$\|\dot{a}(t) - \mu F\big(t, a(t), b(t), \mu\big)\| \le \alpha\Big(\mu F\big(t, a_0, b(t), 0\big), \mu F\big(t, a(t), b(t), \mu\big)\Big) \le$$

$$\le \mu\big(l_1\|a_0 - a(t)\| + \sigma_1(\mu)\big) \le \mu\big(\mu l_1 m_0 \Delta + \sigma_1(\mu)\big).$$

Аналогично можно заключить, что

$$\|\dot{b}(t) - G(t, a(t), b(t), \mu)\| \le \alpha\Big(G\big(t, a_0, b(t), 0\big), G\big(t, a(t), b(t), \mu\big)\Big) \le$$

$$\le l_2\|a_0 - a(t)\| + \sigma_2(\mu) \le \mu l_2 m_0 \Delta + \sigma_2(\mu).$$

Введем обозначения:

$$\alpha_1(\mu) = \mu\big(\mu l_1 m_0 \Delta + \sigma_1(\mu)\big), \quad \alpha_2(\mu) = \mu l_2 m_0 \Delta + \sigma_2(\mu). \tag{5.5}$$

Тогда на основании леммы 1 существует решение $x(t)$, $y(t)$ задачи (1.1), для которого выполняется неравенство (4.18), где необходимо принять $r_1 = 0$. В результате получим оценку

$$\|x(t) - a(t)\| \le d(\mu, \Delta). \tag{5.6}$$

Допустим теперь, что при $t \in [0, t_j]$ функции $a(t)$, $b(t)$ и решение $x(t)$, $y(t)$ задачи (1.1) определены. Тогда положим

$$x(t_j) = x_j, \quad y(t_j) = y_j, \quad a(t_j) = a_j, \quad b(t_j) = y_j,$$

то есть функции x, y, a продолжаются непрерывно, а функция b, вообще говоря, разрывная. Функция $b(t)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ выбирается из решений задачи

$$\dot{b}(t) \in G\big(t, a_j, b(t), 0\big), \quad b(t_j) = y_j \tag{5.7}$$

так, чтобы на основании условия (1.5) выполнялось неравенство

$$\beta\left(\frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta} F_0(t, a_j)\,dt, \frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta} F\big(t, a_j, b(t), 0\big)\,dt\right) \le \varepsilon_1, \quad \Delta \ge \Delta_0(\varepsilon_1). \tag{5.8}$$

Поскольку

$$\alpha\big(F_0(t, a_j), F_0(t, u_j)\big) \le l_0\|a_j - u_j\|,$$

то существует селектор $v^2(t) \in F_0(t, a_j)$, для которого

$$\|v^1(t) - v^2(t)\| = \|v^1(t) - F_0(t, a_j)\| \le \alpha\big(F_0(t, a_j), F_0(t, u_j)\big) \le l_0\|a_j - u_j\|. \tag{5.9}$$

Согласно (5.8) для селектора $v^2(t)$ найдется селектор

$$v^3(t) \in F\big(t, a_j, b(t), 0\big),$$

для которого

$$\left\|\frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta}\big(v^2(t) - v^3(t)\big)\,dt\right\| \le \varepsilon_1. \tag{5.10}$$

На основании (5.9), (5.10) получим

$$\left\|\frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta}\big(v^1(t) - v^3(t)\big)\,dt\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta}\big(v^1(t) - v^2(t)\big)\,dt\right\| + \left\|\frac{1}{\Delta}\int_{t_j}^{t_j+\Delta}\big(v^2(t) - v^3(t)\big)\,dt\right\| \le$$

$$\le l_0\|a_j - u_j\| + \varepsilon_1, \quad t \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{5.11}$$

