

ПОЛУПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОМЕНТЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

В.И. Курочкин, С.А. Большев, С.В. Цаплин¹

Аннотация

Рассчитаны значения интегральных скобок для разрывных функций скоростей в случае степенного потенциала и потенциала твердых сфер. С использованием точного интеграла столкновений Больцмана получено решение задачи о температурном скольжении неоднородно нагретого газа вблизи твердой поверхности.

При течениях газов и газовых смесей вблизи поверхности, а также в задачах теплообмена и испарения-конденсации функция распределения частиц по скоростям вблизи поверхности (в так называемом слое Кнудсена) является, как правило, разрывной в пространстве скоростей. При решении стационарного кинетического уравнения в таких случаях функцию распределения представляют в виде ряда

$$f = f_0 \left[1 + \sum_{i,j,k} a_{ijk}^+ W_i(c_z) H_j(c_x) H_k(c_y) \theta(c_z) + \sum_{i,j,k} a_{ijk}^- W_i(c_z) H_j(c_x) H_k(c_y) \theta(-c_z) \right], \quad (1)$$

где $f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\pi kT}}$ - максвелловская функция, коэффициенты a_{ijk}^\pm являются функциями координаты z (расстояния от поверхности), W_i и H_i - полиномы от соответствующих компонент скорости (например - полиномы Эрмита), а θ - функция Хэвисайда. Коэффициенты a_{ijk}^\pm находятся из соответствующих уравнений переноса. Основной сложностью при выводе уравнений переноса является вычисление интегралов от интеграла столкновений в форме Больцмана или интегральных скобок вида

$$[\psi, \phi] = \frac{1}{n^2} \int f_0 f_{01} (\psi' + \psi'_1 - \psi - \psi_1) (\phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1) g d\sigma d\mathbf{c} d\mathbf{c}_1, \quad (2)$$

где ψ и ϕ могут содержать ступенчатую функцию $\text{sign}(c_z)$. В настоящее время рассчитаны только несколько простых интегральных скобок, содержащих $\text{sign}(c_z)$ для модели жестких сферических молекул. В данной работе рассчитаны все основные интегральные скобки, содержащие ступенчатую функцию для моделей взаимодействия частиц - твердых сфер и точечных центров отталкивания.

¹Курочкин Виктор Иванович, Большев Станислав Александрович, Цаплин Сергей Васильевич, кафедра физики твердого тела Самарского государственного университета

Модель потенциала точечных центров отталкивания описывается формулой

$$\phi(r) = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^\nu. \quad (3)$$

Показатель ν является мерой жесткости или мягкости молекул. При $\nu = \infty$ эта модель сводится к модели твердых сфер. Модель с конечным ν описывает естественную <сжимаемость> молекул. Для большинства молекул ν имеет значение между 9 (<мягкие> молекулы) и 15 (<жесткие> молекулы). Одно из преимуществ этой потенциальной функции заключается в том, что угол отклонения, являющийся функцией b и g , может быть выражен через единственную комбинацию этих двух переменных

$$\rho = \frac{b}{\sigma} \left(\frac{1/2\mu g^2}{\nu\epsilon_0} \right)^{1/\nu}. \quad (4)$$

Зависимость $\chi = \chi(\rho)$ находится численно [1].

Будем рассматривать интегральную скобку в следующем виде [2]:

$$[\phi, \psi] = \frac{1}{n_0^2} \int \psi f_0 f_{01} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi'_1) g b d b d \mathbf{v} d \mathbf{v}_1, \quad (5)$$

где $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|$ - относительная скорость двух сталкивающихся молекул, b - прицельный параметр столкновения, ϵ - азимутальный угол рассеяния.

Введем безразмерные скорости сталкивающихся частиц

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{v_T}, \quad \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{v_T}, \quad (6)$$

где $v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ - тепловая скорость движения молекул.

