НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ КАК ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Ю.Н. Радаев [1]

Нелинейная теория упругости представлена как физическая теория поля в одном из канонических вариантов. Изложение существенно отличается от характерных для механики слошных сред и теории упругости способов определения базовых понятий и вывода основных полевых уравнений. Исходя из вариационного принципа минимальности действия для нелинейно упругого поля, даны канонические и естественные определения всех важнейших тензорных полей, необходимых для его описания, в том числе с учетом возможной сингулярности поля, обусловленной материальной неоднородностью среды и наличием повреждений. Систематический вывод законов сохранения нелинейной теории упругости и соответствующих им инвариантных интегралов, которые являются теоретической основой нелинейной механики разрушения и имеют важное прикладное значение, реализован с помощью последовательного проведения принципа двойственности описания деформации. Исследуется также степень определенности тензорных характеристик поля.

Введение

Вариационная формулировка как средство математического представления физической теории часто рассматривается в качестве самого элегантного и экономичного (в духе принципа экономии мышления Маха (E. Mach)) представления, по крайней мере, для физических теорий, не претендующих на описание диссипативных процессов. Классическая механика Лагранжа и Гамильтона является великолепным образцом теории, реализованной с помощью вариационного описания. Наконец, следует отметить, что вариационные принципы были положены в основу теории электромагнитного и гравитационного поля в [1].

Механика континуума, являясь классической теорией поля, не может быть исключением: исследование обобщенных симметрий и инвариантных групп для функционала действия есть, по-видимому, не только самое мощное средство проникновения в сущность самой механики континуума, но и регулярный метод вывода инвариантных интегралов нелинейной механики, которые часто (как об этом убедительно свидетельствует опыт механики разрушения) могут иметь и важное прикладное значение.

[1] Радаев Юрий Николаевич, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета

Представленный материал располагается в следующей последовательности: сначала излагаются законы сохранения нелинейной теории упругости в их каноническом варианте [2] и необходимые для дальнейшего элементы теории поля, затем на основании теоремы Нетер (E. Noether) [3] получена общая форма закона сохранения, соответствующая той или иной вариационной симметрии действия, далее с помощью базовых вариационных симметрий даются канонические определения всех важнейших векторных и тензорных полей нелинейной механики сплошных сред, необходимые для вывода нетривиальных законов сохранения в общем нелинейном случае (в том числе с учетом динамического вклада в функционал действия), и, наконец, обсуждается ограниченный вариант теории вариационных симметрий, развитый в [4]. В качестве дополнения следует рассматривать последний раздел статьи, посвященный лагранжиану пустого пространства. Добавление лагранжиана пустого пространства к лагранжиану физического поля не изменяет условий стационарности действия, хотя и может изменять выражения для канонических тензоров. Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и нетривиальных законов сохранения.

В целом статью следует рассматривать как компактное, но вполне строгое изложение нелинейной теории упругости с позиций классической теории поля. В то же время в работе освещены и формальные основы нелинейной механики разрушения, которая в значительной мере базируется (в формальном плане) на аппарате инвариантных интегралов, которые по существу представляют собой инвариантную формулировку основных физических законов сохранения в виде интегралов по контуру или поверхности, не зависящих от пути интегрирования (см. [5–8], [10, p.58–73], [2, p.100–113]).

Последовательное изложение затрагиваемого круга проблем заинтересованный читатель может найти также в известной монографии [2]. К сожалению, на русском языке имеется весьма ограниченный набор литературных источников по проблеме применения вариационных симметрий в нелинейной теории упругости. Так, в известной монографии [11] вообще нет никаких указаний на это.

По поводу формализма исчисления вариаций для функционалов с переменной областью интегрирования и доказательства теоремы Нетер см. [12–15]. Систематическое изложение теории симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных дано в четвертой главе монографии [4].

1. Канонические законы сохранения

Мы будем рассматривать общий нелинейный случай и начнем с краткого анализа основных соотношений кинематики. Обозначения, используемые далее, в основном согласуются со схемой рациональной механики [16]. Компактное изложение теории конечных деформаций читатель может найти в [2] и [17], систематическое – в духе рациональной механики Нолла–Трусделла (W. Noll, C. Truesdell) – в монографии [18].

Следуя традиционной схеме рациональной механики, обозначим через $\mathbf{x}$ положение (место) в пространстве в момент времени t материальной частицы $\mathbf{X}$. Ясно, что места $\mathbf{x}$ составляют актуальную конфигурацию тела $\mathcal{K}$, а места $\mathbf{X}$ – отсчетную конфигурацию $\mathcal{K}_R$.

Деформация тела, развивающаяся с течением времени, представляется как достаточно гладкое отображение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{1.1}$$

отсчетной конфигурации на актуальную: $\mathcal{K}_R \to \mathcal{K}$.

Это отображение можно обратить и представить, таким образом, деформацию в виде обратного отображения

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \tag{1.2}$$

Здесь важно отдавать себе отчет в том, что уже на этом первоначальном этапе проявляется характерная для всей нелинейной механики сплошных сред двойственность: двойственность представления деформации (1.1) и (1.2) (прямое и обратное описания) влияет затем на выбор мер деформации и формулировку законов сохранения.

Градиент деформации

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \mathbf{x})^{\mathrm{T}} \tag{1.3}$$

является важнейшим конструктивным элементом кинематики континуума.

Обратный градиент, естественно, определяется как

$$\mathbf{F}^{-1} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{X})^{\mathrm{T}}, \tag{1.4}$$

и, следовательно, $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ есть единичный тензор.

Вектор скорости определяется как частная производная по времени прямого представления (1.1):

$$\mathbf{v} = (\partial_t \mathbf{x})_{\mathbf{X}}. \tag{1.5}$$

Материальная скорость определяется как частная производная по времени обратного представления (1.2):

$$\mathfrak{v} = (\partial_t \mathbf{X})_{\mathbf{x}}. \tag{1.6}$$

Оба типа скорости связаны соотношением:

$$\mathfrak{v} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}. \tag{1.7}$$

Два основных закона сохранения (массы и импульса) можно сформулировать в материальной форме (т.е. по отношению к конфигурации $\mathcal{K}_R$):

$$(\partial_t \rho_{\mathrm{R}})_{\mathbf{X}} = 0, \;\; (\partial_t \mathbf{p})_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \tag{1.8}$$

где

$$\mathbf{p} = \rho_{\mathrm{R}} (\partial_t \mathbf{x})_{\mathbf{X}} = \rho_{\mathrm{R}} \mathbf{v} \tag{1.9}$$

есть физический импульс,

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = J \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{S}$ – первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши, $J = \det \mathbf{F}$. Мы подразумеваем отсутствие поля массовых сил и не учитываем их вклада в баланс импульса.

Баланс энтропии также сформулируем в материальной форме:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{J} = \sigma_{\mathrm{th}} + \sigma_{\mathrm{intr}}, \tag{1.11}$$

где s – плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) энтропии, $\mathbf{J}$ – материальный вектор потока энтропии. Производство энтропии – слагаемые в правой части последнего уравнения – складывается из двух частей: вклад σ_{th} обусловлен теплопроводностью, а σ_{intr} – внутренним производством энтропии при необратимых изменениях состояния.

Процесс теплопроводности описывается материальным уравнением притока тепла:

$$\vartheta\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot\mathbf{h} = \vartheta\sigma_{\mathrm{intr}}, \tag{1.12}$$

где ϑ – абсолютная температура, $\mathbf{h}$ – материальный вектор потока тепла.

Введем две основные функции, необходимые для представления в рамках классической теории поля.

