МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

J–КОНФИГУРАЦИИ (0,1)–МАТРИЦ И ИХ ИНВАРИАНТЫ

© 2001 М.И. Карпухина,[1] Е.С. Коваленко,[2] И.С. Фролов[3]

Одним из следствий знаменитой теоремы Холла о трансверсалях является теорема Райзера о существовании (0,1)–матрицы с заданными векторами строчных и столбцовых сумм.

В настоящей статье исследована задача о восстановлении (0,1)–матрицы по несколько более точной информации — длинам блоков из единиц в каждой линии. В статье введено понятие J–кода матрицы и рассмотрен один класс матриц, для которого найдены условия разрешимости и построен алгоритм восстановления. Также рассмотрены J–инварианты — функции от матриц, принимающие одинаковые значения для матриц с одним и тем же J–кодом.

Постановка задачи

Будем рассматривать (0,1)–матрицы. Под блоком, состоящим из единиц (далее — просто блоком), будем понимать максимальную последовательность из единиц в данной линии матрицы — строке или столбце. Для каждой строки и для каждого столбца выпишем длины блоков, содержащихся в данной линии. В результате получается *J–конфигурация*, которая в разговорном языке называется *японским кроссвордом* (см. раздел 5).

Пример. Ниже приведена (0,1)–матрица и соответствующая ей J–конфигурация:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{ccc|cccccc|}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
 & & & 6 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ \hline
 & 2 & 2 & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \\
 & 1 & 1 & \bullet & & & & & \bullet \\
 & 4 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\
1 & 1 & 1 & \bullet & & & \bullet & & \bullet \\
 & 1 & 2 & \bullet & & & \bullet & \bullet & \\
 & 4 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline
\end{array}
$$

[1]Карпухина Мария Игоревна, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; helge2000@mail.ru

[2]Коваленко Евгения Сергеевна, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; danajane@mail.ru

[3]Фролов Илья Сергеевич, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1; frolov@ssu.samara.ru

Данную J–конфигурацию можно закодировать в виде одной строчки:

$$(2,2;1,1;4,1;1,1,1;1,2;4,1\,|\,6;1,1,1;1,1;1,4;1,1;3,1).$$

Такую запись будем называть J–кодом матрицы.

Термин "конфигурация" в комбинаторном анализе обычно относится к произвольному семейству подмножеств некоторого конечного множества. Понятие J–конфигурации также можно было бы формализовать как произвольную упорядоченную систему подмножеств конечного упорядоченного множества. Однако в связи с тем, что мы будем рассматривать (0,1)–матрицы, а не системы различных представителей, строго определим и будем пользоваться в дальнейшем понятием J–кода.

Определение. Пусть в (0,1)–матрице $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ в i-й строке имеется k_i блоков из единиц длиной

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik_i}$$

соответственно, а в j-м столбце имеется l_j блоков из единиц длиной

$$\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots, \beta_{jl_j}$$

соответственно. Тогда *J–кодом* матрицы A будем называть запись вида

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1k_1}; \ldots; \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mk_m} \,|\, \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1l_1}; \ldots; \beta_{n1}, \beta_{n2}, \ldots, \beta_{nl_n}).$$

Очевидно, что J–код матрицы A обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \beta_{ij} = N,$$

где N — число единиц в матрице A.

Таким образом, левая часть J–кода (слева от символа "|") и правая его часть — *плоские композиции*[4] одного и того же числа N и могут быть представлены в виде двумерных таблиц из неотрицательных целых чисел, сумма которых равна N:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k_1} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l_1} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k_2} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l_2} \\
- & - & - & - & - & - & - & - \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mk_m} & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nl_n}.
\end{array}$$

Для выравнивания таблиц слева или справа можно добавить нули.

Обе таблицы, взятые в совокупности, будем называть *двойной плоской композицией.*

Особый интерес представляют следующие вопросы:

1. Условия разрешимости: при каких условиях двойная плоская композиция является J–кодом некоторой (0,1)–матрицы?
2. Алгоритм восстановления: как можно восстановить (0,1)–матрицу по заданному J–коду этой матрицы?
3. Условия единственности: при каких условиях на J–код соответствующая ему (0,1)–матрица единственна?

[4]Термин, аналогичный *плоским разбиениям* [5].

Рассмотрим класс $\mathfrak{M}(\alpha|\beta)$ (0,1)–матриц с фиксированным J–кодом $(\alpha|\beta)$. Приведенные выше вопросы могут быть переформулированы следующим образом.

При каких условиях на плоскую композицию $(\alpha|\beta)$ класс $\mathfrak{M}(\alpha|\beta)$ не пуст, а при каких — содержит единственную матрицу? В случае неоднозначности решения задачи восстановления интересен также вопрос об оценке числа матриц в классе $\mathfrak{M}(\alpha|\beta)$.

В настоящей работе рассматривается лишь одно семейство матриц (названных нами puddle–матрицами), для которых были найдены условия разрешимости и построен алгоритм восстановления. Помимо этого рассмотрены J–инварианты — функции от матрицы, постоянные на каждом классе $\mathfrak{M}(\alpha|\beta)$.

Следует отметить, что авторами построен и в общем случае алгоритм восстановления, однако не являющийся полиномиальным. Поиск же критериев разрешимости и единственности, а также оценка числа матриц в классе $\mathfrak{M}(\alpha|\beta)$ оказываются весьма трудными задачами и полностью не решены.

