АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ (СВЯЗКА "ПОЛЗУЧЕСТЬ – ПОВРЕЖДЕННОСТЬ")

Л.В. Степанова, М.Е. Федина [1]

Приведено асимптотическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности с использованием автомодельной переменной, предложенной для степенных определяющих соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжения. Характерной особенностью задач о трещинах в связанной постановке (связка "ползучесть – поврежденность") является существование у вершины трещины области "полностью поврежденного материала", в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Поэтому наряду с определением напряженно – деформированного состояния интерес представляет исследование геометрии данной области. Построены асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности и приведена конфигурация области "полностью поврежденного материала" для различных значений показателя степени n степенного закона ползучести.

Введение

Вопросам определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и растущей трещины в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности в последнее время посвящается большое количество исследований [1–7]. Основной интерес представляет оценка влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и скоростей деформаций ползучести. С практической точки зрения важно определить скорость докритического подрастания трещины.

Можно выделить характерные особенности, свойственные двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (упругость–поврежденность, ползучесть–поврежденность).

В [1–3] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном исчезновении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений (показатель степени α в $r^{-\alpha}$ уменьшается).

[1] Степанова Лариса Валентиновна, Федина Мария Ефимовна, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета

В [1] установлено, что эффективные напряжения σ_{ij}/ψ, где ψ – параметр сплошности Качанова–Работнова, ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом спадают до нуля при $r \to 0$.

В [3] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно-упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений для различных значений определяющих констант m и n, входящих в кинетическое уравнение, задающее степенной закон накопления повреждений, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений m и n, тогда как при возрастании значений данных параметров особенность вообще исчезает.

В [4, 5], где представлено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно вязком теле со степенной зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, учет влияния поврежденности также приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [1, 2]. В данных работах при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла φ_d (значение $\varphi = \pi$ соответствует верхнему берегу трещины, $\varphi = 0$ – ее продолжению), функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось лишь для значений $0 \le \varphi \le \varphi_d$. Оставшаяся область $\varphi_d \le \varphi \le \pi$, локализованная в окрестности вершины рапространяющейся трещины, есть полностью разрушенная зона, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю. На границе же введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. В [3] авторы апеллируют к невозможности выполнения граничных условий на берегах трещины и переходят к модифицированной постановке задачи, вводя область полностью разрушенного материала, примыкающую к берегам трещины.

Необходимо отметить, что вместе с асимптотическим изучением полей в окрестности вершины трещины в связанной постановке использовались и иные методы. Например, для анализа растущей трещины антиплоского сдвига в [6] сделана попытка использования метода годографа. Однако авторы вообще отказываются от проблемы интегрирования кинетического уравнения и оперируют с предполагаемым результатом интегрирования, полагая, что параметр сплошности (или поврежденности) есть функция лишь от напряжений, но не физических координат x_1, x_2, что, вообще говоря, неверно. Явная зависимость параметра сплошности от координат x_1, x_2 вносит сложности в процедуру метода годографа и ставит под сомнение возможность его использования для движущейся трещины.

Для анализа распространяющейся трещины в среде с поврежденностью для степенных определяющих соотношений в [7] предложена автомодельная переменная, что позволяет снизить число независимых переменных (в данной задаче время может быть исключено из числа независимых переменных). Однако полное решение задачи и даже полная математическая постановка задачи отсутствуют.

К числу еще неразрешенных задач, требующих детального изучения, относятся оценка скорости роста трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью и связанная с данным вопросом проблема сращивания "ближнего поля" – решения, полученного в окрестности вершины трещины, с "дальним полем" – заданных граничных условий на бесконечности (в задачах о росте полубесконечной трещины в бесконечном теле). Стандартным приемом сращивания "ближнего" и "дальнего" полей является использование инвариантных интегралов механики разрушения: J-интеграла, C^*-интеграла и некоторых иных инвариантных интегралов, полученных обобщением упомянутых. Однако такие параметры не обладают свойством инвариантности в рамках связанной постановки задачи теории ползучести и механики поврежденности.

