ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю.Э. Сеницкий[1]

Основываясь на неравенстве Гобера, приводится доказательство фундаментальной теоремы разложения, утверждающей, что линейные дифференциальные операторы динамической теории упругости порождают обобщенно-ортогональные системы собственных вектор-функций, а соответствующие им полные разложения являются единственными и обладают среднеквадратичной сходимостью в гильбертовом пространстве.

В отличие от аналогичных исследований, существенная особенность настоящего рассмотрения состоит в том, что оно непосредственно связано с процедурой решения задач динамической теории упругости методом разложения по собственным вектор-функциям. Это позволило уточнить формулировку граничных условий в случаях первой основной и смешанной краевых задач теории упругости. Следует также подчеркнуть, что результаты получены при менее жестких в части гладкости ограничениях, накладываемых на разрешающие функции перемещений (в классе C^2).

Введение

Одну из наиболее эффективных форм разложения по собственным вектор-функциям представляет вектор-матричный метод конечных интегральных преобразований (КИП) [1-5]. Действительно, используя его, удалось получить точные решения сложных задач динамической теории упругости для сред с осложненными свойствами [6-10], а также при взаимодействии тел с сопряженными полями [11-14]. Вместе с тем приведенные в [1, 2, 4] доказательства единственности и сходимости в метрике пространства $\overline{L}^2$ конструкций КИП (спектральных разложений) не были связаны с каким-либо классом порождающих их краевых задач (абстрактный подход). Настоящая работа как раз и посвящена доказательству теоремы разложения для дифференциальных операторов динамической теории упругости - одному из фундаментальных вопросов, связанных с исследованием общих закономерностей применяемых здесь метаматических моделей.

Впервые, по-видимому, строгое доказательство теоремы о разложении в ряды по собственным функциям операторов трехмерной теории упругости приведено К. Фридрихсом [15]. Для этой цели он воспользовался известным неравенством Корна.

[1]Сеницкий Юрий Эдуардович, кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарской государственной архитектурно-строительной академии.

С. Г. Михлин в монографии [16] показал возможность бесконечного дифференцирования собственных векторов, порождаемых подобными операторами. В дальнейшем такая форма представления результатов для разрешающих функций оказалась эффективной при доказательстве теоремы существования и единственности решений в динамической теории упругости. Действительно, основываясь на спектральных разложениях для сильно эллиптических операторов в классе функций C^{∞} при некоторых дополнительных условиях, связывающих искомое решение с начальными условиями, она приведена Г.Фикера [17]. Существование и единственность решения задач динамической теории упругости в вариационной постановке рассматривалась также Г. Дюво и Ж.-Л. Лионсом [18], а доказательство теоремы разложения для моментных операторов теории тонких упругих оболочек содержится в работе А. Л. Гольденвейзера, В. Б. Лидского, П. Е. Товстика [19].

Особенностью математической формулировки краевых задач теории упругости является неоднородность граничных условий. Поэтому, в случае применения метода разложения по собственным функциям, в том числе конечных интегральных преобразований, их предварительно необходимо привести к стандартной форме [6-14, 20]. Однако эта процедура не принималась во внимание при доказательстве теоремы разложения, а вместе с тем она вносит существенные коррективы в постановку краевых задач динамической теории упругости, решаемых методом КИП. Кроме того, по сравнению с [17] приведенное здесь доказательство выполнено для разрешающих функций перемещений, принадлежащих C^2, т.е. при меньшем порядке их гладкости.

1. Приведение краевой задачи к стандартной форме

Сформулируем сначала все соотношения, необходимые для дальнейших исследований. Будем рассматривать однородное, изотропное, упругое тело, имеющее конечные объем V и гладкую поверхность A. Дифференциальные уравнения движения, а также физические и геометрические уравнения могут быть представлены в следующем виде [21]:

$$\sigma_{ij}(\overline{x},t) + X_i(\overline{x},t) = \rho\ddot{u}_i(\overline{x},t), \qquad \overline{x} \in V; t > 0; \quad i,j = \overline{1,3}; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}e; \tag{1.2}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \tag{1.3}$$

$$e = u_{k,k}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{1.4}$$

где u_i - компоненты вектора перемещений; X_i - компоненты вектора массовых сил; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций; δ_{ij} - символ Кронекера; μ, λ - постоянные Ламе; ρ - объемная плотность материала; x_j - компоненты вектора $\overline{x}$.