Тогда из (5.1) и (5.11) следует

$$\|u(t_{j+1}) - a(t_{j+1})\| \le \|u_j - a_j\| + \left\|\int_{t_j}^{t}\big(v(s) - v^3(s)\big)\,ds\right\| \le$$

$$\le \|u_j - a_j\| + \left\|\int_{t_j}^{t}\big(v(s) - v^1(s)\big)\,ds\right\| + \left\|\int_{t_j}^{t}\big(v^1(s) - v^3(s)\big)\,ds\right\| \le$$

$$\le \|u_j - a_j\| + \mu\Delta\big(\mu l_0 m_0\Delta + \varepsilon_1 + l_0\|u_j - a_j\|\big) =$$

$$= (1 + \mu\Delta l_0)\|u_j - a_j\| + \mu\Delta(\varepsilon_1 + \mu\Delta l_0 m_0).$$

Таким образом приходим к оценке

$$\|u_{j+1} - a_{j+1}\| \le (1 + \mu\Delta l_0)\|u_j - a_j\| + \mu\Delta(\varepsilon_1 + \mu\Delta l_0 m_0). \tag{5.12}$$

Следовательно, функция a продолжена на отрезок $[t_j, t_{j+1}]$.

Согласно лемме 1, где $\alpha_1(\mu)$, $\alpha_2(\mu)$ определяются равенствами (5.5), на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ существует решение $x(t)$, $y(t)$ дифференциального включения (1.1) с начальными условиями

$$x(t_j) = x_j, \quad y(t_j) = y_j,$$

для которого имеет место оценка (4.18). В частности, при $t = t_{j+1}$ получим

$$\|x_{j+1} - a_{j+1}\| \le \|x_j - a_j\| q(\mu, \Delta) + d(\mu, \Delta). \tag{5.13}$$

Таким образом, решение задачи построено на отрезке $[0, t_{j+1}]$, а следовательно, по индукции оно построено и на всем отрезке $[0, t_k]$, где $k = k(\mu, \Delta)$.

По лемме 2 из (5.13) на основании оценки (4.19) и неравенств

$$q(\mu,\Delta)^j = \left(1 + \frac{\mu l_1}{\mu l_1 + l_2}\left[\exp\bigl((\mu l_1 + l_2)t\bigr) - 1\right]\right)^j \le$$
$$\le \left(1 + \frac{\mu l_1}{\mu l_1 + l_2}\left[\exp\bigl((\mu l_1 + l_2)\Delta\bigr) - 1\right]\right)^{p(\mu,\Delta)} \le$$
$$\le \exp\left(\frac{l_1}{\Delta(\mu l_1 + l_2)}\bigl[\exp\bigl(\Delta(\mu l_1 + l_2)\bigr] - 1\right),$$

где $p(\mu, \Delta) = (\mu\Delta)^{-1}$, получим

$$\|x_j - a_j\| \le \frac{Q(\mu,\Delta) d(\mu,\Delta)}{E(\mu,\Delta)}, \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta), \tag{5.14}$$

где

$$Q(\mu,\Delta) = \exp\left(\frac{l_1}{\Delta(\mu l_1 + l_2)}\left[\exp(\Delta(\mu l_1 + l_2) - 1\right] - 1\right).$$

Так как

$$\frac{d(\mu,\Delta)}{E(\mu,\Delta)} = \frac{\alpha_1(\mu) + \alpha_2(\mu)}{\mu l_1 + l_2} + \frac{\Delta(\alpha_1^0(\mu) l_2 - \alpha_2(\mu) l_1)}{l_1[\exp(\Delta(\mu l_1 + l_2)) - 1]}, \tag{5.15}$$

где

$$\alpha_1^0(\mu) = \alpha_1(\mu)/\mu = \mu\Delta l_1 m_0 + \sigma_1(\mu),$$

то из (5.14), (5.15) следует, что при фиксированном $\Delta > 0$ предел правой части (5.14) при $\mu \to 0$ равен 0, поэтому существует такое $\mu_1 = \mu_1(\Delta) > 0$, что неравенство $0 < \mu \le \mu_1$ влечет оценку

$$\|x_j - a_j\| \le \varepsilon/4, \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta). \tag{5.16}$$