В данной работе приведено новое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности в окрестности трещины антиплоского сдвига в связанной постановке с помощью автомодельной переменной, предложенной в [7], определена геометрия области полностью разрушенного материала.

1. Автомодельная переменная в задаче о трещине в среде с поврежденностью

Рассмотрим стационарную полубесконечную трещину в неограниченном теле в материале с определяющими соотношениями, построенными на основе степенной связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \tag{1.1}$$

где ψ – параметр сплошности; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; σ_e – интенсивность напряжений; B, n – константы материала.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r,\varphi,t=0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r}\right)^{1/(n+1)} \overline{\sigma}_{ij}(\varphi,n), \tag{1.2}$$

где C^* – инвариантый интеграл теории установившейся ползучести; I_n – функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^*-интеграл; $\overline{\sigma}_{ij}(\varphi,n)$ – функции, известные из решения Хатчинсона, Райса и Розенгрена (HRR-асимптотика); r, φ – полярные координаты.

Асимптотическое условие при $r \to \infty$ определяется решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений ($\psi = 1$):

$$\sigma_{ij}(r\to\infty,\varphi,t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r}\right)^{1/(n+1)} \overline{\sigma}_{ij}(\varphi,n). \tag{1.3}$$

Заметим, что начальное условие при $t = 0$ (1.2) и граничное условие в бесконечно удаленной точке (1.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi = 1$.

Необходимо отметить, что асимптотическое условие (1.3) справедливо для всех $n > 1$, так как это условие есть, ставшее уже классическим, решение HRR для степенных соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжения. В случае $n = 1$ оказывается, что скоростями упругих деформаций даже для неподвижной трещины пренебрегать нельзя, и определяющий закон должен иметь вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{3}{2}Bs_{ij}. \tag{1.4}$$

Поэтому распределение напряжений (1.3) не является решением задачи для определяющего закона (1.4). В силу этого дальнейшие рассмотрения справедливы для всех $n > 1$.

В [7] установлено, что для определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3) существует автомодельная переменная

$$R = \frac{r}{k(n)\,(At)^{(n+1)/m}}, \tag{1.5}$$

где $k(n) = C^*/(BI_n)$; A, m – постоянные кинетического уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma}{\psi}\right)^m, \tag{1.6}$$

или в декартовой системе координат – автомодельные переменные

$$X_1 = \frac{x_1}{k(n)\,(At)^{(n+1)/m}}, \quad X_2 = \frac{x_2}{k(n)\,(At)^{(n+1)/m}}. \tag{1.7}$$

Выражение (1.5) и само существование автомодельной переменной R без труда обосновывается с помощью анализа размерностей.

Перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}, \tag{1.8}$$

где L – некоторая характерная длина, T – характерное время. Характерные длина и время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений, позволяющего установить, что

$$T = \frac{1}{A}\left(\frac{k(n)}{L}\right)^{-m/(n+1)}. \tag{1.9}$$

В этом случае безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции от безразмерных переменных могут быть представлены в следующей форме:

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r},\varphi,\hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}\,\sigma_{ij}(r/L,\varphi,tA\,(k(n)/L)^{m/(n+1)}). \tag{1.10}$$

Поскольку в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер L, то необходимо его исключить из аргументов функции $\hat{\sigma}_{ij}$, что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{\left[tA\,(k(n)/L)^{m/(n+1)}\right]^{(n+1)/m}}. \tag{1.11}$$

В результате имеем автомодельную переменную (1.5).