Перейдем в систему, связанную с центром масс движущихся частиц: \mathbf{G} - безразмерная скорость центра масс, γ - безразмерная относительная скорость двух сталкивающихся частиц

$$\mathbf{G} = \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})}{\sqrt{2}v_T}, \quad \gamma = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})}{\sqrt{2}v_T}. \quad (7)$$

Тогда

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{G} - \gamma), \quad \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{G} + \gamma), \quad (8)$$

и следовательно

$$f_0 f_{01} = n_0^2 \left(\frac{1}{\pi v_T^2} \right)^3 e^{-G^2 - \gamma^2}, \quad d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = v_T^6 d\mathbf{G} d\gamma. \quad (9)$$

Далее вводя безразмерную температуру

$$\tau = \frac{kT}{\epsilon_0}, \quad (10)$$

в соответствии с (4) и (10) будем иметь

$$b d b d \epsilon = \sigma^2 \gamma^{-4/\nu} \left(\frac{\tau}{\nu} \right)^{-2/\nu} \rho d \rho d \epsilon. \quad (11)$$

Подставляя введенные переменные в выражение (5) и обозначая длину свободного пробега как $\lambda = \left(\sqrt{2} n_0 \sigma^2 \left(\frac{T}{\nu} \right)^{-2/\nu} \right)^{-1}$, имеем

$$[\phi, \psi] = \frac{v_T}{n_0^2 \pi^4 \lambda} \int \psi f_0 f_{01} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi'_1) e^{-G^2 - \gamma^2} \gamma^{1-4/\nu} \rho d\rho d\epsilon d\mathbf{G} d\gamma. \quad (12)$$

Для безразмерной относительной скорости γ введем сферические координаты

$$\gamma = \gamma (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha), \quad (13)$$

здесь $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < 2\pi$.

При столкновении двух частиц скорость центра инерции не меняется, а относительная скорость меняется только по направлению. Компоненты относительной скорости после столкновения имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma' = \gamma & (\cos \alpha \cos \beta \sin \chi \cos \epsilon - \sin \beta \sin \chi \sin \epsilon + \sin \alpha \cos \beta \cos \chi, \\ & \cos \alpha \sin \beta \sin \chi \cos \epsilon + \cos \beta \sin \chi \sin \epsilon + \sin \alpha \sin \beta \cos \chi, \\ & \cos \alpha \cos \chi - \sin \alpha \sin \chi \cos \epsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

где χ - угол рассеяния.

Введем новые переменные

$$G_x = \gamma x, \quad G_y = \gamma y, \quad G_z = \gamma z, \quad (15)$$

тогда

$$d\mathbf{G} d\gamma = \gamma^5 \sin \alpha d\alpha d\gamma d\beta dx dy dz. \quad (16)$$

Также удобно ввести переменную

$$t = \cos \alpha, \quad dt = -\sin \alpha d\alpha. \quad (17)$$

И окончательно имеем

$$[\phi, \psi] = \frac{v_T}{n_0^2 \pi^4 \lambda} \int \psi f_0 f_{01} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi'_1) \gamma^{6-4/\nu} e^{-\gamma^2(1+x^2+y^2+z^2)} d\gamma dt d\beta dx dy dz \rho d\rho d\epsilon. \quad (18)$$

Для расчетов удобно ввести безразмерную интегральную скобку следующим образом:

$$\overline{[\phi, \psi]} = \pi^{-7/2} \int \psi f_0 f_{01} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi'_1) \gamma^{6-4/\nu} e^{-\gamma^2(1+x^2+y^2+z^2)} d\gamma dt d\beta dx dy dz \rho d\rho d\epsilon. \quad (19)$$

Тогда размерная и безразмерная интегральные скобки связаны следующим выражением:

$$[\phi, \psi] = \frac{v_T}{n_0} \pi^{-3/2} \frac{\pi}{\lambda} \overline{[\phi, \psi]}. \quad (20)$$

При вычислении интегральных скобок сначала аналитически выполняется интегрирование по x , y и β , далее по переменным γ и z интегрирование выполняется аналитически для модели твердых сфер и численно для степенного потенциала, и наконец, производится численное интегрирование по переменным t , ρ и ϵ .