Символы $,j$ и $.$ означают, как обычно, дифференцирование по пространственной переменной x_j и времени t.

Используя уравнение (1.1) и соотношения (1.2) - (1.4), сформулируем краевую задачу динамики для упругого тела. Без учета массовых сил ($X_i = 0$) имеем

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i, \quad \overline{x} \in V, \quad t > 0; \tag{1.5}$$

$$\sigma_{ij}(\overline{x}^*, t) n_j(\overline{x}^*) = p_i(\overline{x}^*, t), \qquad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0; \tag{1.6}$$

$$u_i(\overline{x}^*, t) = f_i(\overline{x}^*, t), \qquad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

где $n_j(\overline{x}^*)$ - направляющие косинусы внешней единичной нормали поверхности тела A.

Граничные условия (1.6), (1.7) соответствуют первой и второй основным задачам теории упругости. При этом может рассматриваться и комбинация из условий (1.6), (1.7), когда на части поверхности A_1 заданы соотношения (1.6), а на оставшейся части A_2 равенства (1.7) ($A_1 + A_2 = A$), т.е. граничные условия смешанной задачи. Хотя в дальнейшем они не выписываются, следует иметь в виду, что все полученные ниже результаты справедливы и в этом случае. К соотношениям (1.5), (1.6) или (1.5), (1.7) необходимо также добавить начальные условия для каждой компоненты u_i и $\dot{u}_i$.

Равенство (1.6), представленное в перемещениях, если учесть (1.2)-(1.4), записывается следующим образом:

$$\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i = p_i, \qquad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0. \tag{1.6$_1$}$$

Преобразуем краевые задачи (1.5), (1.6$_1$) или (1.5), (1.7) к стандартной форме. При этом, следуя [20], стандартной формой краевой задачи будем считать эквивалентную (1.5), (1.6$_1$) или (1.5), (1.7) задачу, описываемую соответствующими (1.5) неоднородными дифференциальными уравнениями с соответствующими (1.6$_1$) или (1.7) однородными граничными условиями. Для этой цели воспользуемся теоремой о суперпозиции решений линейных дифференциальных уравнений. Имеем [2]

$$u_i(\overline{x}, t) = g_i(x_m) p_i(\overline{x}^*, t) + U_i(\overline{x}, t), \tag{1.8}$$

$$u_i(\overline{x}, t) = g_i(x_m) f_i(\overline{x}^*, t) + U_i(\overline{x}, t), \tag{1.8$_1$}$$

где x_m - зависимая пространственная координата из набора (x_1, x_2, x_3), определяемая уравнением поверхности тела $A : \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ (φ полагаем гладкой со своими производными функцией $\overline{x}$); $U_i(\overline{x}, t) \in C^{(2)}$, $g_i(x_m) \in C^{(2)}$ - дважды непрерывно-дифференцируемые функции соответствующих аргументов.

Индекс "i" здесь и в дальнейшем считаем свободным, т.е. по нему не ведется суммирование.

[2]Такой прием широко применяется при решении краевых задач теории упругости методом разложения по собственным функциям, например, [6-14].

Преобразование $(1.8), (1.8_1)$ необходимо для того, чтобы ниже в (2.10), (3.12) функцию $\overline{v}$, для которой строится разложение, можно было бы отождествлять с решением исходной краевой задачи (1.5) - (1.7). Подстановка равенств (1.8) и (1.8_1) в соотношения (1.5), (1.6_1) соответственно (1.5), (1.7) при выполнении условий:

а) в первом случае

$$g_i(x_m) = 0; g_{i,m}(x_m) = \begin{cases} \mu^{-1} & \text{при } i \neq m, \\ (2\lambda + \mu)^{-1} & \text{при } i = m, \end{cases} \quad n_i = \delta_{im}; \tag{1.9}$$

б) во втором

$$g_i(x_m) = 1; \quad i = \overline{1,3} \tag{1.9_1}$$

приводит к следующим краевым задачам динамической теории упругости, представленным в стандартной форме

$$L(U_i) = F_i(\overline{x}, t), \qquad \overline{x} \in V, \quad t > 0, \tag{1.10}$$

$$\mu(U_{i,m} + U_{m,i}) + \lambda U_{k,k} \delta_i{}^m = 0, \quad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0, \tag{1.11}$$

$$U_i(\overline{x}^*, t) = 0, \qquad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0. \tag{1.11_1}$$