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = K - \psi \tag{1.13}$$

представляет собой разность кинетической

$$K = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \tag{1.14}$$

и свободной энергии Гельмгольца (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии)

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \vartheta, \alpha, \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\alpha, \mathbf{X}), \tag{1.15}$$

где переменная α зарезервирована для внутренних (скрытых) переменных состояния, аргумент $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\alpha$ подразумевает возможность диффузии и локализации физической величины, представляемой скрытой переменной α, аргумент $\mathbf{X}$ указывает на возможную материальную неоднородность тела, на его дефектную или поврежденную структуру.

Полная энергия (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии)

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} + K \tag{1.16}$$

есть сумма внутренней энергии $\mathcal{E}$ и кинетической энергии K.

Внутренняя энергия $\mathcal{E}$ и свободная энергия ψ связаны соотношением:

$$\mathcal{E} = s\vartheta + \psi. \tag{1.17}$$

Еще одну группу уравнений составляют определяющие уравнения:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}},\ \ s = -\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \tag{1.18}$$

$$\overline{\mathcal{A}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha},\ \ \boldsymbol{\mathcal{M}} = \frac{\partial\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\alpha)}, \tag{1.19}$$

$$\mathbf{h} = \vartheta\mathbf{J},\ \ \sigma_{\mathrm{th}} = -\mathbf{J}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\ln\vartheta),\ \ \vartheta\sigma_{\mathrm{intr}} = \mathcal{A}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}, \tag{1.20}$$

где

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}} = -\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} \tag{1.21}$$

есть обобщенная термодинамическая сила, сопряженная потоку внутренней переменной состояния α.

Канонические уравнения баланса импульса и энергии выводятся из уравнения баланса импульса (1.8) умножением слева соответственно на $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{v}$:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{f}^{\mathrm{inh}} - \mathbf{f}^{\mathrm{th}} - \mathbf{f}^{\alpha} = \mathbf{0}, \tag{1.22}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = 0. \tag{1.23}$$

В этих уравнениях

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = -\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p} \tag{1.24}$$

– канонический импульс (псевдоимпульс),

$$\mathbf{P} = -\left(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\mathcal{M}} \otimes (\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\alpha)\right) \tag{1.25}$$

– тензор напряжений Эшелби (J.D. Eshelby);[2]

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{h} \tag{1.26}$$

– материальный вектор потока энергии;

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} \tag{1.27}$$

– материальный вектор Умова–Пойнтинга (Н.А. Умов, J.H. Poynting);

$$\mathbf{f}^{\mathrm{th}} = s(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta) \tag{1.28}$$

– термическая материальная сила, обусловленная неоднородностью распределения температуры;

$$\mathbf{f}^{\alpha} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\alpha) \tag{1.29}$$

---

[2]Тензор напряжений $\mathbf{P}$ (этот же тензор часто называют тензором энергии-импульса) был введен в механику Эшелби [19]. В современной литературе по нелинейной механике сплошных сред встречаются (в рамках одной и той же физической интерпретации) различные определения тензора энергии-импульса (см., например, монографии [2,19]).

С точки зрения интегральных законов сохранения механики тензор напряжений Эшелби играет роль, аналогичную тензору $\mathbf{S}$, при формулировке баланса полной энергии внутри фиксированного контрольного объема в физическом пространстве. В этом случае соответствующий объем в отсчетной конфигурации будет подвижным. С помощью формулы дифференцирования интеграла по подвижному объему нетрудно проверить ([19, p.172–173]), что (мы пренебрегаем здесь внутренними степенями свободы)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathcal{H} d\tau_R = \oint\limits_{\partial} (\boldsymbol{\mathcal{N}} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathfrak{v}) - \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}}) d\mathcal{S}_R,$$

где тензор

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathcal{H}\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$$

не существенно отличается от тензора напряжений Эшелби $\mathbf{P} = -\mathcal{L}\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$. Тензор $\tilde{\mathbf{P}}$ играет главную роль при подсчете скорости освобождения энергии вследствие продвижения края трещины.

Отметим также, что в квазистатическом приближении (ср. [19, p.172])

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = -J\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}}\left(\frac{\psi}{J}\right).$$

Симметрия тензора напряжений Коши $\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}$ влечет за собой равенство $\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$ – правый тензор деформации Коши–Грина.

– материальная сила, обусловленная неоднородностью распределения скрытой переменной α;

$$\mathbf{f}^{\mathrm{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathrm{expl}} \tag{1.30}$$

– сила, действующая на материальную неоднородность (сила Эшелби).

Заметим также, что

$$\mathcal{H} = s\vartheta - \boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}) - \mathcal{L}, \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \rho_{\mathrm{R}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}), \tag{1.32}$$

$$K = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} \mathfrak{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathfrak{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot \mathfrak{v}, \tag{1.33}$$

$$\mathbf{f}^{\mathrm{inh}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\rho_{\mathrm{R}}) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{1.34}$$

$$s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathfrak{v}}. \tag{1.35}$$

Следствием канонического уравнения баланса импульса (1.22) является (в квазистатическом приближении) соотношение

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{f}^{\mathrm{inh}}, \tag{1.36}$$

или в случае материально однородного тела –

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}. \tag{1.37}$$

Полученный результат устанавливает инвариантность интеграла

$$\oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{P}\, d\mathcal{S}_R = \mathbf{0} \tag{1.38}$$

(здесь интегрирование производится по любой замкнутой поверхности $\mathcal{S}$, не содержащей внутри сингулярностей упругого поля; $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ – единичный вектор внешней нормали) в плане независимости значения интеграла от формы поверхности $\mathcal{S}$ в отсчетной конфигурации $\mathcal{K}_R$.

Впервые инвариантные интегралы появились в классическом трактате Максвелла (J. C. Maxwell) в 1873 г. при определении напряжений в электромагнитном поле.[3] В статической линейной упругости аналогичные интегралы, используя метод Максвелла, ввел в 1951 г. Эшелби [19]. Фактически Эшелби использовал инвариантные интегралы для вычисления конфигурационной силы, действующей на упругую неоднородность эллипсоидальной формы. Согласно Эшелби, сила f_k^{inh}, которая действует на дефект или включение в упругой среде, может быть вычислена с помощью не зависящего от пути интеграла

$$f_i^{\mathrm{inh}} = \oint_{\Sigma} n_k P_{ki} d\Sigma,$$

где замкнутая поверхность Σ должна охватывать дефект или включение, P_{ki} – тензор напряжений Эшелби.

[3] Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I, II. М.: Наука, 1989. 416 с., 440 с. Речь идет о вычислении сил, действующих на элемент тела, помещенного в электромагнитное поле (Т. II, с. 226-231).

Позднее инвариантный интеграл был выведен Гюнтером (W. Gunter) [5] на основе вариационного принципа Нетер (E. Noether) [3]. Систематический вывод инвариантных интегралов теории упругости с помощью вариационного принципа Нетер был дан в статье [6]. Наконец следует упомянуть работы [7–9], где большое количество нетривиальных законов сохранения было получено на базе теории обобщенных групповых симметрий.

В 1967 г. Г. П. Черепанов [20] получил инвариантный Г-интеграл механики разрушения непосредственно из закона сохранения энергии. Интенсивное применение инвариантного интеграла (J-интеграла) в механике разрушения в качестве параметра, характеризующего напряженно-деформированное состояние трещины в упругопластических телах, восходит к 1968 г., когда инвариантный интеграл был сформулирован Райсом (J. R. Rice) [21].

2. Элементы теории поля

Ниже будут даны необходимые сведения (преимущественно формального плана) из современной теории поля. Для понимания излагаемой ниже теории необходимо достаточно свободное владение исчислением вариаций (например, в рамках замечательного курса вариационного исчисления [14]). Компактное изложение имеется в [12, p.260–264]. Можно рекомендовать также монографию [2, p.96–115].

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия:

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}\times[t_1,t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, ..., X^\beta) d^4X, \tag{2.39}$$

где φ^k – упорядоченный массив физических полевых величин, X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) – пространственно-временные координаты,[4] $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице), d^4X – элемент объема, $\mathcal{D}$ – область трехмерного пространства,[5] в которой изменяются координаты X^1, X^2, X^3, t_1, t_2 – границы временного интервала.