Приведем пример расчета интегральной скобки $\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z]}$.

Распишем подынтегральную функцию

$$\begin{aligned} & c_x \operatorname{sign} c_z (c_x \operatorname{sign} c_z + c_{x1} \operatorname{sign} c_{z1} - c'_x \operatorname{sign} c'_z - c'_{x1} \operatorname{sign} c'_{z1}) = \\ & = \frac{\gamma^2}{2} \{ (x - x_1(\alpha, \beta)) \operatorname{sign}(z - z_1(\alpha)) [(x - x_1(\alpha, \beta)) \operatorname{sign}(z - z_1(\alpha)) + \\ & + (x + x_1(\alpha, \beta)) \operatorname{sign}(z + z_1(\alpha))] - (x - x_2(\alpha, \beta, \chi, \epsilon)) \operatorname{sign}(z - z_2(\alpha, \chi, \epsilon)) - \\ & - (x + x_2(\alpha, \beta, \chi, \epsilon)) \operatorname{sign}(z + z_2(\alpha, \chi, \epsilon)) \}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} & c_x \operatorname{sign} c_z (c_x \operatorname{sign} c_z + c_{x1} \operatorname{sign} c_{z1} - c'_x \operatorname{sign} c'_z - c'_{x1} \operatorname{sign} c'_{z1}) = \\ & = \frac{\gamma^2}{2} \{ \operatorname{sign}(z - z_1(\alpha)) [(x^2 - 2x_1x + x_1^2) \operatorname{sign}(z - z_1(\alpha)) + \\ & + (x^2 - x_1^2) \operatorname{sign}(z + z_1(\alpha))] - (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \operatorname{sign}(z - z_2(\alpha, \chi, \epsilon)) - \\ & - (x^2 - (x_1 - x_2)x - x_1x_2) \operatorname{sign}(z + z_2(\alpha, \chi, \epsilon)) \}. \end{aligned}$$

Далее выполним интегрирование по переменным x , y , β и разобьем скобку на четыре интеграла следующим образом

$$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z]} = \frac{1}{2} \pi^{-3/2} \{ I_1 + I_2 - I_3 - I_4 \},$$

где

$$I_1 = \int e^{-\gamma^2(1+z^2)} \gamma^{4-4/\nu} [1 + \operatorname{sign}(z-t) \operatorname{sign}(z+t)] d\gamma dt dz \rho dp d\epsilon,$$

$$I_2 = \int e^{-\gamma^2(1+z^2)} \gamma^{6-4/\nu} (1-t^2) [1 - \operatorname{sign}(z-t) \operatorname{sign}(z+t)] d\gamma dt dz \rho dp d\epsilon,$$

$$I_3 = \int e^{-\gamma^2(1+z^2)} \gamma^{4-4/\nu} \operatorname{sign}(z-t) [\operatorname{sign}(z - (t \cos \chi + \sqrt{1-t^2} \sin \chi \cos \epsilon)) + \\ + \operatorname{sign}(z + (t \cos \chi - \sqrt{1-t^2} \sin \chi \cos \epsilon))] d\gamma dt dz \rho dp d\epsilon,$$

$$I_4 = \int e^{-\gamma^2(1+z^2)} \gamma^{6-4/\nu} (t \sqrt{1-t^2} \sin \chi \cos \epsilon + (1-t^2) \cos \chi) \times \\ \times \operatorname{sign}(z-t) [\operatorname{sign}(z - (t \cos \chi - \sqrt{1-t^2} \sin \chi \cos \epsilon)) - \\ - \operatorname{sign}(z + (t \cos \chi - \sqrt{1-t^2} \sin \chi \cos \epsilon))] d\gamma dt dz \rho dp d\epsilon.$$

В вышеприведенных формулах $\chi = \chi(\rho)$. Далее интегрирование выполняется численно. Сначала производится интегрирование по γ и z . Затем интегрируем по t , ρ (интегрирование по ρ производится от 0 до 2.5 для степенного потенциала и от 0 до 1 для модели твердых сфер), ϵ с помощью следующих формул:

если $F(z)$ четная функция: $F(z) = F(-z)$, а $H(z)$ - нечетная $H(z) = -H(-z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) \operatorname{sign}(z-a) dz = -2 \operatorname{sign}(a) \int_0^{|a|} F(z) dz, \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(z) \operatorname{sign}(z-a) dz = 2 \int_{|a|}^{\infty} H(z) dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) [1 + \operatorname{sign}(z-a) \operatorname{sign}(z+a)] dz = 4 \int_{|a|}^{\infty} F(z) dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) [1 - \operatorname{sign}(z-a) \operatorname{sign}(z+a)] dz = 4 \int_0^{|a|} F(z) dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) \operatorname{sign}(z-a) [\operatorname{sign}(z-b) + \operatorname{sign}(z+b)] dz = 4 \int_{\operatorname{Max}(|a|, |b|)}^{\infty} F(z) dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) \operatorname{sign}(z-a)[\operatorname{sign}(z-b) - \operatorname{sign}(z+b)]dz = 4 \operatorname{sign}(a) \operatorname{sign}(b) \int_0^{\operatorname{Min}(|a|,|b|)} F(z)dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(z) \operatorname{sign}(z-a)[\operatorname{sign}(z-b) + \operatorname{sign}(z+b)]dz = 4 \operatorname{sign}(a)\Theta(|a| - |b|) \int_{|a|}^{|b|} H(z)dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(z) \operatorname{sign}(z-a)[\operatorname{sign}(z-b) - \operatorname{sign}(z+b)]dz = -4 \operatorname{sign}(b)\Theta(|b| - |a|) \int_{|a|}^{|b|} H(z)dz.$$

Выполняя интегрирование, получаем:
для модели твердых сфер

$$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z]} = \frac{1}{2}\pi^{-3/2}(2.442 + 3.970 - 1.627 + 3.04 \cdot 10^{-5}) = 0.859,$$

для степенного потенциала с $\nu = 12$

$$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z]} = \frac{1}{2}\pi^{-3/2}(15.152 + 23.769 - 14.355 - 20.331) = 0.761.$$

Расчет других скобок производится аналогично, однако вычисления будут существенно более громоздкими. Были вычислены следующие скобки (см. таблицу):

Таблица

Безразмерная скобка	Тв. сферы	$\nu = 12$
$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x c_z]}$	0.434	0.346
$\overline{[c_x c_z \operatorname{sign} c_z, c_x(c^2 - 5/2)]}$	0.054	0.044
$\overline{[c_x(c^2 - 5/2) \operatorname{sign} c_z, c_x c_z]}$	-0.335	-0.267
$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z]}$	0.859	0.761
$\overline{[c_x c_z \operatorname{sign} c_z, c_x c_z \operatorname{sign} c_z]}$	0.183	0.148
$\overline{[c_x(c^2 - 5/2) \operatorname{sign} c_z, c_x(c^2 - 5/2) \operatorname{sign} c_z]}$	2.597	2.271
$\overline{[c_x \operatorname{sign} c_z, c_x(c^2 - 5/2) \operatorname{sign} c_z]}$	0.197	0.150
$\overline{[\operatorname{sign} c_z, c_z(c^2 - 5/2)]}$	-0.266	-0.188
$\overline{[c^2 \operatorname{sign} c_z, c_z(c^2 - 5/2)]}$	0.579	0.399
$\overline{[\operatorname{sign} c_z, \operatorname{sign} c_z]}$	0.586	0.593
$\overline{[c_z \operatorname{sign} c_z, c_z \operatorname{sign} c_z]}$	0.195	0.139
$\overline{[c^2 \operatorname{sign} c_z, \operatorname{sign} c_z]}$	0.671	0.593
$\overline{[c^2 \operatorname{sign} c_z, c^2 \operatorname{sign} c_z]}$	2.547	2.150
$\overline{[c_z \operatorname{sign} c_z, c_z(c^2 - 5/2) \operatorname{sign} c_z]}$	0.010	0.057

Приведенные скобки позволяют решить ряд задач с использованием точного выражения для интеграла столкновений.