Здесь $L(U_i)$ - линейный дифференциальный оператор:

$$L(U_i) = \mu U_{i,jj}(\overline{x}, t) + (\mu + \lambda) U_{j,ji}(\overline{x}, t) - \rho \ddot{U}_i(\overline{x}, t). \tag{1.12}$$

Для первой и второй краевых задач теории упругости $F_i(\overline{x}^*, t)$ определяется соответственно следующими равенствами:

$$F_i = -\mu g_{i,mm} p_i - (\mu + \lambda) g_{j,mi} p_j - \mu g_i p_{i,jj} - (\mu + \lambda) g_j p_{j,ji} + \rho g_i \ddot{p}_i, \tag{1.13}$$

$$F_i = -\mu f_{i,jj} - (\mu + \lambda) f_{j,ji} + \rho \ddot{f}_i. \tag{1.13_1}$$

Следует отметить, что соотношение (1.11) эквивалентно равенству

$$\sigma_{im}(\overline{x}^*, t) = 0; \quad \overline{x}^* \in A, \quad t > 0,$$

где $i = \overline{1,3}$, m - одно из значений i.

Таким образом, приведение к стандартной форме для первой основной задачи теории упругости возможно лишь в том случае, когда на поверхности заданы два касательных и одно нормальное напряжения, а не их линейная комбинация. Кроме того, нормаль к поверхности тела должна совпадать с одной из осей x_m выбранной триортогональной системы координат (последнее условие (1.9)). В дальнейшем представляют интерес собственные функции соответствующих (1.10), (1.11) или (1.10), (1.11_1) однородных краевых задач, образующих базисные системы, по которым ведутся разложения. Учитывая это, будем рассматривать уравнение

$$L(U_i) = 0, \quad \overline{x} \in V, \quad t > 0, \tag{1.14}$$

определяющее собственные гармонические колебания изотропного , однородного упругого тела.

Принимаем

$$U_i(\overline{x}, t) = U_i{}^0(\overline{x}) exp[(\sqrt{-1})\omega t], \tag{1.15}$$

где $U_i{}^0(\overline{x}), \omega$ - формы и соответствующие им круговые частоты свободных колебаний тела.

Подстановка (1.15) в равенства (1.14), (1.11), (1.11_1) позволяет окончательно сформулировать краевые задачи, для которых и доказывается ниже теорема разложения. Имеем:

$$L_h(U_i{}^0) = \xi U_i{}^0; \qquad \overline{x} \in V; \tag{1.16}$$

$$B_A = \sigma^0_{im}(\overline{x}^*) = \mu[U^0_{i,m}(\overline{x}) + U^0_{m,i}(\overline{x})]|_{\overline{x}=\overline{x}^*} + \lambda U^0_{k,k}(\overline{x})|_{\overline{x}=\overline{x}^*}\delta_{im} = 0; \quad \overline{x}^* \in A; \tag{1.17}$$

$$B_A = U^0_i(\overline{x}^*) = 0; \qquad \overline{x}^* \in A. \tag{1.17$_1$}$$

$$\text{Здесь } L_h(U^0_i) = -(2\lambda + \mu)^{-1}\sigma^0_{ij,j} = -(\alpha_1 U^0_{i,jj} + \alpha_2 U^0_{j,ji}); \tag{1.18}$$

$$\alpha_1 = \mu(2\lambda + \mu)^{-1}; \quad \alpha_2 = (\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)^{-1}; \quad \xi = \rho\omega^2(2\lambda + \mu)^{-1}; \tag{1.19}$$

$\sigma^0_{ij}(\overline{x})$ - компоненты тензора амплитудных напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} exp[(\sqrt{-1})\omega t];$$

ξ - частотный параметр, определяющий собственные значения краевых задач (1.16), (1.17) и (1.16), (1.17_1).

Выражение потенциальной энергии деформации упругого тела без учета массовых сил записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma^0_{ij}\epsilon^0_{ij} dV > 0. \tag{1.20}$$

Здесь ϵ^0_{ij} - компоненты тензора амплитудных деформаций тела, согласованных с σ^0_{ij}.