Под d^4X мы понимаем "естественный" элемент объема

$$d^4X = dX^1dX^2dX^3dX^4.$$

Инвариантный элемент объема $d^4\tau$ пространственно-временного многообразия определяется на основании

$$d^4\tau = \sqrt{g}dX^1dX^2dX^3dX^4,$$

где g – определитель (точнее, его абсолютная величина), составленный из метрических коэффициентов $g_{\alpha\beta}$. Поскольку метрика пространства-времени гиперболична,

[4] Аналогия между пространством и временем была известна еще древним грекам. Аристотель включал время в число непрерывных величин наряду с линиями, поверхностями и телами. В современной физике равноправие пространственных координат и времени утверждалось в процессе становления теории относительности. Пространственно-временное многообразие – неотъемлемый элемент теории относительности. Геометрия пространства-времени как объект физической теории рассматривается, например, в [16, p.457–472]. С точки зрения классической механики сплошных сред переменные X^1, X^2, X^3 вполне аналогичны координатам Лагранжа, а оперирование с четырехмерным пространственно-временным многообразием исключительно удобно при описании динамических процессов в деформируемых средах.

[5] В рамках классической нелинейной механики сплошных сред следует считать, что $\mathcal{D} = \mathcal{K}_R$ ($\mathcal{K}_R$ – отсчетная конфигурация тела, деформацию которого обычно описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной), либо $\mathcal{D}$ – подобласть $\mathcal{K}_R$.

то обычно вместо $\sqrt{g}$ пишут $\sqrt{-g}$, ибо в последнем случае величина под корнем будет положительной.

Итак, инвариант $\sqrt{-g}dX^1dX^2dX^3dX^4$ – величина четырехмерного объема, измеренного в локальной координатной системе посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности. Инвариантный элемент объема следует отличать от "естественного" элемента объема $d^4X = dX^1dX^2dX^3dX^4$, так как координатная система пространственно-временного многообразия может быть криволинейной, и в этом случае величина $\sqrt{-g}$ отлична от единицы. При использовании криволинейной координатной системы в пространственно-временном многообразии функционал действия следует писать в форме

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}\times[t_1,t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, ..., X^\beta)\sqrt{-g}d^4X.$$

Ясно поэтому, что часто характер координатной системы можно вообще не специфицировать, но тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не $\mathcal{L}$, а $\sqrt{-g}\mathcal{L}$.

Пространство-время является четырехмерным псевдоевклидовым пространством,[6] метрика которого задается знаконеопределенной квадратичной формой

$$ds^2 = \varepsilon_\beta(dX^\beta)^2 \qquad (\beta = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1,\ \varepsilon_4 = -1.$$

Определенное подобным образом 4-пространство обычно называют пространством Минковского (H. Minkowski).

Через ∂_β здесь и в дальнейшем обозначается оператор частного дифференцирования по пространственно-временным координатам X^β. Мы будем использовать этот оператор (вместо более удобной наблы Гамильтона ∇_β) с тем, чтобы изложение было выдержано в духе классического вариационного исчисления. Впрочем, все уравнения исчисления вариаций без труда представляются в прямой инвариантной записи, что позволяет сформулировать их в форме, инвариантной относительно преобразований пространственно-временных координат X^β.

Большинство современных физических теорий ограничивается градиентами первого порядка от полей φ^k.

Для классической механики сплошных сред физические поля φ^k – это закон движения (или деформирования) тела, представленный как зависимости координат Эйлера (т.е. координат в пространстве, которые выбираются наблюдателем для представления положений точек сплошной среды в процессе ее деформации) от координат Лагранжа (координаты Лагранжа, согласно традиционным представлениям механики сплошных сред, индивидуализируют точки континуума, являясь для каждой из них уникальной меткой):

$$x^k = x^k(X^1,\ X^2,\ X^3,\ X^4).$$

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что φ^k есть Эйлеровы координаты: $\varphi^k = x^k$.

---

[6] Геометрия псевдоевклидовых пространств и пространственно-временного многообразия в деталях изложена в книге: Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

В принципе деформацию сплошного тела можно описывать обратным отображением (так называемое обратное Лагранжево описание):

$$X^\beta = X^\beta(x^1, x^2, x^3, t).$$

Тогда роль физических полевых величин будут играть переменные Лагранжа. Ни одно из описаний – прямое Лагранжево и обратное Лагранжево – не имеет никаких преимуществ по сравнению с другим. Исторически сложилось так, что широкое распространение получило лишь прямое описание. И только в последнее время обратное описание стало проникать в работы по нелинейной теории упругости (см., например, монографию [2]).

Осознанное манипулирование с вариацией действия $\Im$ подразумевает ясное и строгое определение различных видов варьирования как самих полей φ^k, так и пространственно-временных переменных X^β. Поэтому мы начнем с базовых понятий и определений.

Основным исходным элементом, необходимым для определения понятия вариации, является однопараметрическое семейство (группа) преобразований пространственно-временных координат и физических полей:

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k), \tag{2.40}$$

где

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \;\; \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$

причем

$$\mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \;\; \Phi^k(\varphi^s, \mathcal{X}^\beta, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Величина ε – параметр группы, который может быть скалярным, векторным или тензорным.

Исключительный интерес представляют однопараметрические группы преобразований, которые не изменяют величины действия (или изменение действия является бесконечно малой величиной, порядка высшего, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Указанные группы обычно называют группами инвариантности действия (или вариационными симметриями).

Следует обратить внимание на тот факт, что пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят в группу преобразований явно не симметрично, ибо закон преобразования (2.40) не допускает трансформацию переменных X_β, зависящую от полей φ^k. Впоследствии мы рассмотрим более широкий спектр преобразований с целью устранения указанной несимметричности.

Заметим, что инвариантность действия означает, что[7]

$$\tilde{\mathcal{L}} d^4\tilde{\tau} = \mathcal{L} d^4 X,$$

где

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, ..., \tilde{X}^\beta)$$

– плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат $\tilde{X}^\beta$ и физических полей $\tilde{\varphi}^k$.

[7]Или приводимое ниже равенство должно удовлетворяться с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε.

Ясно, что в результате преобразования группой инвариантности действия плотность лагранжиана преобразуется (возможно, с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε) как обычная скалярная плотность:

$$\det\left(\frac{\partial\tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha}\right)\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k,\tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k,\tilde{\partial}_\gamma\tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k,...,\tilde{X}^\beta)=\mathcal{L}(\varphi^k,\partial_\beta\varphi^k,\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k,...,X^\beta).$$

Частичная (т.е. при неварьируемых пространственно-временных координатах X^β) вариация поля φ^k определяется как

$$\bar{\delta}\varphi^k=\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),X^\beta,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

Операторы ∂_β и $\bar{\delta}$ перестановочны:

$$\bar{\delta}\partial_\beta=\partial_\beta\bar{\delta}.$$

Вариациям физических полей φ^k, исчезающим как на границе пространственной области интегрирования, так и на границах временного интервала, отвечает вариация действия

$$\delta\Im=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k)\right\}d^4X,$$

или

$$\delta\Im=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}-\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\bar{\delta}\varphi^k d^4X. \tag{2.41}$$

Стационарность действия необходимо влечет уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi^k}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}-\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}=0. \tag{2.42}$$

Обобщение уравнений Эйлера–Лагранжа на тот случай, если плотность лагранжиана зависит от производных порядка выше первого, есть:[8]

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi^k}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}-\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}+\partial_\gamma\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}=0.$$

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k определены, как это следует ниже:

$$\delta X^\beta=\varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\quad \delta\varphi^k=\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$

где

[8] Мы не будем развивать далее теорию поля для лагранжиана, зависящего от градиентов полевых величин φ^k, порядка выше первого. По поводу соответствующего обобщения см., например, [2, p.116–117].

$$\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),X^\gamma,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\mathrm{expl}}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} +$$
$$+\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\tilde{X}^\gamma,\varepsilon)}{\partial\tilde{X}^\lambda}\right)\Bigg|_{\tilde{X}^\gamma=X^\gamma,\ \varepsilon=0}\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\lambda(X^\mu,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

Здесь мы используем обозначение вида

$$\left(\frac{\partial\Phi(\cdot,\cdot,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\mathrm{expl}}$$

для производной функции $\Phi(\cdot,\cdot,\varepsilon)$ по аргументу, который выражает ее явную зависимость от той переменной, по которой осуществляется дифференцирование, т.е. для частной производной функции $\Phi(\cdot,\cdot,\varepsilon)$ по аргументу ε, считая при этом фиксированными все остальные аргументы даже несмотря на то, что они могут в свою очередь также зависеть от ε.

