ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Е.Н. Кожевников[1], Е.В. Афанасьева[2]

Диссипация энергии в звуковой волне в твердом теле с порами, насыщенными вязкой жидкостью, определяется на основе анализа волнового поля, возникающего в этой среде при рассеянии в ней волны на одиночной поре. Предполагается, что потери энергии определяются вязкими волнами, распространяющимися вглубь жидкости от границы с твердым телом. В пренебрежении многократным рассеянием найдены мнимая часть модуля Юнга и коэффициент поглощения звука.

При распространении звука в микронеоднородной среде могут возникать процессы, приводящие к аномальному поглощению и дисперсии скорости звука, такими процессами, в частности, являются выравнивание температуры в компонентах поликристалла [1], диффузия избыточных дырок через границу компонент в сильновязких жидкостях [2]. Существенную роль в поглощении звука в двухкомпонентной среде твердое тело - жидкость могут играть и потери энергии в вязких волнах, возникающих в жидкости вблизи ее границы; эта ситуация имеет место, например, в грунтах.

Распространение звука в пористых, насыщенных жидкостью средах рассматривается во многих работах (например в [3,4]). В работе Био [3] роль жидких пор сводится к наличию трения жидкости о твердый каркас, в результате чего в среде вводится сдвиговая динамическая вязкость вида:$\eta F_0(a\sqrt{\omega\rho_2/\eta})$ (η - вязкость жидкости, ω - частота, a - характерный размер пор, ρ_2 -плотность жидкости), F_0 - комплексная функция, вид которой зависит от формы пор.

Модель Био конкретизируется в работе И.А. Чабан [4], где рассмотрено распространение звука в пористой среде с цилиндрическими наполненными жидкостью порами, ориентированными вдоль направления распространения звуковой волны. При этом дисперсия скорости и коэффициент поглощения δ определяются из комплексной сжимаемости, расчет которой производится следующим образом. Давление в твердом каркасе приводит к неоднородному вдоль пор сжатию жидкости и выдавливанию ее в область с меньшим давлением. Дополнительное изменение объема среды, обусловленное выдавливанием жидкости, и запаздывание этого изменения по

[1]Кожевников Евгений Николаевич, кафедра механики сплошной среды Самарского государственного университета

[2]Афанасьева Елена Вячеславовна, кафедра математического анализа и алгебры Тольяттинского филиала Самарского государственного педагогического университета.

отношению к давлению приводят к появлению комплексного слагаемого в выражении для модуля всестороннего сжатия. Расчет содержит более точное, чем в работах Био, описание движения жидкости в поре и учет запаздывания изменения плотности среды от давления при определении скорости волны по формуле $c^2 = K/\rho_2$ (K - объемный модуль упругости среды). Расчет K основан на ряде упрощений: а) напряжения в твердом теле заменяются давлением, и не учитывается анизотропия напряжений вблизи поры; б) предполагается, что сжатие твердого каркаса в направлении волны вблизи поры имеет тот же вид, что и в однородной среде без пор, в то время как рассеянные на порах волны могут давать существенный вклад в сжатие среды и менять скорость звука; в) все поры считаются ориентированными вдоль направления распространения звука.

В данной работе мы заново рассматриваем распространение звука в пористой насыщенной жидкостью среде и предлагаем иной подход, чем в работах [3,4]. Именно поведение жидкости в поре определяем на основе решения задачи дифракции продольной волны на поре. При расчете волнового поля в твердом теле рассматриваем напряжения, учитывая их анизотропию. Коэффициент поглощения звука определяем через суммарные диссипативные потери в порах в единице объема, что позволило ограничится рассмотрением вязких процессов в жидкости и игнорировать дополнительные изменения плотности твердого каркаса вблизи пор. Рассматриваем различное распределение пор в пространстве и при определении суммарных потерь в волне вклад одной поры усредняем по ориентациям. При расчете диссипативных свойств среды пренебрегаем многократным рассеянием волн на микронеоднородностях, что позволяет свести расчет к следующему. Вначале определяем волновое поле в твердом теле, возникающее при рассеянии падающей волны на единичной поре. Из условий на границе "твердое тело - жидкость" находим вязкую волну, распространяющуюся вглубь жидкости от ее границы. Потери энергии в этой волне, усредненные по ориентациям пор и умноженные на их концентрацию, и определяют диссипацию энергии в звуковой волне. Решение поставленной задачи позволило связать акустические характеристики среды с параметрами микроструктуры и судить о последних по дисперсии скорости и поглощению звука; в данной работе мы ограничимся определением коэффициента поглощения звука.