1. Задача Райзера

В [3] изучалась задача о восстановлении (0,1)–матрицы по ее векторам строчных сумм и столбцовых сумм. Изложим кратко некоторые ее аспекты.

Пусть (0,1)–матрица A размера $m \times n$ с числом единиц N содержит r_i единиц в i-й строке и s_j единиц в j-м столбце. Векторы $R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ и $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ называются соответственно *вектором строчных сумм* и *вектором столбцовых сумм*. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} s_j = N,$$

т.е. R и S представляют собой две композиции одного и того же числа N. Будем называть двойную композицию (R, S) *L–кодом* матрицы A.

Заданная двойная композиция (R, S) определяет класс $\mathfrak{A}(R, S)$, состоящий из всех (0,1)–матриц размера $m \times n$, имеющих вектор строчных сумм R и вектор столбцовых сумм S. При каких условиях на векторы R и S класс $\mathfrak{A}(R, S)$ не пуст? То, что векторы R и S должны образовывать двойную композицию одного и того же числа, не является достаточным условием, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $R = (5, 4, 1)$, $S = (3, 3, 2, 2)$. Любая (0,1)–матрица с L–кодом (R, S) должна содержать (после смещения всех единиц максимально влево и вверх) "уголок" вида:

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \end{matrix}$$

и, следовательно, число единиц должно удовлетворять неравенству $N \geq 11$.

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$ и $\overline{x}_1 \geq \overline{x}_2 \geq \ldots \geq \overline{x}_n$, $\overline{y}_1 \geq \ldots \geq \overline{y}_n$ — перестановки их координат по невозрастанию. Введем на $\mathbb{R}^n$ частичный порядок $\prec$. Будем говорить, что вектор Y мажорирует вектор X: $X \prec Y$, если

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \overline{y}_i \quad (k = 1, \ldots, n-1) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i.$$

Пусть $R = (r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbb{Z}^m$, $0 \leq r_i \leq n$. Положим

$$r_j^* = |\{i : r_i \geq j\}| \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Очевидно, если R — композиция числа N, то и $R^* = (r_1^*, \ldots, r_n^*)$ — композиция числа N. Класс $\mathfrak{A}(R, R^*)$ не пуст, ему принадлежит, как легко убедиться, матрица

$$A^* = (a_{ij}^*), \qquad a_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } r_i \geq j, \\ 0, & \text{если } r_i < j, \end{cases}$$

называемая *максимальной* матрицей с вектором строчных сумм R.

Теорема 1. Пусть $R = (r_1, \ldots, r_m)$ и $S = (s_1, \ldots, s_n)$ — два вектора с целыми неотрицательными компонентами. Класс $\mathfrak{A}(R, S)$ будет непустым тогда и только тогда, когда $S \prec R^*$ [3].

Рассмотрим преобразование, которое осуществляет перестановку диагоналей в подматрице 2×2 вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а все остальные элементы матрицы оставляет нетронутыми. Будем называть его *элементарным D–преобразованием* (в [3] такое преобразование названо "заменой").

Теорема 2. Пусть матрицы A и B принадлежат классу $\mathfrak{A}(R, S)$. Тогда матрица A может быть с помощью конечного числа элементарных D–преобразований приведена к матрице B [3].

2. Puddle–матрицы

Определение. (0,1)–матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ будем называть *puddle–матрицей*, если выполняются следующие два условия:

а) в любой строке существует ровно один непустой блок, состоящий из единиц;

б) в каждой последующей строке блок не может начинаться и кончаться левее соответственно начала и конца блока в предыдущей строке.

Puddle–матрицы могут быть рассмотрены с позиции теории разбиений [2]. Для удобства изложения под разбиением будем понимать последовательность целых неотрицательных чисел, упорядоченных по неубыванию:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_r.$$

Обозначим через $l(\lambda)$ число ненулевых частей разбиения λ.

Диаграммой разбиения λ будем называть множество точек

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \colon 1 \leq j \leq \lambda_i\},$$

причем примем соглашение о том, что i есть индекс строки, а j — индекс столбца.

Определение. Пусть одна из диаграмм содержит в себе другую: $\lambda \supset \mu$, т.е. $\lambda_i \geq \mu_i$, $1 \leq i \leq l(\mu)$. Тогда *косограммой* (косой диаграммой) $\lambda - \mu$ называется теоретико-множественная разность диаграмм λ и μ. *Транспонированная косограмма* $(\lambda - \mu)^* = \lambda^* - \mu^*$ получается при смене ролей строк и столбцов, причем, очевидно,

$$\lambda_i^* = \max\{j : \mu_j < i\}, \quad \mu_i^* = \max\{j : \lambda_j < i\}.$$

Косограмму $\lambda - \mu$ будем называть строгой, если неравенства $\lambda_i > \mu_i$ строгие.

Предложение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между множествами puddle–матриц и строгих косограмм.

Доказательство. Действительно, каждой косограмме $\lambda - \mu$ можно поставить в соответствие puddle–матрицу $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$, где $m = l(\lambda)$, $n = \lambda_m$, с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_i < j \le \lambda_i, \\ 0, & \text{если } j \le \mu_i \text{ или } j > \lambda_i. \end{cases}$$

Обратно, по матрице A косограмма $\lambda - \mu$ восстанавливается посредством формул:

$$\lambda_i = \max\{j : a_{ij} = 1\}, \quad \mu_i = \min\{j : a_{ij} = 1\} - 1.$$

Пример. Если $\lambda = (1,4,4,5)$, $\mu = (0,2,3,4)$, то косограмма $\lambda - \mu$ и соответствующая puddle–матрица имеют вид:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & & & & \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet & \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу о восстановлении puddle–матрицы (или соответствующей косограммы $\lambda - \mu$) по последовательности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_i = \lambda_i - \mu_i$, которую будем называть *боковым кодом* puddle–матрицы. Эта задача имеет единственное решение, если puddle–матрица удовлетворяет дополнительному условию нормальности.