Полная и частичная вариации φ^k связаны соотношением

$$\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \tag{2.43}$$

Полное варьирование действия по пространственно-временным координатам X^β и физическим полям φ^k приводит к следующему результату [14, p.176]:

$$\begin{aligned}\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta)\right\}d^4X &= \\ = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\bar{\delta}\varphi^k d^4X &+ \\ + \oint\limits_{\partial}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}N_\beta dA&,\end{aligned} \tag{2.44}$$

где N_β – единичная внешняя нормаль к трехмерной гиперповерхности, ограничивающей область интегрирования в четырехмерном пространственно-временном многообразии, dA – элемент площади указанной гиперповерхности.

3. Теорема Нетер

Теорема Нетер (по поводу доказательства см. [14, p.176–178]) устанавливает закон сохранения, соответствующий однопараметрической группе преобразований, не изменяющих величину действия (или изменяющих таковую, но на бесконечно малую величину, порядка высшего, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Другими словами, инвариантность действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической группы преобразований

$$(X^\beta,\varphi^k)\to(\tilde{X}^\beta,\tilde{\varphi}^k)$$

порождает некоторый (иногда весьма нетривиальный) дивергентный закон сохранения.[9]

[9] Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из вариационного принципа, излагается, например, в [15, p.227–261].

Требование инвариантности действия прежде всего выражает основные свойства пространства-времени, хотя отнюдь и не ограничивается лишь этими последними свойствами.

Априори можно указать следующие преобразования пространства Минковского, относительно которых действие инвариантно, а уравнения поля ковариантны:

1. Трансляции начала координат (однородность 4-пространства-времени).

2. Вращения 4-пространства-времени, содержащие как обычные повороты в пространстве, так и преобразования Лоренца (H. A. Lorentz) в собственном смысле этого слова (изотропия пространства и специальный принцип относительности).

3. Зеркальные отражения (инверсии) и обращение времени.

4. Произвольные точечные преобразования координат в пространстве Минковского, т.е. переход к криволинейным координатам (общий принцип относительности – отсутствие преимущественных систем отсчета).

Перечисленным преобразованиям, относительно которых уравнения поля ковариантны, соответствуют фундаментальные законы сохранения, имеющие смысл сохранения импульса, момента импульса и энергии (всего десять законов сохранения). Если удается разыскать иные группы инвариантности действия и получить дополнительный закон сохранения, то его принято называть нетривиальным.[10]

Исходным пунктом рассуждений является полученная выше формула для полной вариации действия.

Поскольку физические полевые величины φ^k в любом случае обеспечивают стационарность действия, то уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} = 0$$

должны удовлетворяться и, следовательно, вариацию действия (2.44) можно вычислить в виде

$$\delta\Im = \oint\limits_{\partial} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} N_\beta dA, \tag{3.45}$$

или, учитывая связь (2.43) между частичной и полной вариацией поля φ^k, в виде

$$\delta\Im = \oint\limits_{\partial} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} N_\beta dA. \tag{3.46}$$

Вводя четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\}, \tag{3.47}$$

вариацию действия можно также представить в форме

$$\delta\Im = \varepsilon \oint\limits_{\partial} J^\beta N_\beta dA. \tag{3.48}$$

[10] Часто оказывается невозможным установить физический смысл нетривиальных законов сохранения. Что касается теории упругости, то уже не поддаются физической интерпретации законы сохранения, следующие из изотропии пространства и возможности преобразования масштаба координатных осей.

Воспользуемся теперь предположением об инвариантности действия относительно однопараметрической группы преобразований[11]

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k).$$

Ясно, что

$$\delta\Im = 0,$$

и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \tag{3.49}$$

Таким образом, поток 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве-времени, равен нулю:

$$\oint\limits_{\partial} J^\beta N_\beta dA = 0.$$

Из каждого такого соотношения может быть получен инвариант поля, существующего в неограниченной среде, не изменяющий своего значения с течением времени. Действительно, рассмотрим четырехмерную область в форме цилиндра, основания которого $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ есть гиперплоскости, перпендикулярные оси времени. Поток 4-вектора J^β через границу этой области равен нулю. Если физические поля достаточно быстро затухают на бесконечности, то, удаляя боковую поверхность цилиндра в бесконечность, находим, что

$$\oint\limits_{X^4=C_1} J^\beta N_\beta d^3\tau + \oint\limits_{X^4=C_2} J^\beta N_\beta d^3\tau = 0.$$

Поскольку на гиперплоскостях $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ компоненты нормали $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ и соответственно $N_4 = -1$, $N_4 = 1$,

$$\oint\limits_{X^4=C_1} J^4 d^3\tau = \oint\limits_{X^4=C_2} J^4 d^3\tau,$$

т.е. интеграл по неограниченному пространству

$$\oint J^4 d^3\tau$$

не зависит от времени.

Компоненты вектора J^β, очевидно, без проблем вычисляются по формуле (3.47), если известна однопараметрическая группа инвариантности действия:[12]

$$\begin{aligned} J^\beta = \mathcal{L}\left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\mu,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\times \\ \times\left[\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial\mathcal{X}^\alpha(X^\mu,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\right], \end{aligned} \tag{3.50}$$

[11] Достаточно, однако, предположить, что действие не изменяет своей величины с точностью до малых порядка высшего, чем ε.

[12] Т.е. известны функциональные зависимости

$$\mathcal{X}^\beta(\,\cdot\,,\cdot\,),\ \ \Phi^k(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,).$$

где

$$\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),X^\gamma,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\rm expl}\right)\bigg|_{\varepsilon=0} +$$
$$+\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma),\tilde{X}^\gamma,\varepsilon)}{\partial\tilde{X}^\lambda}\right)\bigg|_{\tilde{X}^\gamma=X^\gamma,\ \varepsilon=0}\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\lambda(X^\mu,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

4. Основные группы инвариантности функционала действия

Мы рассмотрим две основные группы инвариантности Гамильтонова действия и формулировку соответствующих законов сохранения. Изложение в формальном плане будет в основном опираться на материал, представленный в [1,14].

Зафиксируем четыре-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства-времени вдоль α-оси:

$$X^\beta \to \tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma,\varepsilon) = X^\beta + \varepsilon\delta^\beta_\alpha. \tag{4.51}$$

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия, очевидно, инвариантен относительно группы трансляций пространства-времени, если плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β, следовательно, для направления α 4-вектор $J^\beta_{(\alpha)} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$, где

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \tag{4.52}$$

и канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства-времени, есть:

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0. \tag{4.53}$$

Если плотность лагранжиана зависит явно от пространственно-временных координат X^β, то свойство инвариантности потока 4-вектора $J^\beta_{(\alpha)}$ нарушается:

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\rm expl}. \tag{4.54}$$

Для доказательства достаточно заметить, что, с одной стороны,

$$\delta\Im = \varepsilon\int\partial_\beta J^\beta_{(\alpha)}d^4X, \tag{4.55}$$

а с другой – непосредственное вычисление вариации действия приводит к

$$\delta\Im = \varepsilon\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\rm expl}d^4X. \tag{4.56}$$

Сравнивая (4.55) и (4.56), приходим к (4.54).