2. Общие свойства операторов

Докажем сначала два важных свойства оператора L_h , полагая, что его областью определения D является полное вещественное гильбертово пространство H при наличии условий (1.17), (1.17_1).

Пусть $U_i^0(\overline{x}), W_i^0(\overline{x}) \in L_2(V)$ - компоненты двух векторов перемещений, удовлетворяющие соотношениям (1.16), (1.17) или (1.16), (1.17_1). Будем считать, что U_i^0 и W_i^0 соответствуют напряженно-деформированные состояния тела $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0$ и $\overline{\sigma}_{ij}^0, \overline{\epsilon}_{ij}^0$.

Составим выражение, определяющее разность скалярных произведений. Учитывая при этом равенство (1.18) и преобразование Грина (формулу интегрирования по частям для объемного интеграла) [22], находим

$$(U_i^0, L_h(W_i^0)) - (L_h(U_i^0)W_i^0) = (2\lambda+\mu)^{-1}\int\limits_V (\sigma_{ij,j}^0 W_i^0 - \overline{\sigma}_{ij,j}^0 U_i^0)dV =$$

$$= (2\lambda+\mu)^{-1}[\int\limits_V (\overline{\sigma}_{ij}^0 U_{i,j}^0 - \sigma_{ij}^0 W_{i,j}^0)dV + \int\limits_A (\sigma_{ij}^0 W_i^0 - \overline{\sigma}_{ij}^0 U_i^0)n_j dS]. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание, что $n_j = \delta_{jm}$, имеем

$$\sigma_{ij}^0 n_j = \sigma_{im}^0, \quad \overline{\sigma}_{i,j}^0 n_j = \overline{\sigma}_{im}^0. \tag{2.2}$$

Соотношения (2.2), совместно с граничными условиями (1.17), (1.17_1), указывают на обращение в нуль поверхностного интеграла, стоящего в правой части (2.1).

Используя теперь формулу (1.3) и выражение для компонент кососимметричного тензора вращения [21]

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i}), \tag{2.3}$$

находим

$$U_{i,j}^0 = \varepsilon_{ij}^0 + \omega_{ij}^0; W_{i,j}^0 = \overline{\varepsilon}_{ij}^0 + \overline{\omega}_{ij}^0. \tag{2.4}$$

Из представления (2.4) следует такое выражение:

$$\overline{\sigma}_{ij}^0 U_{i,j}^0 - \sigma_{ij}^0 W_{i,j}^0 = \overline{\sigma}_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \overline{\varepsilon}_{ij}^0. \tag{2.5}$$

Кроме того, по теореме Бетти о взаимности возможных работ [21] известно, что

$$\int\limits_V \overline{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^0 dV = \int\limits_V \sigma_{ij}^0 \overline{\varepsilon}_{ij}^0 dV. \tag{2.6}$$

Имея в виду (2.5), (2.6), замечаем теперь, что в правой части (2.1) обращается в нуль и объемный интеграл.

Таким образом, соотношение (2.1) преобразуется к следующему виду:

$$(U_i^0, L_h(W_i^0)) = (L_h(U_i^0), W_i^0). \tag{2.7}$$

Учитывая область определения L_h, из (2.7) следует, что оператор L_h является самосопряженным. При этом необходимо подчеркнуть и самосопряженность граничных условий $(1.17),(1.17_1)$, обращающих в нуль поверхностный интеграл в правой части преобразования (2.1). Равенства (2.5), (2.6) или (2.7) совместно с (2.1) позволяют получить другую формулировку теоремы Бетти, а именно

$$\int\limits_V \overline{\sigma}^0_{ij} U^0_{i,j} dV = \int\limits_V \sigma^0_{ij} W^0_{i,j} dV. \tag{2.8}$$

В свою очередь, из (2.8) с учетом уравнений движения (1.1) без массовых сил, преобразования Грина и представления (1.15) следует обобщенное условие ортогональности собственных форм колебаний упругого тела [23]

$$\sum_{i=1}^{3} \int\limits_V U_i^{0(r)} U_i^{0(n)} dV = \delta_{rn} \|\overline{U}_i{}^0\|^2, \tag{2.9}$$