Определение. Puddle-матрица без нулевых столбцов называется нормальной, если выполняется следующее условие: во всяких двух соседних строках матрицы либо левые, либо правые границы блоков из единиц совпадают:

$$\forall i \in [1, m-1]\, (\lambda_i = \lambda_{i+1} \text{ или } \mu_i = \mu_{i+1}).$$

Предложение 2. Нормальная puddle–матрица однозначно восстанавливается по своему боковому коду.

Доказательство. Действительно, значения λ_i, μ_i, $i = 1, \ldots, m$ могут быть вычислены с помощью формул:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \alpha_1,\ \mu_1 = 0; \\ &\lambda_{i+1} = \lambda_i,\ \mu_{i+1} = \lambda_i - \alpha_{i+1} = \mu_i + \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad \text{при } \alpha_{i+1} \le \alpha_i; \\ &\lambda_{i+1} = \mu_i + \alpha_{i+1} = \lambda_i + \alpha_{i+1} - \alpha_i,\ \mu_{i+1} = \mu_i \quad \text{при } \alpha_{i+1} \ge \alpha_i. \end{aligned}$$

Если условия нормальности не придерживаться, то puddle–матрица восстанавливается по боковому коду не единственным образом.

Предложение 3. В предположении, что матрица имеет фиксированный размер $m \times n$, число puddle–матриц с фиксированным боковым кодом равно C^m_{m+n-k}, где

$$k = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} \dot{-} \alpha_i) \qquad \left(x \dot{-} y = \frac{1}{2}(x - y + |x - y|) \right)$$

— число столбцов в нормальной puddle–матрице с данным боковым кодом.

Доказательство. Действительно, блок из единиц в каждой строке матрицы может быть сдвинут вправо относительно его положения в нормальной puddle–матрице. Пусть s_i — величина сдвига в i-й строке. Тогда должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \le n - k.$$

Число всех целых неотрицательных решений этого неравенства равно C^m_{m+n-k}.

Вернемся теперь к вопросу о разрешимости в применении к puddle–матрицам. При каких условиях двойная композиция является J–кодом puddle–матрицы? J–код (для рассматриваемого класса матриц он также является L–кодом), соответствующий косограмме $\lambda - \mu$, представляет собой двойную композицию числа N:

$$(a \mid b) = (a_1, \ldots, a_m \mid b_1, \ldots, b_n), \qquad a_1 + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_n = N,$$

причем $a_i = \lambda_i - \mu_i$, $b_j = \lambda^*_j - \mu^*_j$. Двойную композицию будем называть положительной, если все числа a_i, b_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, а также m и n положительны. Геометрически это означает, что соответствующая косограмма непустая и связная.

Определение. Последовательность $c_1, \ldots, c_n$ называется *унимодальной последовательностью с максимумом*, если существует k такое, что

$$c_1 \le \ldots \le c_{k-1} \le c_k \ge c_{k+1} \ge \ldots \ge c_n;$$

унимодальной последовательностью с минимумом, если существует k такое, что

$$c_1 \ge \ldots \ge c_{k-1} \ge c_k \le c_{k+1} \le \ldots \le c_n.$$

Теорема 3. J–код (0,1)–матрицы A является положительной двойной композицией

$$a_1 + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_n = N$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) в каждой линии есть единственный блок из единиц;

2) в каждой строке есть единственный блок из единиц, причем индексы начал блоков образуют унимодальную последовательность с минимумом, а индексы концов тех же блоков — унимодальную последовательность с максимумом;

3) в каждом столбце есть единственный блок из единиц, причем индексы начал блоков образуют унимодальную последовательность с минимумом, а индексы концов тех же блоков — унимодальную последовательность с максимумом.

Примечание. Таким образом, в данном случае, если $[s_i, S_i]$ — отрезок в i-й строке, в которой размещается блок из единиц, $[t_j, T_j]$ — отрезок в j-м столбце, в котором размещается блок из единиц, то $s_1, \ldots, s_m$ и $t_1, \ldots, t_n$ — унимодальные последовательности с минимумом, а $S_1, \ldots, S_m$ и $T_1, \ldots, T_n$ — унимодальные последовательности с максимумом.

Доказательство. То, что J–код (0,1)–матрицы A является положительной двойной простой (а не плоской) композицией, очевидно, равносильно условию 1).

Докажем, что условие 1) влечет 2) от противного. Пусть последовательность индексов, скажем, начал блоков в строках не является унимодальной последовательностью с минимумом. Тогда имеется по крайней мере два локальных минимума. Следовательно, непременно найдется столбец, содержащий более одного блока из единиц.

Докажем, что условие 2) влечет 1). Пусть последовательности индексов s_i и S_i $(i = 1, \ldots, m)$ являются унимодальными, т.е. для некоторых l и k:

$$S_1 \le \ldots \le S_{l-1} \le S_l \ge S_{l+1} \ge \ldots \ge S_n,$$
$$s_1 \ge \ldots \ge s_{k-1} \ge s_k \le s_{k+1} \le \ldots \le s_n.$$

Положим $t_j = \min\{t \colon s_t \le j \le S_t\}$, $T_j = \max\{T \colon s_T \le j \le S_T\}$ и докажем, что эти два числа являются индексами начала и конца единственного блока из единиц в j-м столбце.