Теперь на основе (5.12) и леммы 2 оценим отклонение решения u от функции a в узлах сетки, получим

$$\|u_j - a_j\| \le \frac{\varepsilon_1 + \mu\Delta l_0 m_0}{l_1}\bigl(\exp(l_1) - 1\bigr), \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta). \tag{5.17}$$

Остается по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать сначала число $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы

$$\frac{\varepsilon_1}{l_1}\bigl(\exp(l_1) - 1\bigr) = \frac{\varepsilon}{8},$$

затем определить $\Delta = \Delta_0(\varepsilon_1)$ и, наконец, ограничить сверху малый параметр μ величиной

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon l_1}{8\Delta l_0 m_0}\bigl(\exp(l_1) - 1\bigr)^{-1}.$$

Тогда правая часть неравенства (5.17) при $\Delta = \Delta_0$ не превосходит величины $\varepsilon/4$, а поэтому

$$\|u_j - a_j\| \le \varepsilon/4, \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta_0). \tag{5.18}$$

Из (5.16), (5.18) получим

$$\|x_j - u_j\| \le \varepsilon/2, \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta_0). \tag{5.19}$$

Для того чтобы получить оценку отклонения функции x от решения усредненной задачи u при любом $t \in [0, \mu^{-1}]$, достаточно считать, что

$$\mu \le \mu_3 = \frac{\varepsilon}{2m_0\Delta_0},$$

где постоянная $m_0 > 0$ является общей для отображений F, F_0 из условий их ограниченности.

Таким образом, если принять

$$\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\},$$

то

$$\|x(t) - u(t)\| \le \varepsilon, \quad t \in [0, \mu^{-1}],$$

при условии, что $0 < \mu \le \mu_0$.

Теорема 1, следовательно, доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение задачи (1.1). Положим

$$\dot{x}(t) = \mu v(t), \quad v(t) \in F\bigl(t, x(t), y(t), \mu\bigr)$$

$x_j = x(t_j)$, $t_j = j\Delta$, $j \in Z_+$, $\Delta > 0$. Так как при $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\alpha\Bigl(F\bigl(t, x_j, y(t), 0\bigr), F\bigl(t, x(t), y(t), \mu\bigr)\Bigr) \le l_1\|x(t) - x_1\| + \sigma_1(\mu) \le l_1(\mu m_0\Delta) + \sigma_1(\mu),$$

то существует селектор $v^1(t) \in F\bigl(t, x_j, y(t), 0\bigr)$, для которого

$$\|v(t) - v^1(t)\| \le \mu\Delta l_1 m_0 + \sigma_1(\mu). \tag{6.1}$$

Далее, рассмотрим задачу

$$\dot{\eta} \in G(t, x_j, \eta, 0), \quad \eta(t_j) = y(t_j). \tag{6.2}$$

Так как

$$\|\dot{y}(t) - G(t, x_j, y(t), 0)\| \le \alpha\Bigl(G\bigl(t, x_j, y(t), 0\bigr), G\bigl(t, x(t), y(t), \mu\bigr)\Bigr) \le l_2(\mu m_0\Delta) + \sigma_2(\mu),$$

то по теореме о непрерывной зависимости решений дифференциального включения от правой части (см. оценку (4.18) при $l_1 = 0$) существует решение $\eta(t)$ задачи (6.2), для которого

$$\|y(t) - \eta(t)\| \le \gamma(t - t_j, \mu), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \tag{6.3}$$

где

$$\gamma(t,\mu) = \big(\mu\Delta m_0 + \sigma_2(\mu)/l_2\big)\big[\exp\big(l_2(t - t_j)\big) - 1\big].$$

Поскольку

$$\alpha\Big(F\big(t, x_j, y(t), 0\big), F\big(t, x_j, \eta(t), 0\big)\Big) \le l_2\gamma(t - t_j, \mu),$$