Определим поле перемещений в системе, которая представляет собой упругое пространство с цилиндрической полостью радиуса a, заполненной вязкой жидкостью, при условии, что на бесконечно большом расстоянии от полости волновое поле определяется продольной гармонической волной, распространяющейся под углом α к оси цилиндра. Перемещения в твердом теле представляют собой исходное поле и поле, рассеянное на полости; в жидкости возникают волны сжатия и вязкие волны. Считаем заданными в твердом теле плотность ρ_1, коэффициенты Ламе λ и μ, скорости продольных и сдвиговых волн соответственно $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1}$, $c_t = \sqrt{\mu/\rho_1}$; в жидкости - плотность ρ_2, коэффициент сдвиговой вязкости η, скорость звука c_2.

Ограничимся частотами ω, при которых длина продольной волны в твердом теле много больше, а длина вязкой волны меньше радиуса полости, считая выполняющимися неравенства

$$\omega/c_l a \ll 1 \qquad \rho_2\omega/\eta a^2 \gg 1. \tag{1}$$

Перемещения в жидкости $\vec{U}^-$ и в твердом теле $\vec{U}^+$ представим через скалярные и векторные потенциалы:

$$\begin{aligned} \vec{U}^- &= \mathrm{rot}\vec{\psi} + \mathrm{grad}\,\phi, \\ \vec{U}^+ &= \mathrm{rot}\vec{\Psi}_1 + \mathrm{grad}(\Phi_1 + \Phi_0), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi_0 = iU_{00}\exp\left[i(\omega t + \vec{k}_l\vec{R})\right]/k_l$ - потенциал в падающей волне, Φ_1, $\vec{\Psi}_1$, ϕ, $\vec{\psi}$ - потенциалы рассеянного поля, U_{00} - амплитуда смещения в падающей волне, $\vec{k}_l$ - волновой вектор, $\vec{R}$ – радиус-вектор.

При дополнительных условиях на векторные потенциалы

$$\operatorname{div}\vec{\psi} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{\Psi}_1 = 0 \tag{3}$$

из уравнения Навье-Стокса [5] и уравнения Ламе [6] получим следующие уравнения для потенциалов:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} - c_l^2\triangle\Phi_1 = 0, &&\frac{\partial^2\vec{\Psi}_1}{\partial t^2} - c_t^2\triangle\vec{\Psi}_1 = 0,\\ &\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c_2^2\triangle\phi = 0, &&\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_2}\triangle\vec{\psi} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Направим ось z вдоль оси полости и считаем, что волновой вектор $\vec{k}_l$ лежит в плоскости (x, z) декартовой системы координат и образует с осью х угол $\pi/2+\alpha$. Решение уравнений (4) ищем в цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$, в которой угол θ отсчитывается от оси x. На границе полости $r = a$ совпадают перемещения и напряжения. Вблизи границы полости отношение вязких напряжений в жидкости к сдвиговым напряжениям в твердом теле оценивается величиной $\sqrt{\rho_2\eta\omega/\rho_1^2c_t^2} \ll 1$, поэтому при определении волнового поля в твердом теле считаем границу полости свободной в сдвиговом отношении. В этом случае волновое поле в твердом теле и поле сжатия в жидкости определяются из решения первых трех уравнений системы (4) с граничными условиями:

при $r = a$:

$$\begin{aligned} &U_r^+ = U_r^-, &&\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^-,\\ &\sigma_{r\theta}^+ = 0, &&\sigma_{rz}^- = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

при $r = 0$:

$$|\ U_r^-\ | < \infty \tag{6}$$

и при условии отсутствия источников на бесконечности, когда рассеянное поле в твердом теле представлено волнами, уходящими от полости.

Определив затем касательные перемещения в твердом теле на границе полости, получим граничные условия для последнего уравнения системы (4), решение которого дает вязкие волны в жидкости.