где r,n -соответствующие формы колебаний; $\|\overline{U_i}^0\|$ - норма в пространстве $\overline{L}_2$

Таким образом, свойство (2.7) (его следствие (2.9)) позволяет утверждать, что собственные вектор-функции $\{\overline{U_n}^0\}, n=\overline{1,\infty}$ краевых задач (1.16), (1.17) представляют обобщенно-ортогональную систему, которую без ограничения общности можно считать ортонормальной $\|\overline{U_i}^0\| = 1$. Поэтому формально допустимо разложение в ряд Фурье

$$\overline{v}(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{U}^0_n(\overline{x}); \quad \overline{x} \in V, \quad c_n = (\overline{v}, \overline{U}^0_n) = \int\limits_V \overline{v}\,\overline{U}_n{}^0 dV. \tag{2.10}$$

Пару формул (2.10) можно трактовать как обобщенное интегральное преобразование с конечными пределами (КИП) по переменной $\overline{x}$ [1]. Покажем теперь, что оператор L_h является положительно определенным. Для этого рассмотрим функционал

$$I(U_i^0) = (L_h(U_i^0), U_i^0) = -(2\lambda+\mu)^{-1} \int\limits_V \sigma^0_{ij,j} U_i^0 dV. \tag{2.11}$$

Используя аналогично предыдущему преобразование Грина, формулу (2.4) и учитывая граничные условия $(1.17),(1.17_1)$, а также представление (1.20), выражение (2.11) приводится к такому виду:

$$(L_h(U_i^0), U_i^0) = (2\lambda+\mu)^{-1} \int\limits_V \sigma^0_{ij} \varepsilon^0_{ij} dV = 2(2\lambda+\mu)^{-1} \Pi. \tag{2.12}$$

Принимая во внимание (1.20), можно утверждать, что

$$(L_h(U_i^0), U_i^0) \geq 0. \tag{2.13}$$

При этом знак равенства, в соответствии с (1.16), отвечает случаю, когда $\xi = 0$, т.е. таким движениям, которые совершает абсолютно твердое тело. Исключая их из рассмотрения, неравенство (2.13) становится равносильным следующему:

$$(L_h(U_i^0) \geq \gamma^2 \|\overline{U}_i^0\|^2. \tag{2.14}$$

Здесь $\gamma = const, (I_m\gamma = 0)$.

Таким образом, $L_h(U_i^0)$ представляет положительно определенный оператор.

Замечание 1. *Если строго следовать процедуре решения начально-краевых задач теории упругости методом разложения по собственным функциям, то доказанные свойства самосопряженности и положительной определенности оператора L_h справедливы фактически в*

$$D_L = \{U_i^0, W_i^0 | U_i^0, W_i^0 \in L_2(V), B_A = 0\} \subset L_2(V), \;\; \textit{т. е.} \forall U_i^0 \in D_L.$$

Это значит, что областью определения L_h является линеал из $L_2(V)$ с нулевыми краевыми условиями (1.17_1) или (1.17_2).

3. Основные теоремы

Теорема разложения основывается на некоторых вспомогательных утверждениях, к рассмотрению которых перейдем в этом параграфе. Исходя из физических представлений, следует предположить, что $U_i^0(\overline{x}), \sigma_{ij}^0(\overline{x}), \epsilon_{ij}^0(\overline{x})$ являются гладкими ограниченными функциями $\overline{x} \in V$ почти всюду. В этом случае справедливо очевидное неравенство

$$I(U_i^0) = (L_h(U_i^0), U_i^0) = (2\lambda + \mu)^{-1} \int\limits_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV \leq C, \tag{3.1}$$

где C - некоторая положительная константа.

Кроме того, это допущение позволяет не делать различия между интегралами, определенными по Лебегу и Риману [24].

Теорема 1. *Для гладкой, ограниченной почти всюду в V вектор-функции $\overline{U}^0(\overline{x})$ с компонентами $U_i^0(\overline{x}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \overline{x}(x_1, x_2, x_3)$ справедливо неравенство*

$$C_1 \sum_{i=1}^{3} \|\partial U_i^0\|^2 - C_2 \sum_{i=1}^{3} \|U_i^0\|^2 \leq I(U_i^0) = (L_h(U_i^0), U_i^0) \leq C \tag{3.2}$$

с некоторыми, не зависящими от $\overline{U}^0$ положительными константами $C_s (s = 1, 2)$. Постоянные C_s зависят от упругих постоянных материала λ, μ, а положительная константа C зависит от $\overline{U}^0$.