В этом случае напряжения и параметр сплошности имеют вид

$$\sigma_{ij}(r,\varphi,t) = (At)^{(n+1)/m}\,\hat{\sigma}_{ij}(R,\varphi), \quad \psi(r,\varphi,t) = \hat{\psi}(R,\varphi), \tag{1.12}$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R,\varphi)$ и $\hat{\psi}(R,\varphi)$ являются безразмерными функциями безразмерных переменных R,φ и подлежат определению в ходе решения конкретных краевых задач.

2. Антиплоский сдвиг пространства с полубесконечной трещиной (автомодельное решение связанной задачи)

2.1. Постановка задачи в автомодельных переменных

В механике деформируемого твердого тела часто оказывается удобным начинать изучение явления с наиболее простой с математической точки зрения задачи антиплоского сдвига. Поэтому сначала рассматривается задача о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью. На основе результатов исследований [1, 3] принимается, что у вершины трещины существует область полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль.

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\hat{\sigma}_{Rz}\right) + \frac{\partial\hat{\sigma}_{\varphi z}}{\partial\varphi} = 0; \tag{2.1}$$

условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций ползучести $\hat{\gamma}_{\varphi z}$ и $\hat{\gamma}_{Rz}$,

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\hat{\gamma}_{\varphi z}\right) = \frac{\partial\hat{\gamma}_{Rz}}{\partial\varphi}, \tag{2.2}$$

где

$$\hat{\gamma}_{Rz} = \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}}\right)^{n-1}\frac{\hat{\sigma}_{Rz}}{\hat{\psi}}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}}\right)^{n-1}\frac{\hat{\sigma}_{\varphi z}}{\hat{\psi}}; \tag{2.3}$$

$$\hat{\gamma}_{Rz}(R,\varphi) = \frac{2\gamma_{Rz}(r,\varphi,t)}{3B}\,(At)^{n(n+1)/m},$$

$$\hat{\gamma}_{\varphi z}(R,\varphi) = \frac{2\gamma_{\varphi z}(r,\varphi,t)}{3B}\,(At)^{n(n+1)/m};$$

и кинетического уравнения

$$R\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial R} = \frac{m}{n+1}\left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}}\right)^m. \tag{2.4}$$

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) должно удовлетворять следующим граничным условиям: условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\hat{\sigma}_{\varphi z}(R, \varphi = \pi) = 0; \tag{2.5}$$

условию симметрии на ее продолжении

$$\hat{\sigma}_{Rz}(R, \varphi = 0) = 0. \tag{2.6}$$

Асимптотическое условие сближения разыскиваемого решения с распределением HRR при $R \to \infty$ имеет вид

$$\hat{\sigma}_{Rz}(R, \varphi) = R^{-1/(n+1)}\overline{\sigma}_{Rz}(\varphi, n), \quad \hat{\sigma}_{\varphi z}(R, \varphi) = R^{-1/(n+1)}\overline{\sigma}_{\varphi z}(\varphi, n) \tag{2.7}$$

(граничное условие в бесконечно удаленной точке).

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4), подчиняющееся граничным условиям (2.5)–(2.7), разыскивается во всей плоскости за исключением поврежденной зоны, внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью разрушенного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе области полностью поврежденной зоны разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям непрерывности:

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\sigma}_{Rz} = 0, \quad \hat{\sigma}_{\varphi z} = 0. \tag{2.8}$$

2.2. Асимптотическое решение автомодельной задачи

Для построения асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины необходимо перейти к новой системе координат, смещенной на расстояние ξ относительно вершины трещины вправо $x_1 = x_1' + \xi$, $x_2 = x_2'$, где ξ – протяженность области разрушенного материала по горизонтальной оси:

$$R\cos\varphi = \xi + \rho\cos\theta, \quad R\sin\varphi = \rho\sin\theta. \tag{2.9}$$

В противном случае, разыскивая асимптотические разложения в окрестности вершины трещины (при малых R), пришлось бы исследовать систему уравнений в той области, где она не описывает состояния тела.