Действительно, пусть индекс i таков, что $t_j \le i \le T_j$. Поскольку имеет место одно из неравенств $t_j \le k$ или $T_j \ge k$, то верно $s_{t_j} \ge s_i$ либо $s_i \le s_{T_j}$, так что в любом случае $s_i \le j$. Аналогично из справедливости $t_j \le l$ или $T_j \ge l$ заключаем $S_i \ge S_{t_j}$ или $S_i \ge S_{T_j}$; следовательно, $S_i \ge j$. Полученное неравенство $s_i \le j \le S_i$ показывает, что значение элемента $a_{ij} = 1$.

Пусть теперь $i < t_j$ или $i > T_j$. Тогда в обоих случаях $j < s_i$ или $j > S_i$, а это влечет за собой равенство $a_{ij} = 0$.

Итак, $[t_j, T_j]$ — единственный блок из единиц в j-м столбце.

Равносильность условий 1) и 3) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Определение. Производной от положительной двойной композиции $(a \mid b)$ назовем двойную композицию вида:

$$(a \mid b)' = (a_2 - 1, \ldots, a_{b_1} - 1, a_{b_1+1}, \ldots, a_m \mid b_2 - 1, \ldots, b_{a_1} - 1, b_{a_1+1}, \ldots, b_n),$$

т.е. $(a \,|\, b)' = (a' \,|\, b')$, где

$$a'_i = \begin{cases} a_{i+1} - 1, & \text{если } i \le b_1 - 1, \\ a_{i+1}, & \text{если } i > b_1 - 1, \end{cases} \qquad b'_j = \begin{cases} b_{j+1} - 1, & \text{если } j \le a_1 - 1, \\ b_{j+1}, & \text{если } j > a_1 - 1. \end{cases}$$

Очевидно, для существования производной от положительной двойной композиции $(a \mid b)$ необходимо и достаточно выполнения условий:

$$a_1 \le n, \ b_1 \le m.$$

Если при взятии производной композиция a или b начинается с нулей, то при дальнейшем подсчете эти нули не учитываются.

Последовательность производных композиций образует производный ряд:

$$(a \mid b), \ (a \mid b)', \ (a \mid b)'', \ldots, (a \mid b)^{(r)},$$

где

$$(a \mid b)^{(k)} = \Big((a \mid b)^{(k-1)}\Big)'.$$

Ряд обрывается на r-м члене, если не существует производной от двойной композиции $(a \mid b)^{(r)}$. Очевидно, что $r \le \min(m, n)$. Назовем производный ряд *правильным*, если его последний член содержит пустую композицию, т.е. имеет вид $(\ \mid 0, \ldots, 0)$ или $(0, \ldots, 0 \mid \ )$.

Теорема 4. Положительная двойная композиция $(a \,|\, b)$ является J–кодом некоторой puddle–матрицы тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1) производный ряд $(a \,|\, b), \ (a \,|\, b)', \ldots$ является правильным;

2) при переходе от $(a \,|\, b)^{(k)}$ к $(a \,|\, b)^{(k+1)}$ имеет место неравенство

$$a_1^{(k+1)} \ge a_1^{(k)} - s - 1,$$

где s неотрицательно и определяется из соотношений

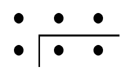
$$b_1^{(k+1)} = \ldots = b_s^{(k+1)} = 0, \ b_{s+1}^{(k+1)} \ne 0.$$

Доказательство. Предположим, что положительная двойная композиция $(a \mid b)$ кодирует некоторую puddle–матрицу, и докажем выполнение условий 1) и 2). Производная композиция $(a \mid b)'$ кодирует подматрицу, получаемую вычеркиванием первой строки и первого столбца. Такому вычеркиванию соответствует удаление первых элементов a_1 и b_1 обеих композиций, при этом в последующих b_1-1 строках и a_1-1 столбцах размеры блоков из единиц уменьшаются на 1.

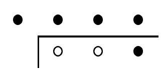
Код получившейся матрицы может содержать нули только в начальных элементах одной из своих компонент. Тем более, отрицательные элементы в коде появиться не могут.

На последнем шаге композиция имеет вид $(z\,|\,\underbrace{1,\dots,1}_{z})$ или, наоборот, $(\underbrace{1,\dots,1}_{z}\,|\,z)$. Производные к этим двойным композициям соответственно есть $(\ |\ \underbrace{0,\dots,0}_{z-1})$, или $(\underbrace{0,\dots,0}_{z-1}\ |\ )$, или $(\ |\ )$ — при $z=1$, так что производный ряд кода такой матрицы является правильным.

Для доказательства второго условия положим, без ограничения общности, $k=0$. Тогда $a_1=\lambda_1$, $\mu_1=0$, $a_2=\lambda_2-\mu_2$, $\lambda_2\ge\lambda_1$, $\mu_2\ge\mu_1$ по определению puddle–матрицы. Если $b_1>1$, то элемент матрицы $a_{21}=1$; поэтому $\mu_2=0$, $a_2=\lambda_2\ge a_1$ и $a_1'=a_2-1\ge a_1-1$.