Здесь используются известные обозначения для норм, т.е.

$$\|U_i^0\|^2 = \int\limits_V (U_i)^2 dV,$$

$$\|\partial U_i^0\|^2 = \int\limits_V [(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_i^0}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial U_i^0}{\partial x_3})^2] dV.$$

Доказательство теоремы проводим по аналогии с [19]. Во-первых, замечаем, что верхняя оценка следует из неравенства (3.1). Для получения оценки снизу воспользуемся фундаментальным неравенством Гобера [25]:

$$\frac{1}{2}\int\limits_V [(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_1})^2 +$$

$$+(\frac{\partial U_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_2})^2] dV \geq C^* \sum_{i=1}^3 \|\partial U_i{}^0\|^2 - \sum_{i=1}^3 \|U_i^0\|^2. \tag{3.3}$$

Используя соотношения (1.2) - (1.4), (1.15), функционал (2.12) может быть представлен в следующем виде:

$$I(U_i^0) = (L_h(U_i^0)U_i^0) = (2\lambda+\mu)^{-1}\int\limits_V \{(\lambda+2\mu)[(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})^2] +$$

$$+2\lambda[\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}] + \mu[(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_1})^2 +$$

$$+(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_2})^2]\} dV. \tag{3.4}$$

Усилим неравенство (3.3). Сначала умножим все его члены на $\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$ $(0 < \frac{\mu}{\lambda+2\mu} < 0.5)$, а затем добавим к левой части интеграл от положительно определенной квадратичной формы. Имеем

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\int\limits_V (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})^2 dV + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_V [(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} +$$

$$+\frac{\partial U_2^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_2})^2] dV \geq$$

$$\geq C_1{}^* \sum_{i=1}^3 \|\partial U_i{}^0\|^2 - C_2{}^* \sum_{i=1}^3 \|U_i^0\|^2, \tag{3.5}$$

где $C_1{}^*, C_2{}^*$ - новые постоянные, зависящие от λ, μ

$$0 < \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} < 1.$$

Замечаем, что

$$0 < \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})^2 < (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})^2 + \\ + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}),$$

откуда следует неравенство (3.5) в усиленной форме

$$\int\limits_V [(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})^2]dV + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\int\limits_V (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} + \\ + \frac{\partial U_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3})dV + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_V [(\frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} + \\ + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^0}{\partial x_4})^2]dV \geq C_1^* \sum_{i=1}^{3} \|\partial U_i{}^0\|^2 - C_2^* \sum_{i=1}^{3} \|U_i{}^0\|^2. \tag{3.6}$$

Имея в виду (3.6), немедленно получаем для (3.4) оценку

$$I(U_i^0) = (L_h(U_i^0), U_i^0) \geq C_1^* \sum_{i=1}^{3} \|\partial U_i^0\|^2 - C_2^* \sum_{i=1}^{3} \|U_i^0\|^2.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Множество M гладких вектор-функций с компонентами $U_i{}^0$ из области определения D_L самосопряженного, положительно определенного оператора L_h (1.18) компактно.*

При доказательстве используем сначала (2.14) и (3.2), откуда находим

$$\gamma^2 \|\overline{U}_i^0\|^2 \leq C, \qquad \text{или}$$

$$\|\overline{U}_i^0\|^2{}_{\overline{L}_2(V)} = \sum_{i=1}^{3} \|U_i^0\|^2 \leq \gamma^{-2} C = C_3 = const. \tag{3.7}$$

С другой стороны, из (3.2) непосредственно следует

$$C_1 \sum_{i=1}^{3} \|\partial U_i^0\|^2 \leq C + C_2 \sum_{i=1}^{3} \|U_i^0\|^2. \tag{3.8}$$

Объединяя (3.7), (3.8), приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^{3} \|\partial U_i^0\|^2 = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_V (\frac{\partial \overline{U}^0}{\partial x_j})^2 dV \leq C_4 = const. \tag{3.9}$$