В системе координат ρ, θ система уравнений (2.1)–(2.4) принимает форму (в дальнейшем символ ˆ при записи уравнений опускается):

уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_{\rho z}) + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} = 0; \tag{2.10}$$

условие совместности

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\gamma_{\theta z}) = \frac{\partial\gamma_{\rho z}}{\partial\theta}; \tag{2.11}$$

определяющие уравнения

$$\gamma_{\rho z} = \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1}\frac{\sigma_{\rho z}}{\psi}, \quad \gamma_{\theta z} = \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1}\frac{\sigma_{\theta z}}{\psi}, \tag{2.12}$$

кинетическое уравнение

$$(\rho + \xi \cos\theta)\frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \xi \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{n+1}\left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^m. \tag{2.13}$$

Граничное условие на верхнем берегу трещины есть

$$\sigma_{\theta z}(\rho, \theta = \pi) = 0. \tag{2.14}$$

Условие симметрии на линии трещины

$$\sigma_{\rho z}(\rho, \theta = 0) = 0 \tag{2.15}$$

сохраняет свою форму.

Асимптотическое условие (2.7) при $\rho \to \infty$ имеет вид

$$\sigma_{sz}(\rho, \theta) = \rho^{-1/(n+1)}\overline{\sigma}_{sz}(\theta, n) \qquad (s = \rho, \theta). \tag{2.16}$$

Решение системы уравнений (2.10)–(2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.16) в окрестности вершины трещины ($\rho \to 0$) разыскивается в форме степенных разложений

$$\frac{\sigma_{sz}}{\psi} = \rho^\alpha f_{sz}(\theta) + \dots, \quad \psi = \rho^\mu g(\theta) + \dots, \tag{2.17}$$

где $\mu > 0$, α – неизвестные показатели, подлежащие определению. Функции $f_{sz}(\theta)$, $g(\theta)$ находятся из решения системы уравнений (2.10)–(2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.16) .

Подстановка главных членов асимптотических разложений (2.17) в уравнение равновесия и условие совместности приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta}(f_{\theta z} g) + (1 + \mu + \alpha) f_{\rho z} g = 0, \tag{2.18}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(f^{n-1} f_{\rho z}\right) = (\alpha n + 1) f^{n-1} f_{\theta z}, \tag{2.19}$$

где $f = \sqrt{f_{\rho z}^2 + f_{\theta z}^2}$.

Кинетическое уравнение принимает вид

$$(\rho + \xi\cos\theta)\mu\rho^{\mu-1} g - \xi \sin\theta \rho^{\mu-1}\frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1}\rho^{\alpha m} f^m. \tag{2.20}$$

При $\rho \ll \xi$ первое слагаемое в левой части последнего уравнения есть величина более высокого порядка малости по сравнению с оставшимися двумя слагаемыми и им можно пренебречь. Поэтому для $\rho \ll \xi$ кинетическое уравнение упрощается:

$$\xi \cos\theta \mu \rho^{\mu-1} g - \xi \sin\theta \rho^{\mu-1}\frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1}\rho^{\alpha m} f^m. \tag{2.21}$$

Анализ этого уравнения показывает, что $\mu - 1 = \alpha m$.

Таким образом, для главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.18), (2.19) и (2.21), решение которой необходимо подчинить граничным условиям:

$$f_{\rho z}(\theta = 0) = 0, \quad f_{\theta z}(\theta = \pi) = 0, \tag{2.22}$$

причем для устранения особенности функции $g(\theta)$ при $\theta = 0$ следует добавить условие регулярности решения, вытекающее из кинетического уравнения:

$$g(\theta = 0) = \frac{m}{n+1}\frac{1}{\mu\xi}\left[f(\theta = 0)\right]^m . \tag{2.23}$$

Вводя новые функции

$$h(\theta) = \sqrt[m]{\frac{m}{(n+1)\xi}}f(\theta), \quad h_s(\theta) = \sqrt[m]{\frac{m}{(n+1)\xi}}f_{sz}(\theta), \tag{2.24}$$