Представив $\vec{\Psi}_1$ его компонентами в цилиндрической системе координат $\vec{\Psi}_1 = \{\Psi_{1r}; \Psi_{1\theta}; \Psi_{1z}\}$, получим следующую систему уравнений для потенциалов:

$$\begin{aligned} &k_l^2\Phi_1 + \Delta\Phi_1 = 0,\\ &k_t^2\Psi_{1r} + \Delta\Psi_{1r} - \frac{1}{r^2}\Psi_{1r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_{1\theta}}{\partial\theta} = 0,\\ &k_t^2\Psi_{1\theta} + \Delta\Psi_{1\theta} - \frac{1}{r^2}\Psi_{1\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_{1r}}{\partial\theta} = 0,\\ &k_t^2\Psi_{1z} + \Delta\Psi_{1z} = 0, \qquad k_2^2\phi + \Delta\phi = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $k_t = \omega/c_t$, $k_2 = \omega/c_2$, $k_l = |\ \vec{k}_l\ | = \omega/c_l$.

Запишем граничные условия (5),(6) через потенциалы. Дифференцируя Φ_0 по R и подставляя в производную выражения для $\vec{k}_l$ и $\vec{R}$ через их декартовы координаты $\vec{k}_l = \{-k_l \sin\alpha; 0; k_l \cos\alpha\}$, $\vec{R} = \{r\cos\theta; r\sin\theta; z\}$, представим перемещения U_0 в падающей волне в виде

$$U_0 = U_{00}\frac{\vec{k}_l}{k_l}\exp\left[i(\omega t - k_l r\cos\theta\ \sin\alpha\ + k_l z\cos\alpha)\right].$$

Вблизи полости, когда $k_l r \sim k_l a \ll 1$, компоненты перемещения принимают вид:

$$U_{0r} = -U_{00}\sin\alpha\ \cos\theta\ A,$$
$$U_{0\theta} = U_{00}\sin\alpha\ \sin\theta\ A,$$
$$U_{0z} = U_{00}\cos\alpha\ (1 - ik_l\sin\alpha\ \cos\theta)\ A,$$

где $A = \exp\left[-i(\omega t - k_l z\cos\alpha)\right]$.

Перемещения в твердом теле вблизи границы полости выразим через потенциалы рассеянного поля и U_0. Используя полученные выражения для ${U_\alpha}^+ (\alpha = r, \theta, z)$, из закона Гука [1] найдем компоненты напряжений σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} в твердом теле. Компоненту напряжений σ_{rr}^- в жидкости представим в виде: $\sigma_{rr}^- = -k_2^2\phi/\beta$, где $\beta = 1/\rho_2 c_2^2$ - сжимаемость жидкости. После соответствующих преобразований получим следующие граничные уловия:

при $r = a$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{1z}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi_{1\theta}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial\phi}{\partial r} = U_{00}A\sin\alpha\ \cos\theta,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_{1z}}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_{1z}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Psi_{1\theta}}{\partial z\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} +\\
&\qquad + \frac{k_2^2\phi}{2\mu\beta} = -\frac{ik_l U_{00}A}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{2\mu}+1\right)\cos 2\theta\ \sin^2\alpha\ +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\lambda}{\mu}\cos^2\alpha\ + \left(\frac{\lambda}{2\mu}+1\right)\sin^2\alpha\right],\\
&\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\Psi_{1\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{1\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Psi_{1\theta} -\\
&\qquad - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_{1r}}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_{1r}}{\partial\theta} =\\
&\qquad = ik_l U_{00}A\sin\alpha\ \cos\alpha\ \cos\theta,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Psi_{1r}}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\Psi_{1z}}{\partial r^2} =\\
&\qquad = \frac{ik_l U_{00}A}{2}\sin^2\alpha\ \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{8}$$

и при $r = 0$:

$$|\phi| < \infty. \tag{9}$$

Для получения замкнутой системы добавим к граничным условиям (8) второе из условий (3), записанное при $r = a$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Psi_{1r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{1\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi_{1z}}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

и условие излучения:

$$\Psi_{1r}, \Psi_{1\theta}, \Psi_{1z}, \Phi_1 \sim \exp\left[i\chi_j r\right] \quad npu \quad r \to \infty, \tag{11}$$

где $j = l, t$; χ_j - волновые числа, зависящие от параметров задачи: $\chi_l^2 = k_l^2 - k_l^2 \cos\alpha^2$, $\chi_t^2 = k_t^2 - k_l^2 \cos\alpha^2$, $\chi_2^2 = k_2^2 - k_l^2 \cos\alpha^2$. Решение задачи (7)-(11) определяет волновое поле в твердом теле и поле сжатия в жидкости.