Компоненты канонического 4-тензора $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ имеют размерность плотности энергии.[13] Тензор $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ часто называют тензором энергии-импульса (см., например, [1, с.105–109, 345–349]), поскольку канонические уравнения механики сплошных сред (1.23) и (1.22), выражающие баланс энергии ($\alpha = 4$) и импульса, являются непосредственным следствием канонического закона сохранения (4.54):

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{4.57}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{f}^{\mathrm{inh}}, \tag{4.58}$$

где

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = -\left(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}\right).$$

Действительно, чтобы, например, вывести уравнение (4.58), заметим сначала, что три первых уравнения (4.54) можно представить как

$$\partial_t T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

где $P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ – тензор напряжений Эшелби, определенный согласно (1.25). Затем преобразуем последнее уравнение к виду

$$-\rho_{\mathrm{R}} \partial_t (v_k \partial_\alpha x^k) - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = f^{\mathrm{inh}}_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

обозначая при этом

$$v^k = \partial_t \varphi^k,$$

и на основании определения (1.30)

$$f^{\mathrm{inh}}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание далее, что (см. уравнение (1.24))

$$-\mathcal{P}_\alpha = \rho_{\mathrm{R}} v_k \partial_\alpha \varphi^k, \tag{4.59}$$

приходим к каноническому уравнению баланса импульса

$$\partial_t \mathcal{P}_\alpha - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = f^{\mathrm{inh}}_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Уравнение (4.59) ясно указывает на то, что канонический импульс – 1-ковариантный отсчетный вектор.

Рассмотрим далее группу бесконечно малых вращений пространственно-временного многообразия X^β. Функционал действия должен быть инвариантен относительно этой группы преобразований.

Поворот прямоугольной системы координат в 4-пространстве Минковского порождает некоторый псевдоортогональный оператор $\Lambda^{\gamma\cdot}_{\cdot\nu}$:

$$X^\gamma \to \tilde{X}^\gamma = \Lambda^{\gamma\cdot}_{\cdot\nu} X^\nu.$$

[13] Обратим внимание читателя на тот факт, что, согласно каноническому определению тензора энергии-импульса, его естественное координатное представление – 1-контравариантное и 1-ковариантное.

Повороты 4-пространства Минковского образуют группу по умножению, зависящую от шести независимых вещественных параметров.

Бесконечно малое вращение пространства Минковского можно задать преобразованиями

$$\tilde{X}^{\beta} = X^{\beta} + \sum_{\alpha=1}^{4} \omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} X^{\alpha}, \tag{4.60}$$

где $\omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = g_{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma}$, $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ есть антисимметричный 4-тензор, компоненты которого выступают как параметры группы. Двенадцать величин $\omega^{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ связаны соотношениями $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых.

Ясно, что вариации пространственно-временных координат вычисляются как

$$\delta X^{\beta} = \sum_{\gamma<\alpha} \omega^{\gamma\alpha}(g_{\alpha\lambda}X^{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma} - g_{\gamma\mu}X^{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha}).$$

Будем считать, что группа Лоренца действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы трактуем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и не действует на физические поля φ^k (координатное представление которых осуществляется в Эйлеровой системе координат). Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^{β} в виде

$$\begin{aligned} J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^s)} \left[(\partial_{\alpha}\varphi^s)g_{\gamma\lambda}X^{\lambda} - (\partial_{\gamma}\varphi^s)g_{\alpha\mu}X^{\mu}\right] + \\ + \mathcal{L}(g_{\alpha\lambda}X^{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma} - g_{\gamma\mu}X^{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha}). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Определим далее тензор третьего ранга $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}$ формулами

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = J^{\beta(\gamma\alpha)}. \tag{4.62}$$

Тензор $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}$ называется тензором момента количества движения. Он антисимметричен по индексам γ, α. Заметим, что каноническое определение тензора момента количества движения указывает также и на его естественное координатное представление – 1-контравариантное и 2-ковариантное.

Заметим, что тензор момента количества движения выражается через тензор энергии-импульса по формуле

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = g_{\alpha\lambda}X^{\lambda}T^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} - g_{\gamma\mu}X^{\mu}T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}. \tag{4.63}$$

Соответствующий группе бесконечно малых вращений пространства-времени закон сохранения есть

$$\partial_{\beta}M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = 0. \tag{4.64}$$

Группа Лоренца может действовать также и на физические поля φ^k:

$$\tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^{\gamma}) = \varphi^k(X^{\gamma}) + \sum_{\alpha,s\neq\beta} S^{k\cdot,\cdot\alpha}_{\cdot s,\beta\cdot}\omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\varphi^s(X^{\gamma}), \tag{4.65}$$

где тензор четвертого ранга $S^{k\cdot,\cdot\alpha}_{\cdot s,\beta\cdot}$ преобразует антисимметричные тензоры второго ранга снова в антисимметричные.

Вычисляя вариации φ^k, получаем

$$\delta\varphi^k = \sum_{\alpha, s\neq\beta} S^{k\cdot,\cdot\alpha}_{\cdot s,\beta\cdot}\omega^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\varphi^s(X^\gamma).$$

В этом случае 4-вектор J^β находится в виде

$$-J^{\beta(\gamma\alpha)} = g_{\gamma\mu}X^\mu T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} - g_{\alpha\lambda}X^\lambda T^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} - \sum_{k,s} S^{k\cdot,\cdot\cdot}_{\cdot s,\gamma\alpha}\varphi^s \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}. \tag{4.66}$$

Величины (4.62) и в этом случае образуют тензор третьего ранга, антисимметричный по индексам γ, α. Соответствующий закон сохранения имеет форму, аналогичную (4.64).

5. Обобщенные группы преобразований. Стандартные, внутренние и внешние вариации

Как было отмечено выше, пространственно-временные координаты и физические поля входят в группу преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

несимметрично.

С целью восстановления симметрии расширим определение однопараметрической группы, допуская преобразования вида:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon), \;\; \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon), \tag{5.67}$$

где по-прежнему

$$\mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \;\; \Phi^k(\varphi^s, \tilde{X}^\beta, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Здесь пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^s уже симметрично входят в закон преобразования.[14]

Ясно, что определяемая подобным образом однопараметрическая группа порождает попутно преобразование пространственно-временной 4-области. Действительно, подставляя формулу

$$\tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon)$$

[14]Можно построить математическое представление упругого поля с помощью так называемого обратного описания деформации тела, развитого в работах Маженна (G. A. Maugin), которые подытожены в монографии [2] (см. также обзорную статью [23]). Обратное описание деформации сплошной среды и соответствующая вариационная формулировка нелинейной теории упругости (когда действие для упругого тела представлено на основе Эйлерова описания и варьированию подвергается обратное отображение $X^\beta = X^\beta(x^k, t)$) неожиданно оказываются удобными для исследования сингулярного упругого поля и позволяют, в частности, с иных позиций взглянуть на энергетические соотношения нелинейной механики разрушения. Сам автор этого подхода называет обратное описание деформации описанием Пиола (G. Piola) и отмечает, что обратная вариационная формулировка в сущности совпадает с использованной Пиола еще в XIX в. [24] (затем забытой и никогда на деле не применявшейся). Ясно, что и два традиционных способа описания деформации сплошного тела (в духе Лагранжа и Эйлера), и возможность расширения понятия группы инвариантности функционала действия и обобщенного варьирования – следствия универсального принципа двойственности и полной равноправности отсчетной и актуальной конфигураций тела в состоянии его деформации, пронизывающих механику деформируемых тел как единую теорию.