можно исключить характерный линейный размер ξ области полностью разрушенного материала перед вершиной трещины из разрешающей системы уравнений. В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}\left(h_\theta g\right) + (1+\mu+\alpha)h_\rho g = 0, \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(h^{n-1}h_\rho\right) = (\alpha n+1)h^{n-1}h_\theta, \\ \mu\cos\theta g - \sin\theta\dfrac{dg}{d\theta} = h^m \end{cases} \tag{2.25}$$

с граничными условиями

$$h_\rho(\theta = 0) = 0, \quad h_\theta(\theta = \pi) = 0, \quad \mu g(\theta = 0) = h(\theta = 0). \tag{2.26}$$

Полученная система уравнений полностью совпадает с исследованной ранее системой уравнений [1], и можно сразу же дать результаты ее анализа.

Установлено [1], что:

1) система (2.25) является однородной системой уравнений, так что, если функции $h_s(\theta)$, $g(\theta)$ есть решение системы, то и $\kappa h_s(\theta)$, $\kappa^m g(\theta)$ есть также решение той же системы. Это обстоятельство ведет к возможности нормировки граничного условия на продолжении трещины

$$h_\theta(\theta = 0) = 1; \tag{2.27}$$

2) краевая задача (2.25)–(2.27) (без учета условия на берегу трещины) есть задача Коши, и система (2.25) может быть проинтегрирована численно при любом значении параметра $\alpha\,(\mu = 1 + \alpha m)$. Дополнительное условие при $\theta = \pi$ позволяет из множества всех α найти искомое собственное число;

3) численное решение задачи Коши с помощью метода Рунге–Кутта показало, что ни одно из значений α не приводит к выполнению условия на берегах трещины. Более того, установлено, что, начиная с некоторого $\theta = \theta_d$, функция $g(\theta)$, входящая в асимптотическое разложение для параметра сплошности, принимает отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу данной величины. Для устранения этого противоречия была введена модифицированная постановка задачи, согласно которой на отрезке $[\theta_d, \pi]$ решение нулевое, а на отрезке $[0, \theta_d]$ необходимо искать ненулевое решение системы уравнений (2.25) с граничными условиями

$$g(\theta = \theta_d) = 0, \quad h_\theta(\theta = \theta_d) = 0, \tag{2.28}$$

выражающими требования непрерывности решения при $\theta = \theta_d$;

4) численное решение модифицированной задачи показало, что функции, удовлетворяющие сформулированным уравнениям и граничным условиям, существуют лишь для $\alpha = 0$ и $\theta_d = \pi/2$. Таким образом, решение поставленной краевой задачи имеет вид

$$g = \cos\theta, \quad h_\theta = \cos\theta, \quad h_\rho = \sin\theta. \tag{2.29}$$

Возвращаясь к исходным функциям, искомое решение можно представить в виде

$$\begin{gathered} f_{\theta z}(\theta) = \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} \cos\theta, \quad f_{\rho z}(\theta) = \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} \sin\theta, \\ g(\theta) = \kappa^m \cos\theta. \end{gathered} \tag{2.30}$$

Выражения

$$\begin{aligned} \psi(\rho,\theta) &= \kappa^m \rho \cos\theta, \\ \frac{\sigma_{sz}(\rho,\theta)}{\psi} &= \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} h_s \end{aligned} \tag{2.31}$$

дают распределение сплошности и компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины (вне области полностью разрушенного материала). Следовательно, областью полностью разрушенного материала являются зоны $\pi/2 \le \theta \le \pi$ и $-\pi \le \theta \le -\pi/2$, локализованные в окрестности вершины трещины.

Для определения конфигурации области полностью поврежденного материала необходимо рассмотреть значения ρ, сравнимые с характерным линейным размером данной зоны ξ. Действительно, анализ $\rho \ll \xi$ позволяет лишь установить наличие вертикальной касательной к границе рассматриваемой области при $\theta = 0$.