Учитывая определение нормы в гильбертовом пространстве обобщенных функций (пространстве Соболева) $\overline{H}^1$[26] и оценки (3.7), (3.9), получаем:

$$\|\overline{U}_i^0\|^2_{\overline{H}^1(V)} = \|\overline{U}_i^0\|^2_{\overline{L}_2(V)} + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_V (\frac{\partial \overline{U}^0}{\partial x_j})^2 dV \leq C_5 = const. \tag{3.10}$$

При этом следует иметь в виду, что для гладких почти всюду вектор-функций обобщенная и обычная производные совпадают [25, с.112], т.е. в (3.10) $\frac{\partial \overline{U}^0}{\partial x_j}$ можно считать обычными производными.

Из условия (3.10) следует, что вектор-функции $\overline{U}^0$ образуют ограниченное в $\overline{H}^{(1)}(V)$ множество M. Но ограниченное в $\overline{H}^{(1)}(V)$ множество компактно в $\overline{L}_2(V)$ [26, с. 144].

Теорема доказана.

Имея в виду (2.14) и теоремы 1 и 2, сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 3. *(ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ):*

а) оператор L_h , порожденный системой уравнений (1.16) и однородными граничными условиями $(1.17_1), (1.17_2)$, имеет дискретный спектр

$$0 < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq ... \leq \xi_n \leq ... \quad \xi \to \infty \quad , n \to \infty$$

с предельной точкой на $+\infty$. Соответствующая собственным значениям ξ_n ортонормированная система собственных вектор-функций $\{\overline{U}_n^0(\overline{x})\}$; $(\overline{U}_r^0; \overline{U}_n^0) = \delta_{rn}$, $\overline{x}(x_1, x_2, x_3)$ является полной и образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\overline{L}_2(V)$;

б) произвольная вектор-функция $\overline{\upsilon}(\overline{x}) \in \overline{L}_2(V)$ с компонентами $\upsilon_i(\overline{x}) \in L_2(V)$, $(i = \overline{1,3})$, удовлетворяющая условию

$$\|\overline{\upsilon}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} {C_n}^2 < +\infty, \tag{3.11}$$

раскладывается в ряд Фурье (2.10) по системе $\{\overline{U}_n^0(\overline{x})\}$

$$\overline{\upsilon}(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \overline{U}_n^0(\overline{x}), \tag{3.12}$$

где

$$C_n = (\overline{\upsilon}, \overline{U}_n^{0(n)}) = \int\limits_V \overline{\upsilon}\,\overline{U}_n^0 dV. \tag{3.13}$$

Функция $\overline{\upsilon}(\overline{x})$ является единственной, а ряд (3.12) сходится покомпонентно в среднем квадратичном, т.е.

$$\int\limits_V |\upsilon_i(\overline{x}) - \sum_{n=1}^{l} C_n U_i^{0(n)}(\overline{x})|^2 dV \to 0 \quad \text{при } l \to \infty. \tag{3.14}$$

Доказательство первой части теоремы приведено в [22, с. 216]. При этом существенно используется положительная определенность оператора L_h (2.14), ограниченность множества M вектор-функций $\overline{U}^0$ по энергетической норме (3.2) и его компактность в $\overline{L}_h(V)$ (теорема 2 настоящей статьи). Вторая же часть по существу представляет теорему Рисса-Фишера, доказательство которой приведено в [27, с. 168].

Замечание 2. *Доказанное утверждение позволяет с уверенностью пользоваться методом разложения по собственным функциям при решении динамических задач теории упругости. Однако необходимо иметь в виду, что в случае первой основной и смешанной краевых задач этим методом можно пользоваться лишь тогда, когда на поверхности или части поверхности тела заданы нормальное и два касательных напряжения, а не их линейная комбинация.*

Замечание 3. *Соотношения (3.12), (3.13) могут рассматриваться как обратное и прямое конечное интегральное преобразование, в котором ортонормальная ядровая вектор-функция* $\overline{U}_n^0$ *является ненулевым решением однородной краевой задачи (1.16),* (1.17) *или* (1.17_1) *с собственными значениями* $\xi_n (n = \overline{1,\infty})$. *Если в дискретном спектре* ξ_n *имеются кратные (двукратные) значения* $\xi_n = \xi_k \quad (k = \overline{1,m})$,*то в данном случае формулу обращения (3.12) следует представить в таком виде:*

$$\overline{v}(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \overline{U}_n^0(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{m} C_k \overline{U}_k^*(\overline{x}).$$

Здесь $\overline{U}_n^0$, $\overline{U}_k^*(\overline{x})$ *- линейно независимые собственные вектор-функции, соответствующие обычным и кратным собственным значениям.*

В заключение следует отметить, что аналогичная теорема разложения имеет место и для моментного оператора технической теории тонких упругих оболочек [19].