то существует селектор

$$v^2(t) \in F\big(t, x_j, \eta(t), 0\big),$$

для которого

$$\|v^1(t) - v^2(t)\| \le l_2\gamma(t - t_j, \mu), \quad t \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{6.4}$$

Из условия (1.4) следует, что для некоторого селектора $v^3(t) \in F_0(t, x_j)$ выполняется неравенство

$$\|v^2(t) - v^3(t)\| \le \varepsilon_1, \quad \Delta \ge \Delta_0(\varepsilon_1). \tag{6.5}$$

Теперь построим функцию

$$a : [0, t_k] \to \mathbb{R}^m, \quad k = k(\mu, \Delta),$$

которую определим соотношением

$$a(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^4(s)\, ds,$$

где селектор $v^4(s) \in F_0(t, a_j)$, в свою очередь, строится последовательно на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ вместе с функцией a следующим образом.

Так как $a(0) = x(0)$, то на начальном отрезке полагаем $v^4(t) = v^3(t)$. Тем самым определяется значение $a_1 = a(t_1)$. Допустим теперь, что на отрезке $[0, t_j]$ функция $a(t)$ определена. Тогда

$$\alpha\big(F_0(t, x_j), F_0(t, a_j)\big) \le l_0\|x_j - a_j\|.$$

Следовательно, существует селектор $v^4(t) \in F_0(t, a_j)$, для которого имеет место неравенство

$$\|v^3(t) - v^4(t)\| \le l_0\|x_j - a_j\|. \tag{6.6}$$

Тем самым функция $a(t)$ становится определенной на отрезке $[0, t_{j+1}]$, а значит, и на всем отрезке $[0, t_k]$.

Из (6.1), (6.4), (6.5) получим оценку

$$\|x_{j+1} - a_{j+1}\| \le \|x_j - a_j\| + \mu\left\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(v(s) - v^4(s)\big)\, ds\right\| \le$$

$$\le \|x_j - a_j\| + \mu\left\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(v(s) - v^1(s)\big)\, ds\right\| + \mu\left\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(v^1(s) - v^2(s)\big)\, ds\right\| +$$

$$+\mu\left\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(v^2(s) - v^3(s)\big)\, ds\right\| + \mu\left\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(v^3(s) - v^4(s)\big)\, ds\right\| \le$$

$$\leq (1+\mu\Delta l_0)\|x_j - a_j\| + \mu\big(\mu\Delta l_1 m_0 + \sigma_1(\mu) + l_2\gamma(\Delta,\mu) + \varepsilon_1\big).$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\|x_{j+1} - a_{j+1}\| \leq (1+\mu\Delta l_0)\|x_j - a_j\| + d(\mu,\Delta,\varepsilon_1), \tag{6.7}$$

где $d(\mu,\Delta,\varepsilon_1) = \mu\big(\mu\Delta l_1 m_0 + \sigma_1(\mu) + l_2\gamma(\Delta,\mu) + \varepsilon_1\big)$.

Из леммы 2 и (6.1) получим

$$\|x_j - a_j\| \leq l_0^{-1}\big(\varphi(\mu,\Delta) + \varepsilon_1\big)\big(\exp(l_0) - 1\big), \quad j = 0,1,\ldots,k \tag{6.8}$$

где $\varphi(\mu,\Delta) = \mu\Delta l_1 m_0 + \sigma_1(\mu) + l_2\gamma(\Delta,\mu)$. Теперь строим решение $u(t)$ задачи (1.2).