Кинетическое уравнение (2.20) показывает, что на расстояниях $\rho \sim \xi$ первое слагаемое в левой части уравнения не является малым более высокого порядка по сравнению с остальными и его необходимо учитывать. Так, при $\rho = \xi$ кинетическое уравнение (2.20) принимает форму

$$(1+\cos\theta)\mu\xi^{\mu-\alpha m} g - \sin\theta \xi^{\mu-\alpha m} \frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1} f^m. \tag{2.32}$$

Таким образом, в дальнейшем исследуется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(C+\cos\theta)\mu g_1 - \sin\theta \frac{dg_1}{d\theta} = \frac{m}{n+1} f^m, \tag{2.33}$$

полученное из кинетического уравнения (2.20) путем задания значений $\rho = C\xi$ и последующей заменой

$$g_1 = \xi\,(C\xi)^{\mu-1-\alpha m}\, g,$$

с вытекающим из него условием регулярности

$$g_1(0) = \frac{m\,(f(0))^m}{(n+1)(C+1)\mu}. \tag{2.34}$$

Полагая $h_s = \sqrt[m]{m/(n+1)} f_s$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}\left(h_\theta g_1\right) + (1+\mu+\alpha) h_\rho g_1 = 0, \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(h^{n-1} h_\rho\right) = (\alpha n + 1) h^{n-1} h_\theta, \\ (C + \cos\theta)\mu g_1 - \sin\theta \dfrac{dg_1}{d\theta} = h^m \end{cases}$$

с граничными условиями $h_\rho(0) = 0$, $h_\theta(0) = 1$ и условием регулярности $g_1(0) = 1/(\mu(C+1))$, решение которой осуществлялось методом Рунге–Кутта.

В ходе построения решения задавались расстояния $\rho = C\xi$ и подбирались значения параметров α и μ, которые в данном случае не связаны друг с другом,[2] с тем чтобы выполнялись граничные условия[3]

$$g_1(\theta = \theta_d) = 0, \quad h_\theta(\theta = \theta_d) = 0. \tag{2.35}$$

Для случая $n = 2$, $m = 0.7n$ значения этих параметров приведены в таблице.

Найденные значения углов θ_d позволяют исследовать геометрию зоны полностью разрушенного материла (рис. 1, 2): полностью разрушенная область примыкает к берегам трещины, охватывая ее вершину и простираясь на расстояние, равное приблизительно 4ξ $(n = 2,\ m = 0.7n)$ вдоль ее берегов.

В рассматриваемой задаче численное исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности позволяет утверждать, что область полностью поврежденного материала примыкает к берегам трещины на расстояниях $-4\xi \le X_1 \le 0$. За пределами этой зоны решение выходит на решение HRR, и параметр поврежденности принимает постоянное значение (что соответствует асимптотическому условию на бесконечности).

Таким образом, установлено, что на расстояниях, больших 4ξ от вершины трещины, влияние процесса накопления поврежденности не является существенным. Внутри круговой области радиуса 4ξ с центром в вершине трещины влияние процесса накопления повреждений нельзя игнорировать. Действительно, в непосредст-

[2] Отметим, что из полученного решения в непосредственной окрестности вершины трещины, где $\alpha = 0$ и $\mu = 1$, а также из граничного условия в бесконечно удаленной точке, указывающего, что $\alpha = -1/(n+1)$ и $\mu = 0$ при больших ρ, можно предположить, что показатели степеней удовлетворяют неравенствам $-1/(n+1) \le \alpha \le 0$ и $0 \le \mu \le 1$ и в отличие от случая малых ρ, когда из кинетического уравнения удается определить связь между показателями α и μ, в случае, когда расстояния ρ и ξ сравнимы друг с другом, не удается определить связь между показателями степеней α и μ.