в
$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon),$$
получим уравнение
$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\Phi^s(\varphi^k(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon), X^\gamma, \varepsilon),$$
неявно определяющее зависимость $\tilde{X}^\beta = \tilde{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)$.

Подставив это последнее уравнение в
$$\tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$
получим соотношение
$$\tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon),$$
на основании которого преобразованные физические поля $\tilde{\varphi}^k$ могут быть представлены (правда, уже с помощью иных функций $\Phi^k(\cdot,\cdot,\cdot)$, чего мы не отражаем в обозначениях) через исходные – φ^k и пространственно-временные координаты X^β. Подобное перепредставление ведет также к перепредставлению новых пространственно-временных координат $\tilde{X}^\beta$:
$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

Действие
$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}\times[t_1,t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta) d^4X$$
в результате обобщенного преобразования $(X^\beta, \varphi^k) \to (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$ трансформируется в
$$\tilde{\Im} = \int\limits_{\tilde{\mathcal{D}}\times[\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) d^4\tilde{X},$$
где
$$\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta) \to \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta)$$
есть преобразование плотности лагранжиана.

Для оценки изменения действия в результате применения обобщенной группы преобразований воспользуемся формулой
$$\tilde{\Im} - \Im = \delta\Im + o(\varepsilon).$$

Вычисляя первую вариацию действия, находим
$$\delta\Im = \int \Big\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \\ + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\bar{\delta}X^\beta + \left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}\right)\partial_\alpha(\bar{\delta}X^\beta)\Big\} d^4X,$$
где
$$\bar{\delta}X^\beta = \varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s(X^\gamma), X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon\left(\frac{\partial\,\Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$
– частичные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s, формального различия между которыми (и способами варьирования которых) уже нет.[15]

[15] Иногда используется несколько другая терминология: например, в монографии [2] эти вариации называются соответственно Лагранжевой и Эйлеровой элементарными вариациями.

Если предположить, что частичные вариации исчезают на границе рассматриваемой 4-области, то последнюю формулу можно также представить в виде

$$\delta\Im = \int \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \right) \bar{\delta}\varphi^k + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta} - \partial_\alpha \left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)} \right) \right) \bar{\delta}X^\beta \right\} d^4X,$$

или в следующей замечательной симметричной форме:

$$\delta\Im = \int \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) \right) \bar{\delta}\varphi^k + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) \right) \bar{\delta}X^\beta \right\} d^4X, \tag{5.68}$$

где

$$-S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \tag{5.69}$$

$$-P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}. \tag{5.70}$$

Таким образом можно ввести еще два канонических тензора с естественными 1-контравариантными и 1-ковариантными компонентами.[16]

Ясно также, что в применении к классической механике сплошных сред

$$S^{4\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)} = -\rho_{\mathrm{R}} v_k \qquad (v^k = \partial_t\varphi^k),$$

$$P^{4\cdot}_{\cdot\beta} = (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)} = \rho_{\mathrm{R}} v_k \partial_\beta\varphi^k \quad (\beta = 1, 2, 3),\ P^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{H},$$

где v^k – контравариантные компоненты Эйлеровой скорости, ρ_{R} – плотность среды в отсчетном состоянии, $\mathcal{H}$ – объемная плотность гамильтониана.

Заметим, что градиент деформации $\mathbf{F}$ в рамках классической теории поля определяется каноническим соотношением

$$F^{k\cdot}_{\cdot\beta} = \partial_\beta\varphi^k$$

и имеет 1-контравариантные пространственные и 1-ковариантные отсчетные естественные компоненты. Тензор $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}$ $(\beta = 1, 2, 3)$ аналогичен[17] отсчетному тензору напряжений (тензору напряжений Пиола–Кирхгофа) $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}$:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{F}},$$

а тензор $P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ $(\alpha,\, \beta = 1, 2, 3)$ – тензору напряжений Эшелби:[18] $\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{F})$.

Обобщенное преобразование пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s: $(X^\beta, \varphi^k) \to (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$ естественно порождает три различных класса

[16] Следует отметить, что канонический тензор $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}$ 1-контравариантен по "отсчетному" индексу и 1-ковариантен по "пространственному".

[17] Под аналогией мы понимаем соответствие того или иного объекта традиционным определениям, известным из механики континуума.

[18] Дополнительно заметим также, что

$$-P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha},$$

где $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ – тензор энергии-импульса.

преобразований и три класса частичных вариаций, к обсуждению которых мы и переходим.

Класс так называемых стандартных однопараметрических преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (X^\beta, \tilde{\varphi}^k),$$

где

$$\tilde{\varphi}^k = \varphi^k(X^\beta) + \varepsilon\bar{\varphi}^k(X^\beta)$$

и функции $\bar{\varphi}^k = \bar{\varphi}^k(X^\beta)$ исчезают на границе 4-области интегрирования, позволяет ввести стандартные частичные вариации

$$\bar{\delta}X^\beta = 0, \;\; \bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon\bar{\varphi}^k.$$

Опираясь на общую формулу вариации действия, нетрудно заметить, что

$$\delta\Im = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) \right) \bar{\delta}\varphi^k d^4X, \tag{5.71}$$

и на основании стационарности действия, в силу произвольности стандартных вариаций, – получить уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) = 0,$$

которые по существу выражают баланс импульса при отсчетном (т.е. в пространственно-временных координатах X^β) описании физических полей.

Рассмотрим далее преобразования вида

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (X^\beta, \tilde{\varphi}^k) \;(k = 1, 2, 3),$$

где

$$\tilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t).$$

Мы по-прежнему предполагаем, что функции $\omega^k(\varphi^s(X^\beta, t))$ исчезают на границе 4-области интегрирования.

Частичные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s принято в этом случае называть внешними частичными вариациями:

$$\bar{\delta}X^\beta = 0, \;\; \bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t).$$

Введем обозначение $x^k = \varphi^k, \;\; x^4 = t$ и будем трактовать x^k по аналогии с переменными Эйлера (пространственно-временные координаты X^β – переменные Лагранжа).

Для внешней частичной вариации, выраженной через переменные Эйлера, зарезервируем обозначение:

$$\bar{\Delta}\varphi^k = \varepsilon\omega^k(x^s, x^4). \tag{5.72}$$

Подсчитывая вариацию действия, находим[19]

$$\delta\Im = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k d^4X,$$

[19] В приводимых ниже формулах следует различать операторы ∂_β и ∂_l: первый обозначает дифференцирование по пространственно-временным координатам X^β $(\beta = 1, 2, 3)$, второй – по Эйлеровой координате x^l $(l = 1, 2, 3)$.

$$(\beta = 1,2,3)$$

или

$$\begin{aligned}\delta\Im = \varepsilon \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) - \partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)}\right)\omega^k(\varphi^s,t)d^4X = \\ = \varepsilon \int \left(J^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}) - J^{-1}\partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)}\right)\omega^k(x^s,x^4)d^4x = \\ = \int \left(J^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}) - J^{-1}\partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)}\right)\bar{\Delta}\varphi^k d^4x, \\ (l,k,s = 1,2,3;\ \ \beta = 1,2,3),\end{aligned} \tag{5.73}$$

где J – якобиан преобразования от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

$$J = \det(\partial_\beta x^s) \quad (\beta = 1,2,3),$$

$$T^{l\cdot}_{\cdot k} = J^{-1}(\partial_\beta\varphi^l)S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1}(\partial_\beta\varphi^l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \quad (\beta = 1,2,3). \tag{5.74}$$

Таким образом может быть найдено каноническое определение еще одного тензора – $T^{l\cdot}_{\cdot k}$. Ниже будет показано, что 1-контравариантный и 1-ковариантный канонический тензор $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ есть тензор истинных напряжений (тензор напряжений Коши).