Если $b_1=1$, то во второй строке матрицы нулевым может быть не только элемент a_{21}, но и несколько следующих за ним, а именно всего s. В этом случае $b_1'=\ldots=$ $=b_s'=0$, $b_{s+1}'\ne0$; следовательно, $\mu_2=s+1$, $a_2=\lambda_2-s-1$ и $a_1'=a_2\ge a_1-s-1$.



Теперь предположим, что $(a\,|\,b)$ — двойная композиция, производный ряд которой удовлетворяет обоим условиям теоремы, и построим матрицу A, для которой данная композиция является J–кодом. Первые элементы композиций a_1 и b_1 соответственно определяют длины блоков из единиц в первой строке и первом столбце. Остается получить минор матрицы A_{11}, которому соответствует производная двойная композиция $(a\,|\,b)'$. Здесь следует учесть особый случай, когда одна из композиций начинается с нулей. Пусть, например, $b_1'=\ldots=b_s'=0$. Тогда вычеркиванию этих s нулей из композиции b соответствует вычеркивание, кроме первого столбца, еще s последующих.

По построению матрицы A выполняются условия из определения puddle–матрицы. Действительно, при переходе к следующей строке блок из единиц сдвигается так, что его начало и конец приходятся во всяком случае не левее начала и конца предыдущей строки соответственно. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы извлекается очевидный алгоритм построения J–конфигурации.

Пример. Для двойной композиции $(a\,|\,b)=(2,4,3,3\,|\,2,3,3,3,1)$ получим производный ряд:

$$
\begin{array}{lcllllclllll}
(a\,|\,b) & = & (\underline{2} & 4 & 3 & 3 & | & \underline{2} & 3 & 3 & 3 & 1), \\
(a\,|\,b)' & = & (& \underline{3} & 3 & 3 & | & & \underline{2} & 3 & 3 & 1), \\
(a\,|\,b)'' & = & (& & \underline{2} & 3 & | & & & \underline{2} & 2 & 1), \\
(a\,|\,b)''' & = & (& & & \underline{2} & | & & & & \underline{1} & 1), \\
(a\,|\,b)^{(4)} & = & (& & & & | & & & & & 0),
\end{array}
$$

что позволяет восстановить J–конфигурацию:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \\
\hline
2 & \bullet & \bullet & & & \\
4 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
3 & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
3 & & & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

Еще один алгоритм базируется на следующем результате.

Предложение 4. Если двойная композиция $(a\,|\,b)$ является J–кодом puddle–матрицы и $a = \lambda - \mu$, то

$$\mu_i = \min\{j : (b_j + \sum_{k=1}^{i-1} [j > \lambda_k]) \geq i\} - 1 \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Примечание. Здесь мы используем обозначение Айверсона [1]: если P — некоторый предикат, то

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ выполняется,} \\ 0, & \text{если } P \text{ не выполняется.} \end{cases}$$

Доказательство. Мы исходим из того, что каждая строка содержит блок из единиц. Это, в частности, относится и к первой строке, в которой блок должен начинаться в столбце $\min\{j\colon\ b_j \geq 1\}$. Тогда $\mu_1 = \min\{j\colon\ b_j \geq 1\} - 1$. Для второй строки следует учесть возможность того, что начало блока в ней может являться и началом блока в соответствующем столбце, т.е.

$$\mu_2 = \min\bigl\{j : b_j \geq 2, \text{ если } j \leq \lambda_1;\ b_j + 1 \geq 2, \text{ если } j > \lambda_1\bigr\} - 1 =$$
$$= \min\{j : b_j + [j > \lambda_1] \geq 2\} - 1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\mu_3 = \min\{j : b_j + [j > \lambda_1] + [j > \lambda_2] \geq 3\} - 1$$

и т.д.

Алгоритм восстановления косограммы $\lambda - \mu$ и сопряженной к ней $\sigma - \tau$ по двойной композиции $(a\,|\,b)$ состоит из следующих шагов:

1) $\forall j : s_j := b_j$;

2) $\forall i : \mu_i := \min\{j : s_j \geq i\} - 1$,
$\lambda_i := \mu_i + a_i$,
$\forall j > \lambda_i :\ s_j := s_j + 1$;

3) $\forall j : \sigma_j := s_j,\ \ \tau_j := \sigma_j - b_j$.

В результате оказываются выполненными равенства $a_i = \lambda_i - \mu_i,\ b_j = \sigma_j - \tau_j$.

Пример. Применим алгоритм к $(a\,|\,b) = (2, 1, 3, 4\,|\,1, 1, 3, 2, 2, 1)$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & & & s = 1,1,3,2,2,1 \\
2 & \bullet & \bullet & & & & & \mu_1 = 0 & \lambda_1 = 2 & s = 1,1,4,3,3,2 \\
1 & & & \bullet & & & & \mu_2 = 2 & \lambda_2 = 3 & s = 1,1,4,4,4,3 \\
3 & & & \bullet & \bullet & \bullet & & \mu_3 = 2 & \lambda_3 = 5 & s = 1,1,4,4,4,4 \\
4 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \mu_4 = 2 & \lambda_3 = 6 & s = 1,1,4,4,4,4.
\end{array}
$$

3. Инварианты J–конфигурации

Напомним, что элементарное D–преобразование осуществляет перестановку диагоналей в подматрице 2×2, а все остальные элементы матрицы оставляет нетронутыми. Произведение нескольких элементарных D–преобразований будем называть *D–преобразованием.*

Теорема 5. Для любых двух (0,1)–матриц с одинаковым J–кодом существует D-преобразование, переводящее одну из них в другую.