[3] Анализ кинетического уравнения при $\theta \to \pi$ с учетом естественного граничного условия на берегу трещины $g_1(\theta = \pi) = 0$ показывает, что $h(\theta = \pi) = 0$, следовательно, не только $h_\theta(\theta = \pi) = 0$, но и $h_\rho(\theta = \pi) = 0$. Поэтому вновь можно прийти к гипотезе о существовании области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, что, в свою очередь, делает необходимым введение дополнительного угла θ_d. Таким образом, имеются три неизвестные величины μ, α и θ_d, подлежащие определению всего из двух условий $g_1(\theta = \theta_d) = 0$, $h_\theta(\theta = \theta_d) = 0$. В ходе численного анализа была предложена следующая процедура нахождения неизвестных показателей степеней и угла θ_d. Поскольку отрезок изменения параметра α известен ($\alpha \in [-1/(n+1), 0]$), то, назначая α из данного отрезка, всегда можно подобрать два оставшихся параметра из сформулированных граничных условий. Следует отметить существующий произвол при назначении α, так как фактически задавая C и α, априори выбирается характер поведения эффективных напряжений для указанного ρ и по нему восстанавливается промежуточная асимптотика параметра сплошности (асимптотика решения на достаточно больших расстояниях ρ по сравнению с нулем, но все еще малых по сравнению с бесконечностью). В ходе построения численного решения исследовались различные комбинации показателей α и μ, для которых значения угла θ_d оказывались в нужном диапазоне $\pi/2 < \theta \le \pi$. Численный эксперимент показал, что существует вполне определенный интервал значений показателей α и μ для выбранного значения C (с точностью до 0.01 для значений α и μ).

Таблица

Значения параметров α и μ для заданного расстояния C
и вычисленный для каждой пары этих параметров угол θ_d.

C	α	μ	θ_d
0.1	-0.10	0.787947	$108,18^\circ$
0.3	-0.11	0.666503	$113,04^\circ$
0.5	-0.12	0.579088	$117,18^\circ$
0.7	-0.13	0.513216	$120,91^\circ$
1	-0.15	0.438834	$126,76^\circ$
1.5	-0.175	0.358035	$134,14^\circ$
2	-0.2	0.304887	$140,94^\circ$
2.2	-0.21	0.288359	$143,59^\circ$
2.5	-0.225	0.267102	$147,51^\circ$
2.8	-0.24	0.249113	$151,42^\circ$
3	-0.265	0.235920	$157,63^\circ$
3.5	-0.32	0.199433	$172,12^\circ$
4	-0.333	0.0001	180.00°

венной близости к вершине распространяющейся трещины существует область полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. За пределами этой области имеется так называемая "область процесса", в которой происходит накопление рассеянных повреждений, что оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние. В данной области справедливы промежуточные асимптотики с собственными значениями, приведенными в (2.34).

На рис. 3–6 показаны угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в промежуточной области для различных значений C.

Таким образом, установлено, что у границы области полностью поврежденного материала поля напряжений и сплошности линейно падают до нуля при $\rho \to 0$. По мере удаления от этой области поля напряжений и сплошности перераспределяются: показатели α и μ принимают промежуточные значения из интервалов своего изменения, сближаясь затем с асимптотикой для $\rho \to \infty$. На рис. 3–6 видно, что качественно изменяется характер углового распределения функции $g_1(\theta)$. Угловые распределения компонент тензора напряжений при удалении от полностью поврежденной зоны выходят на решение HRR. Действительно, на рис. 6 кривые, иллюстрирующие угловые распределения компонент тензора напряжений для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3.8$, полностью совпадают с решением HRR, что указывает на достоверность полученного решения.

Следует отметить, что характерный линейный размер ξ области полностью поврежденного материала не определяется в рамках приведенного асимптотического анализа полей напряжений, скоростей деформаций и параметра сплошности, и для его оценки необходимы дополнительные условия.