В силу произвольности выбора внешних частичных вариаций $\bar{\Delta}\varphi^k$ внутри 4-области интегрирования получим уравнение

$$-J^{-1}\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)} + J^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k} = 0, \tag{5.75}$$

выражающее баланс импульса в форме Эйлера:

$$\rho\partial_t v_k = \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k} + \left|\partial_s X^\beta\right| \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k},$$

или

$$\rho\partial_t v^k = \partial_l T^{lk}. \tag{5.76}$$

Здесь оператор ∂_t есть производная по времени при фиксированных первых трех координатах X^β, т.е. Лагранжева (материальная) производная по времени. Следует также отметить, что в уравнении баланса импульса в форме Эйлера не следует пренебрегать слагаемым

$$\left|\partial_s X^\beta\right| \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k},$$

поскольку если пространственное описание ведется в криволинейной координатной сетке x^k, то, в частности, кинетическая энергия будет явным образом зависеть от переменных x^k, так как метрический тензор g_{ks} явно от них зависит.

Формулировка вариационного принципа стационарности действия для нелинейно упругого тела в переменных Эйлера и вывод уравнения баланса импульса из него на основе канонического определения тензора напряжений Коши приводятся в [11, p.190–195].

На основании (5.76) нетрудно заключить, что тензор $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ вполне аналогичен тензору истинных напряжений Коши: $\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$.[20]

---

[20] Не следует отождествлять тензоры $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ и $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$:

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = T^\beta_\alpha = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \quad T^{l\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1}(\partial_\beta\varphi^l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}.$$

Наконец, рассмотрим однопараметрическую группу преобразований

$$(X^{\beta}, \varphi^{k}) \to (\tilde{X}^{\beta}, \varphi^{k}),$$

где

$$\tilde{X}^{\beta} = X^{\beta} + \varepsilon \bar{X}^{\beta}(X^{\beta})$$

и функции $\bar{X}^{\beta} = \bar{X}^{\beta}(X^{\beta})$ исчезают на границе 4-области интегрирования.

Частичные вариации пространственно-временных координат X^{β} и физических полей φ^{s} принято в этом случае называть внутренними частичными вариациями:

$$\bar{\delta} X^{\beta} = \varepsilon \bar{X}^{\beta}(X^{\beta}), \;\; \bar{\delta}\varphi^{k} = 0.$$

Варьируя действие, находим

$$\delta \Im = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\beta}} + (\partial_{\alpha} P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) \right) \bar{\delta} X^{\beta} d^4 X.$$

Пользуясь произвольностью выбора внутренних частичных вариаций внутри 4-области интегрирования, приходим к уравнениям Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\beta}} + (\partial_{\alpha} P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) = 0, \tag{5.77}$$

которые представляют собой по сути закон, найденный Эшелби [19].

6. Обобщенные группы инвариантности действия

Расширение класса однопараметрических преобразований позволяет установить еще более неочевидные законы сохранения.

Мы по-прежнему будем рассматривать обобщенные однопараметрические группы преобразований:

$$\tilde{X}^{\beta} = \mathcal{X}^{\beta}(\tilde{\varphi}^{s}, X^{\gamma}, \varepsilon), \;\; \tilde{\varphi}^{k}(\tilde{X}^{\beta}, \varepsilon) = \Phi^{k}(\varphi^{s}(X^{\gamma}), \tilde{X}^{\beta}, \varepsilon).$$

Если действие (для любой 4-области пространственно-временного многообразия) не изменяет своего значения в результате применения обобщенной однопараметрической группы преобразований $\tilde{\Im} = \Im$, то такая группа называется обобщенной группой инвариантности действия (или вариационной симметрией действия).[21]

Обобщенная инвариантность действия означает, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}\times[t_1,t_2]} \mathcal{L}(\varphi^{k}, \partial_{\beta}\varphi^{k}, X^{\beta}) d^4 X = \int\limits_{\tilde{\mathcal{D}}\times[\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^{k}, \tilde{\partial}_{\beta}\tilde{\varphi}^{k}, \tilde{X}^{\beta}) d^4 \tilde{\tau},$$

где преобразование пространственно-временных координат $X^{\beta} \to \tilde{X}^{\beta}$ определено неявно уравнением

$$\tilde{X}^{\beta} = \mathcal{X}^{\beta}(\Phi^{s}(\varphi^{k}(X^{\gamma}), \tilde{X}^{\beta}, \varepsilon), X^{\gamma}, \varepsilon).$$

[21] Достаточно, как всегда, предположить, что изменение действия имеет порядок более высокий, чем ε:

$$\tilde{\Im} - \Im = o(\varepsilon).$$

Покажем, что каждая обобщенная группа инвариантности действия позволяет при условии выполнения уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) = 0 \tag{6.78}$$

сформулировать нетривиальный закон сохранения

$$\partial_\beta I^\beta = 0, \tag{6.79}$$

где

$$I^\beta = \frac{1}{\varepsilon}\left(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\bar{\delta}\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\bar{\delta}X^\gamma\right), \tag{6.80}$$

или

$$I^\beta = S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\left(\frac{\partial\ \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{X}^\gamma(\varphi^s(X^\gamma), X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

Действительно, варьируя действие, находим

$$\begin{aligned}\delta\Im = \int\Bigg\{&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\bar{\delta}X^\beta + \\ &+\left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}\right)\partial_\alpha(\bar{\delta}X^\beta)\Bigg\}\,d^4X = \\ = \int\Bigg\{&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k - S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\bar{\delta}X^\beta - P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\bar{\delta}X^\beta)\Bigg\}\,d^4X = 0.\end{aligned}$$

В силу произвольности 4-области интегрирования необходимо

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k - S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\bar{\delta}X^\beta - P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\bar{\delta}X^\beta) = 0. \tag{6.81}$$

Учитывая, что

$$S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) = \partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\bar{\delta}\varphi^k) - (\bar{\delta}\varphi^k)(\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}),$$
$$P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\bar{\delta}X^\beta) = \partial_\alpha(P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\bar{\delta}X^\beta) - (\bar{\delta}X^\beta)(\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}),$$

уравнение (6.81) представим в виде

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k})\right)\bar{\delta}\varphi^k + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})\right)\bar{\delta}X^\beta + \partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\bar{\delta}\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\bar{\delta}X^\gamma) = 0.$$

Таким образом, если уравнения Эйлера–Лагранжа удовлетворяются, то можно сформулировать дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\bar{\delta}\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\bar{\delta}X^\gamma) = 0. \tag{6.82}$$

Полученный результат[22] ясно показывает, что тензор напряжений Пиола–Кирхгофа и тензор напряжений Эшелби – основные конструктивные элементы, необходимые для построения обобщенных законов сохранения.

[22]Приведем также квазистатический аналог:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot(\mathbf{S}\cdot\bar{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{P}\cdot\bar{\delta}\mathbf{X}) = 0,$$

где по-прежнему $\mathbf{S}$ – тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, $\mathbf{P}$ – тензор напряжений Эшелби, и соответствующий инвариантный интеграл:

$$\oint_{\mathcal{S}}(\mathbf{S}\cdot\bar{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{P}\cdot\bar{\delta}\mathbf{X})d\mathcal{S} = \mathbf{0}$$

для любой замкнутой в отсчетной конфигурации поверхности $\mathcal{S}$, внутри которой упругое поле регулярно.

Следует также отметить, что можно еще более расширить класс однопараметрических преобразований, допуская их зависимость также и от градиентов первого порядка (или более высоких порядков) физических полевых величин φ^k:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^k, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^l = \Phi^l(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^k, X^\gamma, \varepsilon).$$

Соответствующая теория приводится в книге [14]. Теория обобщенных симметрий для функционалов в деталях изложена также в [4].