Рассмотрим задачу о тепловом скольжении неоднородно нагретого газа вдоль твердой поверхности (см. рис.). В работе [3] данная задача решалась с использованием модельного интеграла столкновений (τ -приближение). В данной работе приведено решение с использованием точного больцмановского интеграла столкновений.

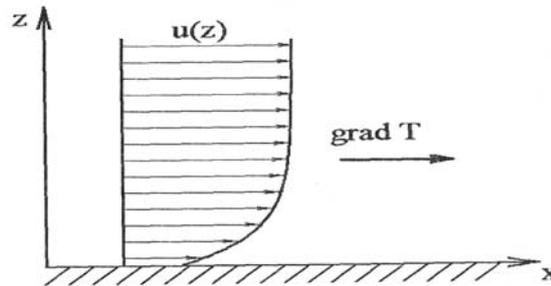


Рис. Течение неоднородно нагретого газа вдоль твердой поверхности

Известно, что газ, находящийся в поле тангенциального к стенке градиента температуры, должен прийти в движение в направлении градиента температуры (тепловое скольжение). Впервые попытка решения задачи о тепловом скольжении была сделана еще Максвеллом [4]. В анализе Максвелла предполагается, что функция распределения падающих на стенку молекул вблизи ее поверхности не отличается от объемного распределения на большом удалении от стенки. В результате Максвелл получил при любом коэффициенте аккомодации тангенциального импульса следующее выражение для скорости теплового скольжения:

$$u^* = \frac{3}{4}\nu \text{grad } \ln T. \quad (21)$$

Здесь ν - кинематическая вязкость.

Однако в случае не чисто зеркального отражения молекул от стенки распределение падающих молекул в слое Кнудсена будет отличаться от объемного из-за столкновений с отраженными от стенки молекулами. Таким образом, предположение Максвелла в общем случае не будет иметь место.

Рассмотрим простой газ, находящийся над плоской стенкой в поле тангенциального к стенке градиента температуры. Введем систему координат, в которой начало находится на поверхности стенки, ось z направлена по нормали, ось x - вдоль поверхности в направлении градиента температуры.

Функция распределения может быть найдена из кинетического уравнения Больцмана, которое в стационарном случае имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla) f = \int d\mathbf{v}_1 \int gb(f'_1 f'_1 - f f_1) db d\epsilon. \quad (22)$$

Задача может быть линеаризована при условии малости изменения температуры на длине свободного пробега $\lambda |\ln T| \ll 1$. В дальнейшем предполагается, что условие линеаризации выполнено.

Очевидно, что влияние стенки на распределение скоростей молекул имеет конечный радиус, поэтому на больших расстояниях от стенки функция распределения переходит в объемное распределение Чепмена-Энскога [5]. Для газа, находящегося над стенкой, с градиентом температуры вдоль оси распределение молекул вдали от стенки будет иметь вид

$$f = f_0 [1 + 2c_x G(\infty) + \Psi(\mathbf{c}, x)]. \quad (23)$$

Здесь $G = \sqrt{\frac{m}{2kT}}v_x$ - безразмерная средняя скорость.

В (23) функция $\Psi(\mathbf{c}, x)$ дается выражением

$$\Psi(\mathbf{c}, x) = a_1 c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2) \frac{\partial \ln T}{\partial y}, \quad a_1 = \frac{15}{16} \sqrt{\pi} \lambda, \quad (24)$$

здесь $S_{3/2}^{(1)}(c^2)$ - первый полином Сонина.

Вблизи стенки необходимо различать функции распределения падающих и отраженных молекул, которые в дальнейшем будем обозначать верхними индексами минус и плюс соответственно.

Будем искать функцию распределения в виде [6]

$$f^\pm = f_0 [1 + \Psi(\mathbf{c}, x) + \Phi^\pm(\mathbf{c}, z)]. \quad (25)$$

Из оценок, приведенных в работе [7], следует

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|. \quad (26)$$

что дает возможность считать Φ функцией только от \mathbf{c} и x .