Для оценки ξ воспользуемся следующими рассуждениями. Характерной особенностью данной задачи является то, что после введения автомодельной переменной R формально задачи о стационарном состоянии трещины и ее росте не различимы.

Однако эти два состояния следует различать и необходимо еще сформулировать критерий роста трещины. Естественно воспользоваться критерием роста трещины, учитывающим структурные изменения материала. Можно принять, что рост трещины начинается (и поддерживается), если на некотором расстоянии d_c от вершины трещины сплошность достигает своего критического значения ψ_{cr}. Однако в рамках настоящего исследования уже введена область, в которой сплошность принимает критическое значение (равное нулю), следовательно, под ξ можно понимать величину d_c и считать, что $\xi = d_c$.

Литература

[1] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести// ФХММ, 1992. Т.2. N.1. С.5-11.

[2] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины// Изв. РАН. МТТ, 1995. N.3. С. 160-166.

[3] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics//Eng. Frac. Mech, 1995. V.50. N.1. P.131-141.

[4] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage - Part I. Small damage region around the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V. 34. N. 24. P. 3163-3178.

[5] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage - Part II. Small damage region around the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V. 34. N. 10. P. 1183-1197.

[6] Wang T., Kishimoto K. Higher order fields for damaged nonlinear antiplane shear notch, crack and inclusion problems//Eng.J.Mech. A/Solids. 1999. N.18. P.963-986.

[7] Riedel H. Fracture at high temperature. Berlin: Springer, 1987. 418 pp.

SELF – SIMILAR SOLUTION OF THE DAMAGE – CREEP COUPLED BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MODE III CRACK

L.V. Stepanova, M.E. Fedina [4]

Asymptotic stress and damage fields for stationary crack under creep conditions for damage – creep coupled statment of the problem is given. Self – similar variable introduced by Riedel is employed for the analysis and self – similar solution of the problem is obtained. It is shown that the fully – damaged zone near the crack tip where all stresses and scalar integrity parameter are equalled to zero exists. The geometry of the fully – damaged zone for different values of material constants is studied and presented.

[4] Stepanova Larisa Valentinovna, Fedina Maria Efimovna, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University

dam2-new.eps =15cm

Рис. 1: Геометрия зоны полностью поврежденного материала в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига в плоскости автомодельных переменных X_1/ξ, X_2/ξ. Метками обозначены точки, полученные в ходе численного анализа. Точка с координатами $(X_1/\xi = -1, X_2/\xi = 0)$ есть вершина трещины, точка с координатами $(X_1/\xi = 0, X_2/\xi = 0)$ – начало новой системы координат, сдвинутой на расстояние ξ вперед от вершины трещины

dam3-new.eps =15cm

Рис. 2: Геометрия зоны полностью поврежденного материала в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига в плоскости автомодельных переменных

s1model.eps =15cm

Рис. 3: Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^{\alpha}\kappa[(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi_{sz} = \rho^{\mu}\kappa^m \xi\,(C\xi)^{1-\alpha m-\mu}\, g_1(\theta)$ от полярного угла для $n = 2, m = 0.7n$, $C = 1$ (по оси абсцисс отложены значения полярного угла в градусах)

s2model.eps =15cm

Рис. 4: Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^{\alpha}\kappa[(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi_{sz} = \rho^{\mu}\kappa^m \xi\,(C\xi)^{1-\alpha m-\mu}\, g_1(\theta)$ от полярного угла для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 2$

s3model.eps =15cm

Рис. 5: Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^{\alpha}\kappa[(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi_{sz} = \rho^{\mu}\kappa^m \xi\,(C\xi)^{1-\alpha m-\mu}\, g_1(\theta)$ от полярного угла для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3$

s4model.eps =15cm

Рис. 6: Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^{\alpha}\kappa[(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi_{sz} = \rho^{\mu}\kappa^m \xi\,(C\xi)^{1-\alpha m-\mu}\, g_1(\theta)$ от полярного угла для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3.8$