По определению функции $a(t)$ при $t \in [0,t_1]$ имеет место оценка

$$\|\dot a(t) - \mu F_0(t,a(t))\| \leq \alpha\Big(\mu F_0(t,a_0), \mu F_0\big(t,a(t)\big)\Big) \leq \mu l_0\|a_0 - a(t)\| \leq \mu l_0(\mu\Delta m_0),$$

где $a_0 = x_0$. Поэтому из леммы 1 (см. (4.18) при $r_1 = r_2 = \alpha_2 = l_2 = 0$) следует, что существует решение задачи (1.2), для которого

$$\|u(t) - a(t)\| \leq \mu^2\Delta l_0 m_0[\exp(\mu l_0 t) - 1].$$

Допустим, что на отрезке $[0,t_j]$ решение задачи (1.2) построено. Тогда при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$\|\dot a(t) - \mu F_0(t,a(t))\| \leq \alpha\big(\mu F_0(t,a_0), \mu F_0(t,a(t)\big) \leq \mu l_0\|a_0 - a(t)\| \leq \mu l_0(\mu\Delta m_0).$$

Поэтому существует решение дифференциального включения (1.2) с начальными условиями $u(t_j) = u_j$, для которого при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеет место оценка

$$\|u(t) - a(t)\| \leq \|u_j - a_j\|\exp(\mu l_0(t-t_j)) + \mu^2\Delta l_0 m_0[\exp\big(\mu l_0(t-t_j)\big) - 1].$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\|u_{j+1} - a_{j+1}\| \leq \|u_j - a_j\|\exp[\mu l_0\Delta] + \mu^2\Delta l_0 m_0[\exp(\mu l_0\Delta) - 1].$$

Отсюда по лемме 2 получим

$$\|u_j - a_j\| \leq \mu^2\Delta l_0 m_0(\exp(l_0) - 1), \quad j = 0,1,\ldots,k. \tag{6.9}$$

Из (6.8), (6.9) следует

$$\|x_j - u_j\| \leq \Big(\big(l_0^{-1}(\varphi(\mu,\Delta) + \varepsilon_1\big) + \mu^2\Delta l_0 m_0\Big)[\exp(l_0) - 1] \tag{6.10}$$

при любом $j = 0,1,\ldots,k(\mu,\Delta)$.

Таким образом, если сначала выбрать ε_1 из условия

$$\varepsilon_1\big(\exp(l_0) - 1\big) = \varepsilon/4,$$

затем зафиксировать $\Delta = \Delta_0(\varepsilon_1)$ и определить число $\mu_1 > 0$ так, чтобы при $\mu \in (0,\mu_1]$ выполнялось неравенство

$$\big(l_0^{-1}(\varphi(\mu,\Delta) + \mu^2\Delta l_0 m_0\big)\big(\exp(l_0) - 1\big) \leq \varepsilon/4,$$

то из (6.10) получим

$$\|x_j - u_j\| \le \varepsilon/2, \quad j = 0, 1, \ldots, k(\mu, \Delta). \tag{6.11}$$

Ограничим теперь малый параметр μ сверху числом $\mu_2 > 0$ так, чтобы при $\mu \in (0, \mu_2]$ выполнялось неравенство

$$2\mu m_0 \Delta \le \varepsilon/2.$$

Тогда из (6.11) и ограниченности отображений F, F_0 следует оценка

$$\|x(t) - u(t)\| \le \|x_j - u_j\| + 2\mu m_0 \Delta \le \varepsilon$$

при любом $t \in (0, 1/\mu]$, где $\mu \in (0, \mu_0]$, $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Теорема 2 доказана.

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.

[2] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление// Труды МИАН. 1985. Т.169. С. 194–252.

[3] Филатов О.П. Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям. Самара: Изд-во "Самарский ун-т", 2000. 116 с.

THE PROOFS OF THE AVERAGING THEOREMS FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2001 O.P. Filatov[2]

The new proofs for the averaging theorems of the system of differential inclusions with slow and rapid variables based on the theorem of continuous dependence of the solutions of the differential inclusions from their right hands and the initial conditions are presented.

Поступила в редакцию 24/ V/2001;
в окончательном варианте — 19/ VI/2001.

[2]Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia; filt@ssu.samara.ru