Доказательство. Пусть матрицы A и B имеют одинаковый J–код. Тогда они обладают тем более одинаковым L–кодом и, следовательно, относятся к одному и тому же классу Райзера $\mathfrak{A}(R,S)$. Таким образом, применима теорема 2.

Обозначим через E_{ij} матрицу, в которой все элементы равны нулю, кроме одного: $e_{ij}=1$; $E_i = E_{ii}$. Пусть умножение на матрицу P_{ik} осуществляет перестановку i-й и k-й линий. Тогда справедливо равенство $E - P_{ik} = E_i + E_k - E_{ik} - E_{ki}$.

Необходимое нам элементарное D–преобразование можно выполнить с помощью следующей последовательности шагов.

1. Выделение минора $A_{ik,jl}$: $A_{ik,jl} = (E_i + E_k)A(E_j + E_l)$.

2. Перестановка строк i и k: $P_{ik}A_{ik,jl}$ или

$2'$. Перестановка столбцов j и l: $A_{ik,jl}P_{jl}$.

3. Маскировка: $A^m = A - A_{ik,jl}$.

4. Восстановление: $A^p = A^m + P_{ik}A_{ik,jl} = A - (E - P_{ik})A_{ik,jl}$.

Таким образом, в результате одного элементарного D–преобразования $p(i,k;j,l)$ получаем новую матрицу

$$A_1 = p(i,k;j,l)A = A - H_{ik}AK_{jl},$$

где $H_{ik} = E_i + E_k - E_{ik} - E_{ki}$, $K_{jl} = E_j + E_l$. Если вместо шага 2 используется шаг $2'$, то $A_1 = A - K_{ik}AH_{jl}$.

В результате выполнения двух последовательных элементарных D–преобразований $p(i,k;j,l)$ и $p(s,t;q,r)$ получим:

$$A_2 = p(s,t;q,r)p(i,k;j,l)A = A - H_{ik}AK_{jl} - H_{st}AK_{qr} + H_{st}H_{ik}AK_{jl}K_{qr}.$$

Исследуем произведения матриц вида K_{jl} и матриц вида H_{ik}. Прежде всего заметим, что $E_{ik}E_{kj} = E_{ij}$, $E_{ik}E_{lj} = 0$ при $k \neq l$. Далее,

$$K_{jl}K_{qr} = \begin{cases} 0, & \text{если } \{j,l\} \cap \{q,r\} = \varnothing, \\ E_i, & \text{если } \{j,l\} \cap \{q,r\} = i, \\ K_{jl}, & \text{если } \{j,l\} = \{q,r\}. \end{cases}$$

В общем случае произведение матриц вида K_{jl} имеет вид

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} K_{j_\gamma l_\gamma} = \sum_{i \in \Delta} E_i, \qquad \Bigl(\Delta = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{j_\gamma, l_\gamma\}\Bigr).$$

Более сложными являются произведения матриц вида H_{ik}. Заметим, что эти матрицы симметричны относительно своих индексов: $H_{ik} = H_{ki}$. Имеем

$$H_{st}H_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } \{i,k\} \cap \{s,t\} = \varnothing, \\ H_{itk}, & \text{если } \{i,k\} \cap \{s,t\} = i = s, \\ 2H_{ik}, & \text{если } \{i,k\} = \{s,t\}, \end{cases}$$

где $H_{itk} = H_{it}H_{ik} = E_i + E_{tk} - E_{ik} - E_{ti}$. Введем, кроме матрицы H_{itk}, матрицу $H_{ik,jl} = E_{ij} + E_{kl} - E_{il} - E_{kj}$, характеризующуюся наличием подматрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в строках $i,\ k$ и столбцах $j,\ l$.

Легко проверить, что выполняются следующие соотношения:

$$H_{it}H_{ik} = H_{itk} = H_{it,ik}, \quad H_{it}H_{ik}H_{is} = H_{its} = H_{it,is},$$
$$H_{it}H_{ik}H_{it} = H_{it}, \quad H_{it}H_{ik}H_{sk} = H_{it,sk}, \quad H_{it}H_{ik}H_{st} = 0.$$

Отметим также формулы:

$$H_{ik} = H_{ik,ik}, \quad (H_{ik})^2 = 2H_{ik}, \quad (H_{it,ik})^2 = H_{it,ik} \ \ (t \neq k),$$
$$(H_{it,sk})^2 = 0 \ \ (\{i,t\} \cap \{s,k\} = \varnothing);$$

симметрия относительно индексов для матриц $H_{ik,jl}$ выражается равенствами:

$$H_{ik,jl} = H_{ki,lj}, \quad H_{ik,jl} = -H_{ki,jl} = -H_{ik,lj}, \quad H_{ik,jl} = (H_{jl,ik})^{\mathrm{T}}.$$

В общем случае произведение матриц вида H_{ik} имеет вид

$$\prod_{\gamma=1}^{q} H_{i_\gamma k_\gamma} = (-1)^\alpha\, 2^\beta\, H_{i_1 k_1, i_q k_q},$$

если в последовательности пар индексов $(i_1, k_1), (i_2, k_2), \ldots, (i_q, k_q)$ каждые две соседние пары имеют хотя бы один общий элемент:

$$\{i_\gamma, k_\gamma\} \cap \{i_{\gamma+1}, k_{\gamma+1}\} \neq \varnothing \qquad (1 \leq \gamma < q);$$

если же это условие не выполняется, то данное произведение обращается в нуль. Числа α и β определяются следующим образом. Будем говорить, что соседние пары образуют *соседство*. Число β равно числу соседств идентичных (если не учитывать порядок элементов) пар. Число α равно числу соседств, в которых общий элемент (или оба общих элемента) находится в различном положении, т.е. числу таких пар $(i_\gamma, k_\gamma),\ (i_{\gamma+1}, k_{\gamma+1})$, что $i_\gamma = k_{\gamma+1}$ и/или $k_\gamma = i_{\gamma+1}$.