Литература

[1] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та 1985, С. 176.

[2] Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований и его перспективы в решении краевых задач прикладной теории упругости. (Обзор) // Численные и аналитические методы расчета конструкций: Тр. международн. конф. Самара, 1998. С. 10-41.

[3] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики//Изв. вузов. Математика. 1991. N4. С. 57-63.

[4] Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования//Изв. вузов. Математика. 1991. N9. С.53-56.

[5] Сеницкий Ю.Э. О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований//Дифференц. уравнения. 1983. Т XIX, N9. С. 1636-1638.

[6] Сеницкий Ю.Э. Расчет неоднородных анизотропных цилиндра и сферы при действии произвольной радиально-симметричной динамической нагрузки // Прикл. механика. 1978. Т.14. N5. С. 9-15.

[7] Сеницкий Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра//Прикл. механика. 1981. Т. 17. N8. С. 95-100.

[8] Сеницкий Ю.Э. Динамическое кручение конечного анизотропного цилиндрического слоя//Прикл. механика. 1985. Т.21. N6. С. 11-17.

[9] Сеницкий Ю.Э. К проблеме интегрируемости осесимметричной краевой задачи динамики для неоднородного анизотропного конечного цилиндра//Прикл. механика. 1999. Т.35. N4. С.19-29.

[10] Сеницкий Ю.Э. О решении динамической задачи для упругой анизотропной прямоугольной области//Межвуз. сб. Расчет пространств. строит. конструкций. КГУ. 1981. вып. 9. С. 3-13.

[11] Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра//Прикл. матем. и механика. 1993. Т.57. N1. С.116-122.

[12] Сеницкий Ю.Э., Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины //Известия РАН. Мех. тверд. тела. 1999. N1. С. 78-87.

[13] Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы//Прикл. механика. 1982. Т.18. N6. С. 34-41.

[14] Сеницкий Ю.Э. Вторая связанная динамическая задача термоупругости для плоского слоя//Прикл. механика. 1986. Т.22. N11. С.22-28.

[15] Friedrichs K.O. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korns inquality//Annals of Mathem. 1947. V.48. N2. P.441-471.

[16] Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.;Л.: Госиздат техн.-теорет. лит., 1952. С.250.

[17] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. С. 159.

[18] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. С. 383.

[19] Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. С. 384.

[20] Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. С. 224.

[21] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. С. 872.

[22] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. С. 512.

[23] Herman H. Some general orthogonality relations//J. of appl. Mech. Trans ASME, 1970. Ser.E. N3. P. 24-27.

[24] Натансон М.А. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. С. 480.

[25] Gobert J. Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité//Bull. royale sciences Liege. 1962. V. 31. N3-4. P. 182-191.

[26] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. С. 392.

[27] Рисс Ф., Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит, 1954. С.500.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ в соответствии с конкурсом грантов по фундаментальным исследованиям в области технических наук, проект ТОО-12.1-2109.

THEOREM OF EXPANSION ON CHARACTERISTIC VECTOR-FUNCTIONS IN DYNAMIC THEORY OF ELASTICITY

Yu. Senitsky [3]

Using the Gobert inquality we give the proof of fundamental theorem stating that linear differential operators of dynamic theory of elasticity generate extended-orthogonal systems of characteristic vector-functions, but corresponding to them complete spectral expansions are the only ones and possess mean square converge in the metric of spase L_2. The results are correct for resolving functions in class C^2 under defenite bounding conditions for the first basic and mixed boundary-value problems of theory of elasticity that is connected with the procedure it self with the method of expansion on characteristic vector-functions.

[3]Yuri Senitsky, dept. of Strength Matters and Structural Mechanics of Samara State Academy of Architecture and Civil Engineering.