Поправку Φ будем искать в виде разложения в ряд по полиномам Сонина в пространстве скоростей

$$\Phi^\pm(\mathbf{c}, z) = a_0^\pm(z) c_x + a_1^\pm(z) c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2). \quad (27)$$

Функция Φ дается выражением

$$\Phi(\mathbf{c}, z) = x_r c_x + y_r c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2) + [x_s c_x + y_s c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2)] \text{sign } c_z, \quad (28)$$

где

$$x_r = \frac{a_0^+ + a_0^-}{2}, \quad x_s = \frac{a_0^+ - a_0^-}{2}, \quad y_r = \frac{a_1^+ + a_1^-}{2}, \quad y_s = \frac{a_1^+ - a_1^-}{2}.$$

Для однозначного определения функции $\Phi(\mathbf{c}, z)$ необходимо использовать граничное условие на стенке. Чтобы описать взаимодействие газа с границей, предположим, что доля $(1 - \alpha)$ молекул, падающих на стенку, отражается зеркально, доля α отражается диффузно с максвелловским распределением

$$f^+(\mathbf{c}, 0) = \alpha f_0 + (1 - \alpha) f^-(c_x, c_y, -c_z, 0). \quad (29)$$

Подставим функцию распределения (25) в уравнение (22), оставляя члены линейные по поправкам и используя безразмерные переменные (6), получим уравнение

$$c_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + c_x \frac{\partial \ln f_0}{\partial x} = I(\Phi) + I(\Psi). \quad (30)$$

Здесь $I(\Phi)$ и $I(\Psi)$ линеаризованные интегралы столкновений, которые имеют вид

$$I(\Phi) = \frac{1}{n^2} \int \int f_0 f_{01} (\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1) g b d b d \epsilon d \mathbf{c} \mathbf{1}.$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$c_x \frac{\partial \ln f_0}{\partial x} = I(\Psi). \quad (31)$$

Учитывая это, функция Φ будет удовлетворять уравнению

$$c_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = I(\Phi). \quad (32)$$

Беря от уравнения (32) моменты вида c_x , $c_x \operatorname{sign} c_z$, $c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2)$, $c_x S_{3/2}^{(1)}(c^2) \operatorname{sign} c_z$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций x_r , x_s , y_r , y_s :

$$\begin{cases} \frac{dx_r}{d\tilde{z}} = a_1 x_s + a_2 y_s, \\ \frac{dy_r}{d\tilde{z}} = a_3 x_s + a_4 y_s, \\ \frac{dx_s}{d\tilde{z}} = a_5 y_r, \\ \frac{dy_s}{d\tilde{z}} = a_6 y_r, \end{cases} \quad (33)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{13I_{31} + 2I_{42}}{6}, & a_2 &= -\frac{13I_{42} + 2I_{33}}{6}, & a_3 &= -\frac{I_{31} + 2I_{42}}{3}, \\ a_4 &= -\frac{I_{42} + 2I_{33}}{3}, & a_5 &= -\frac{I_{16}}{3}, & a_6 &= -\frac{2I_{16}}{3}, & \tilde{z} &= \frac{z}{\lambda}, \\ I_{16} &= [c_x(5/2 - c^2), c_x(5/2 - c^2)], & I_{31} &= [c_x \operatorname{sign} c_z, c_x \operatorname{sign} c_z], \\ I_{33} &= [c_x(5/2 - c^2) \operatorname{sign} c_z, c_x(5/2 - c^2) \operatorname{sign} c_z], \\ I_{42} &= [c_x \operatorname{sign} c_z, c_x(5/2 - c^2) \operatorname{sign} c_z]. \end{aligned}$$