Пусть $A = (a_{ik})$ — (0,1)–матрица размера $m \times n$.

Определение. *J–инвариантом* будем называть функцию, определенную на множестве всех (0,1)–матриц и принимающую одинаковые значения на матрицах с одним и тем же J–кодом. Аналогично определим понятие *L–инварианта*.

Допуская некоторую вольность в рассуждении, заменим (0,1)–матрицу на шахматную доску того же размера, называя клетки доски, соответствующие единицам матрицы, темными, а соответствующие нулям — светлыми. Важную роль в дальнейшем будет играть ладья — шахматная фигура, которая атакует вдоль горизонтальных и вертикальных линий шахматной доски. Задача о ладьях состоит в определении числа способов расположения на шахматной доске k не угрожающих друг другу ладей [4].

Определение. *Числом распространения* τ_{ij} темной клетки, находящейся в i-й строке и j-м столбце, будем называть число темных клеток (включая данную), находящихся под ударом ладьи, стоящей в данной клетке (белые клетки являются непреодолимыми препятствиями для ладьи). Построим, исходя из (0,1)–матрицы A, матрицу $T = (\tau_{ij})$, где $\tau_{ij} = 0$ при $a_{ij} = 0$. Если $a_{ij} = 1$, то τ_{ij} равно уменьшенной на единицу сумме блоков, в которых находится элемент a_{ij}. Числом распространения τ матрицы A будем называть сумму всех отдельных чисел распространения

$$\tau = \sum_{a_{ij}=1} \tau_{ij}.$$

Пример. Ниже приведены (0,1)–матрица A и соответствующая ей матрица T; число распространения $\tau = 100$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. Число распространения τ является J–инвариантом.

Доказательство. Пусть $(\alpha \mid \beta)$ — J–код (0,1)–матрицы A, $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\beta = (\beta_{ij})$, $\sum \alpha_{ij} = \sum \beta_{ij} = N$. Рассмотрим находящийся в i-й строке k-й горизонтальный блок. Размер этого блока есть α_{ik} и для каждой его единицы число "горизонтального" распространения равно α_{ik}. То же самое относится и к находящемуся в j-м столбце l-му вертикальному блоку размера β_{jl}. Однако каждая единица матрицы A будет учитываться при этом дважды. Поэтому

$$\tau = \sum_{i,k} \alpha_{ik}^2 + \sum_{j,l} \beta_{jl}^2 - N,$$

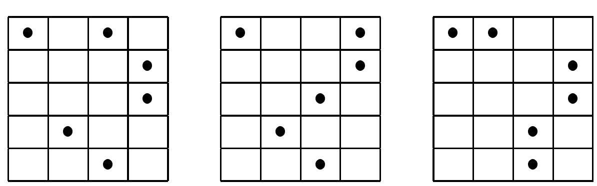
и, таким образом, τ зависит лишь от J–кода матрицы A.

Определение. *Ладейным числом* ρ_k (0,1)–матрицы A называется число способов размещения k не угрожающих друг другу ладей на темных клетках доски, соответствующей матрице A. *Ладейным многочленом* называется производящая функция ладейных чисел:

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{m} \rho_k x^k,$$

причем $\rho_0 = 1$. Ладейные числа и ладейные многочлены не являются L–инвариантами, как показывает следующий пример.

Пример. Из трех J–конфигураций



первые две имеют одинаковый J–код, третья же имеет общий с ними L–код. В то время как

$$\mathrm{P}_1(x) = \mathrm{P}_2(x) = 1 + 6x + 12x^2 + 9x^3 + 2x^4,$$

имеется различие:

$$\mathrm{P}_3(x) = 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3.$$

4. Алгоритм восстановления

Предложенный далее алгоритм справедлив для любых (0,1)–матриц.

Каждому блоку в каждой линии поставим в соответствие четыре числа L, l, r, R — его виртуальные границы. Основными границами являются L и R, которые показывают для блока минимально возможное положение левого конца и максимально возможное положение правого конца соответственно. Границы l и r являются вспомогательными. Истинные же границы блока содержатся в промежутках $[L, l]$ и $[r, R]$.

При вычислении L и R суммируются длины предыдущих и последующих блоков соответственно, причем учитывается, что между двумя соседними блоками должна находиться как минимум одна светлая клетка. Для i-го блока в j-й линии справедливы следующие соотношения:

$$L_i = \sum_{k=1}^{i-1}(a_k+1)+1, \quad R_i = p - \sum_{k=i+1}^{p_j}(a_k+1),$$
$$l_i = R_i - a_i + 1, \quad r_i = L_i + a_i - 1,$$

где a_i — длина i-го блока, p — длина линии, p_j — количество блоков в j-й линии.