7. Лагранжиан пустого пространства

Еще одно обобщение теории вариационных симметрий достигается путем аддитивной трансформации плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \mathcal{L}'$$

так, чтобы добавок

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta)$$

не нарушал выполнения уравнений Эйлера–Лагранжа. Другими словами, добавление $\mathcal{L}'$ к лагранжиану $\mathcal{L}$ не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta), \tag{7.83}$$

для которой уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^k} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = 0$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k, называется лагранжианом пустого пространства, поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, "вмещающим" поля.

Теория лагранжиана пустого пространства излагается, например, в [19, p.224–226]. Основной результат здесь состоит в том, что лагранжиан пустого пространства (7.83) всегда представляется (при предположении о звездообразности областей[23] изменения его аргументов) в форме

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}}. \tag{7.84}$$

Если размерность пространства X^β равна трем и $k = 1, 2, 3$, то лагранжиан пустого пространства всегда можно разложить в сумму

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta) = A(\varphi^k, X^\beta) + B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(\varphi^k, X^\beta)\partial_\beta\varphi^k + \\ + C_{\beta\cdot}^{\cdot k}(\varphi^k, X^\beta)J\partial_k X^\beta + D(\varphi^k, X^\beta)J,\end{aligned} \tag{7.85}$$

[23] Область многомерного пространства называется звездообразной относительно некоторой точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Понятие звездообразности области – обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему было справедливо заключение о потенциальности поля при условии, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

где $A(\varphi^k, X^\beta)$, $B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(\varphi^k, X^\beta)$, $C_{\beta\cdot}^{\cdot k}(\varphi^k, X^\beta)$, $D(\varphi^k, X^\beta)$ – некоторые функции пространственно-временных координат и полей, J – якобиан отображения $X^\beta \to x^k = \varphi^k$: $J = \det(\partial_\beta \varphi^k)$.

Приведенное только что соотношение может быть переписано в прямую тензорную запись:

$$\mathcal{L}' = A + \mathrm{tr}(\mathbf{B} \cdot (\partial_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})) + J\mathrm{tr}(\mathbf{C} \cdot (\partial_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})^{-1}) + JD, \tag{7.86}$$

где $(\partial_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})_{\beta\cdot}^{\cdot k} = \partial_\beta \varphi^k$.

Определяя далее поля

$$L^\gamma = L^\gamma(\varphi^k, X^\beta), \quad K_{k\beta} = K_{k\beta}(\varphi^k, X^\alpha), \quad M^s = M^s(\varphi^k, X^\beta)$$

соотношениями

$$A(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial L^\gamma(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{7.87}$$

$$D(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial M^s(x^k, X^\beta)}{\partial x^s}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{7.88}$$

$$B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(x^s, X^\beta) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}} + \left(\partial_k L^\beta(x^s, X^\beta)\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{7.89}$$

$$C_{\beta\cdot}^{\cdot k}(x^s, X^\beta) = \left(\partial_\beta M^k(x^s, X^\gamma)\right)_{\mathrm{expl}} - \varepsilon^{kpl}\left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{7.90}$$

можно найти, что

$$\begin{aligned}\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, ..., X^\beta) = L^\gamma(\varphi^s, X^\beta) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)K_{k\lambda}(\varphi^s, X^\beta) +\\ + J(\partial_k X^\gamma)M^k(\varphi^s, X^\beta).\end{aligned} \tag{7.91}$$

Приведем также прямую запись соотношений (7.87)–(7.91):

$$A = \mathrm{Div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{L},$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{Rot}_{\mathrm{expl}}\mathbf{K} + (\mathrm{grad}_{\mathrm{expl}}\mathbf{L})^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{C} = \mathrm{Grad}_{\mathrm{expl}}\mathbf{M} - (\mathrm{rot}_{\mathrm{expl}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

$$D = \mathrm{div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{M},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{L} + ((\partial_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{K})^\times + J(\partial_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M}$$

и необходимые для понимания формул определения алгебраических и дифференциальных операторов

$$(\mathbf{A}^\times)^\gamma = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}A_{\beta\lambda},$$

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{L} = (\partial_\gamma L^\gamma)_{\mathrm{expl}}, \quad \mathrm{div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{M} = \left(\partial_k M^k\right)_{\mathrm{expl}},$$

$$(\mathrm{Rot}_{\mathrm{expl}}\mathbf{K})_{k\cdot}^{\cdot\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}},$$

$$(((\mathrm{rot})_{\mathrm{expl}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})_{\beta\cdot}^{\cdot k} = \varepsilon^{kpl}\left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l}\right)_{\mathrm{expl}},$$

$$((\mathrm{grad}_{\mathrm{expl}}\mathbf{L})^{\mathrm{T}})_{k\cdot}^{\cdot\gamma} = (\partial_k L^{\gamma})_{\mathrm{expl}}\,, \quad (\mathrm{Grad}_{\mathrm{expl}}\mathbf{M})_{\cdot k}^{s\cdot} = (\partial_k M^s)_{\mathrm{expl}}\,.$$

Можно показать также, что

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{expl}} A = \mathrm{Div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{B},$$

$$(\mathrm{Rot}_{\mathrm{expl}}\mathbf{C})^{\mathrm{T}} = -\mathrm{rot}_{\mathrm{expl}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{Grad}_{\mathrm{expl}} D = \mathrm{div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}.$$

Литература

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М: Наука, 1973. 504 с.

[2] Maugin G. A. Material Inhomogeneities in Elasticity. London: Chapman & Hall, 1993. 276 pp.

[3] Noether E. Invariante Variationsprobleme// Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Gottingen. Math.-Physik. Kl. 1918. S. 235-257.

[4] Olver P. J. Application of Lie Groupes to Differential Equations. New York: Springer, 1986.

[5] Gunter W. Uber einige Randintegrale der Elasto-Mechanik// Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 1962. H. 14. S. 53-72.

[6] Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics// Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44. P. 187-211.

[7] Olver P. J. Conservation laws in elasticity I. General results// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 119-129.

[8] Olver P. J. Conservation laws in elasticity II. Linear homogeneous isotropic elastostatics// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 131-160.

[9] Olver P. J. Symmetry Groops and Path-Independent Integrals/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 57-71.

[10] Bui H. D. Mecanique de la Rupture Fragile. Paris: Masson, 1978. 216 p.

[11] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

[12] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. New York: Interscience Publishers, 1953. 562 p.

[13] Полак Л. С. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 600 с.

[14] Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of Variations. Englrwood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 232 p.

[15] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

[16] Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories/ Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226-793.

[17] Радаев Ю. Н. Теория конечных деформаций сплошных сред. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с.

[18] Silhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997. 506 pp.

[19] Eshelby J. D. The Force on an Elastic Singularity// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1951. V. A244. P. 87-112.

[20] Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде// Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476-488.

[21] Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1968. No. 35. P. 379-386.

[22] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. I. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. 700 с.

[23] Maugin G. A. Material forces: Concepts and applications// Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48. P. 213-245.

[24] Piola G. Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivoglioni considerati secondo la naturale loro forma e costituva// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1848. V. 24(1). P. 1-186.

NON-LINEAR ELASTICITY AS A FIELD THEORY

Y. Radayev[24]

Non-linear elasticity is considered from the physical viewpoint as a field theory. First, field equations and constitutive relations of finite-strain elasticity in their canonical forms are derived in a conventional way. In view of practical application to fracture, special attention is paid to to the construction and immediate consequences of the canonical equations of energy and pseudomomentum balance, thus demonstrating the wealth of the framework, and allowing readily introduce Eshelby's stress tensor, the path-independent integral and Eshelby's force, acting on an elastic inhomogeneity. Then the field-theoretic concept is used in order to define the tensors of non-linear elasticity and reveal their natural co-ordinate representation. The variational formulation and Noether's theorem are chosen to derive conservation laws and additional path-independent integrals. Inverse-motion description and variational symmetries of the Hamiltonian action are shown provide a true field theory of non-linear inhomogeneous elasticity.

[24] Yuri Radayev, dept. of Continuum Mechanics, Samara State University