Граничные условия для системы (33) примут вид

$$\begin{cases} x_r(0) = -\frac{2-\alpha}{\alpha} x_s(0), \\ y_r(0) = -\frac{2-\alpha}{\alpha} y_s(0) - a_1 \nabla \ln T, \end{cases} \quad \begin{cases} x_s(\infty) = 0, \\ y_s(\infty) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Решение системы (33) с учетом граничных условий (34) имеет вид

$$\begin{cases} x_r(\tilde{z}) = C_1 + C_2 e^{-p\tilde{z}}, \\ y_r(\tilde{z}) = b_1 C_2 e^{-p\tilde{z}}, \\ x_s(\tilde{z}) = -b_2 C_2 e^{-p\tilde{z}}, \\ y_s(\tilde{z}) = -b_3 C_2 e^{-p\tilde{z}}, \end{cases} \quad (35)$$

где $p = \sqrt{a_3 a_5 + a_4 a_6}$, $b_1 = \frac{p^2}{a_1 a_5 + a_2 a_6}$, $b_2 = \frac{a_5 p}{a_1 a_5 + a_2 a_6}$, $b_3 = \frac{a_6 p}{a_1 a_5 + a_2 a_6}$, а коэффициенты C_1 и C_2 находятся из граничных условий

$$C_1 = \frac{\alpha - (2-\alpha)b_2}{b_1 \alpha - (2-\alpha)b_3} a_1 \nabla \ln T, \quad C_2 = -\frac{\alpha}{b_1 \alpha - (2-\alpha)b_3} a_1 \nabla \ln T. \quad (36)$$

Зная функции x_r , x_s , y_r , y_s , легко получить выражение для скорости теплового скольжения

$$u^* = \frac{3}{2} \frac{\alpha - (2-\alpha)b_2}{2b_1 \alpha - (2-\alpha)b_3} \nu \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \quad (37)$$

Для профиля скорости будем иметь следующую формулу:

$$u(\tilde{z}) = u^* \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - (2-\alpha)b_2} e^{-p\tilde{z}} \right). \quad (38)$$

В случае чисто зеркального отражения ($\alpha = 0$) имеем формулу Максвелла. При чисто диффузном отражении ($\alpha = 1$) имеем следующие формулы:

для потенциала твердых сфер: $u^* = 0.983 \cdot \nu \frac{\partial \ln T}{\partial x}$ (численный коэффициент на 19 % ниже чем в [3]);

для степенного потенциала: $u^* = 1.025 \cdot \nu \frac{\partial \ln T}{\partial x}$ (численный коэффициент на 4 % выше чем для потенциала твердых сфер).

Таким образом, приведенные формулы позволяют рассчитать значение скорости теплового скольжения и профиль скорости для зеркально-диффузного отражения при любых числах Кнудсена.

Список литературы

- [1] Гершфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностран. лит., 1961. С.929.
- [2] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. С.554.
- [3] Ивченко И.Н., Яламов Ю.И. Тепловое скольжение неоднородно нагретого газа вдоль твердой поверхности // Механика жидкости и газа, 1969, N 6. С.59-66.
- [4] Maxwell J.C. On Stresses in rarefied gases, arising from inequalities of temperature. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 1879. Vol. 170. P.231-256.
- [5] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960.
- [6] Дерягин Б.В., Ивченко И.Н., Яламов Ю.И. О построении решения кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1968, N 4. С.167-172.
- [7] Дерягин Б.В., Яламов Ю.И., Ивченко И.Н. Применение метода Бхатнагара, Гросса и Крука для определения скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности // Докл. АН СССР. Сер. мат. физ., 1967. Т.173. Вып.6.

HALF-SPACE MOMENTS IN BOUNDARY PROBLEMS OF GASES KINETIC THEORY

V.I. Kurochkin, S.A. Boluchev, S.V. Tsaplin ²

Аннотация

The bracket integrals containing discontinuous functions of velocities for degree potential and rigid spheres potential are calculated. The solution of the temperature sliding of non-uniform heated gas near solid surface problem is obtained by using exact Boltzmann collision integral.

²V.I. Kurochkin, S.A. Boluchev, S.V. Tsaplin, Dept. of Solid State Physics, Samara State University