Очевидно, если для блока выполняется соотношение $l \le r$, то клетки с номерами от l до r должны быть темными независимо от истинного положения блока. Целью алгоритма является изменение границ по определенным правилам до тех пор, пока не будут выполнены соотношения $L = l$ и $R = r$. После начального подсчета границ некоторые клетки окажутся темными. Если на некотором шаге клетки закрашиваются за счет выполнения соотношения $l \le r$ для блоков, находящихся в строках, то следует проверять попадание этих клеток в границы блоков, находящихся в соответствующих столбцах.

Отрезки $[L_i, R_i]$ могут пересекаться друг с другом, поэтому появившаяся закрашенная клетка может попасть сразу в несколько таких отрезков. Если клетка попадает только в один отрезок $[L_i, R_i]$, то можно с уверенностью говорить о принадлежности этой клетки соответствующему блоку. В таком случае границы этого блока изменяются в соответствии с формулами

$$L_i = r_i - a_i + 1, \quad R_i = l_i + a_i - 1.$$

Поскольку справедливы соотношения:

$$L_{i+1} = \max(r_i + 2, L_{i+1}), \quad R_{i-1} = \min(l_i - 2, R_{i-1}),$$

изменение границ одного блока закономерно влечет изменение границ соседних.

В случае, если для границ выполняется соотношение $R_i + 1 < L_{i+1}$, клетки с $R_i + 1$ до $L_{i+1} - 1$ должны быть светлыми. Аналогично темным клеткам светлые также влияют на изменение границ с той разницей, что светлые клетки проверяются на попадание в отрезки $[r_i, l_{i+1}]$. При этом границы меняются по аналогичным формулам.

Процесс выявления темных и светлых клеток продолжается до тех пор, пока возможны какие-либо изменения границ. После его окончания может оказаться, что не для всех блоков выполняются соотношения $L = l$ и $R = r$, т.е. положение не всех блоков определено. Чтобы и в таком случае восстанавливать J–конфигурацию, используется метод ветвей и границ. Находится клетка, для которой не было решено: светлая она или темная. Эта клетка закрашивается, соответственно происходит смена границ, позволяющая снова производить описанные выше действия. Данный выбор ведет к построению различных ветвей решения. Отсечение решения производится, когда полученный рисунок не будет соответствовать заданному J–коду. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдена J–конфигурация, соответствующая заданному J–коду.

5. Приложение. Японские кроссворды

Идея настоящей работы возникла при обсуждении авторами одной весьма популярной в настоящее время головоломки, известной под названием "Японские кроссворды". Предлагаем краткий исторический экскурс.

История использования сеток с числами в головоломках достаточно велика. Еще в начале двадцатого века они использовались как дополнительное задание к обычному кроссворду, чтобы закрасить "лишние" клеточки.

В 1987 году дизайнер-оформитель Нон Исида (Non Ishida) выиграла конкурс в Токио на разработку рисунка, составленного с использованием света окон небоскреба. Это натолкнуло ее на идею о создании головоломки, основанной на закрашивании нужных клеточек в сетке, составляя тем самым рисунок. В 1988 году она опубликовала первые три головоломки, назвав их "Оконное искусство" ("Window Art"). Так как первыми зашифрованными рисунками явились иероглифы, т.е. слоги или слова японского языка, то позднее эти головоломки получили название "Японских кроссвордов". Приблизительно в то же время и совершенно независимо Тецуя Нисио (Tetsuya Nishio) также опубликовал подобные головоломки под названием "Paint by Numbers".

В 1989 году Нон Исида показала "Оконное искусство" Джеймсу Дэлгети (James Dalgety), который высоко оценил ее головоломку и предложил ей коммерческое сотрудничество. Вскоре первые "нонограммы" ("Nonograms") стали еженедельно появляться на страницах воскресного приложения популярнейшей британской газеты "The Telegraph". В 1993 году благодаря крупнейшей японской газете "Mainich" нонограммы вернулись в Японию. В том же году вышел первый сборник головоломок, изданный в Великобритании издательством "Pan Books", а также японский аналог этой книги.

К 1995 году было издано четыре книги нонограмм, но, к сожалению, в 1996 году Нон Исида прекратила свое сотрудничество с "The Telegraph", и нонограммы стали называться "гриддлерами" ("Griddlers").

В настоящее время японские кроссворды (или нонограммы, гриддлеры, "Paint-by-Numbers", "Oekaki puzzle", "Picross") популярны во всем мире, в том числе и в России.

Литература

[1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998. 703 с.

[2] Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985. 224 с.

[3] Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966. 154 с.

[4] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 288 с.

[5] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

J–CONFIGURATIONS OF (0,1)–MATRICES AND THEIR INVARIANTS

© 2001 M.I. Karpukhina,[5] E.S. Kovalenko,[6] I.S. Frolov[7]

One of the consequences of the well-known Holl's theorem on transversals is Ryser's theorem which asserts the existence of a (0,1)–matrix with given vectors of row sums and column sums.

The paper deals with the (0,1)–matrix recovery problem by using more exact information, namely the lengths of blocks consisting of 1's in every line. The notion of matrix J–code is introduced and a family of matrices is examined for which the conditions of solvability are discovered and the algorithm of recovery is constructed. Also J–invariants, i.e. matrix functions which have equal values for matrices with the same J–code, are examined.

Поступила в редакцию $20/IV/2001$;
в окончательном варианте — $7/VI/2001$.

[5]Karpukhina Maria Igorevna, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia; helge2000@mail.ru

[6]Kovalenko Eugenia Sergeevna, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia; danajane@mail.ru

[7]Frolov Ilya Sergeevich, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia; frolov@ssu.samara.ru