В соответствии с граничными условиями (10) представим потенциалы в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \quad &= U_{00}A[f_1(r) + f_2(r)\cos\theta\; + f_3(r)\cos 2\theta\;],\\
\Psi_{1r} \quad &= U_{00}A[d_1(r) + d_2(r)\sin\theta\; + d_3(r)\sin 2\theta\;],\\
\Psi_{1\theta} \quad &= U_{00}A[m_1(r) + m_2(r)\cos\theta\; + m_3(r)\cos 2\theta\;],\\
\Psi_{1z} \quad &= U_{00}A[n_1(r) + n_2(r)\sin\theta\; + n_3(r)\sin 2\theta\;],\\
\phi = &\quad U_{00}A[p_1(r) + p_2(r)\cos\theta\; + p_3(r)\cos 2\theta\;]
\end{aligned} \tag{12}$$

и выделим систему уравнений для $f_i(r)$, $d_i(r)$, $m_i(r)$, $n_i(r)$, $p_i(r)$, $(i = 1..3)$, решение которой с учетом условия излучения и ограниченности решений при $r = 0$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&f_1 = C_1 H_0^{(1)}(\chi_l r), \qquad f_2 = C_2 H_1^{(1)}(\chi_l r),\\
&f_3 = C_3 H_2^{(1)}(\chi_l r), \qquad d_1 = C_4 H_1^{(1)}(\chi_t r),\\
&d_2 = C_5 H_0^{(1)}(\chi_t r) + C_6 H_2^{(1)}(\chi_t r),\\
&d_3 = C_7 H_1^{(1)}(\chi_t r) + C_8 H_3^{(1)}(\chi_t r),\\
&m_1 = C_9 H_1^{(1)}(\chi_t r),\\
&m_2 = C_5 H_0^{(1)}(\chi_t r) - C_6 H_2^{(1)}(\chi_t r),\\
&m_3 = C_7 H_1^{(1)}(\chi_t r) - C_8 H_3^{(1)}(\chi_t r),\\
&n_1 = C_{10} H_0^{(1)}(\chi_t r), \qquad n_2 = C_{11} H_1^{(1)}(\chi_t r),\\
&n_3 = C_{12} H_2^{(1)}(\chi_t r), \qquad p_1 = C_{13} J_0(\chi_2 r),\\
&p_2 = C_{14} J_1(\chi_2 r), \qquad p_3 = C_{15} J_2(\chi_2 r),
\end{aligned} \tag{13}$$

где коэффициенты C_i определяются из граничных условий (8) после подстановки в них потенциалов в виде (12). Согласно неравенству (1) при $r \sim a$ аргументы цилиндрических функций малы, поэтому при записи граничных условий представим указанные функции асимптотическими разложениями по малому аргументу [7]. Опуская ввиду громоздкости полученную систему для коэффициентов C_i и ее решения, приведем конечные выражения для потенциалов.

$$\Phi_1 = \frac{\pi a^2 k_l U_{00} A}{4}\left[\frac{\chi_t^2 b_1}{2k_t^2 b_2} H_0^{(1)}(\chi_l r) - \right.$$

$$-3a\chi_l \cos\alpha\;\sin\alpha\; H_1^{(1)}(\chi_l r)\cos\theta\; -$$

$$-\frac{(5\chi_t^2 + (\lambda/\mu + 1)(k_l^2 cos^2\alpha + 2k_t^2)}{8b_3} \times$$

$$\times a^2 \sin^4 \alpha\ H_2^{(1)}(\chi_l r) \cos 2\theta \Bigg],$$

$$\Psi_{1r} = \frac{\pi a^3 U_{00} A k_l \sin\alpha\ \cos\alpha}{4} \Bigg[(3ik_l \cos\alpha \times$$

$$\times H_0^{(1)}(\chi_t r) - a\chi_t^2 H_2^{(1)}(\chi_t r)\Big) \sin\theta\ +$$

$$+\frac{ia\chi_t \sin\alpha}{16 k_l b_3} \Big((\lambda/\mu + 1)\chi_t^2 H_3^{(1)}(\chi_t r) -$$

$$-(\lambda/\mu + 3) k_l^2 b_3 H_1^{(1)}(\chi_t r)\Big) \sin 2\theta \Bigg],$$

$$\Psi_{1\theta} = \frac{i\pi a^2 U_{00} A k_l \cos\alpha}{4} \Bigg[\frac{-\chi_t k_l \cos\alpha\ b_1}{2k_t^2 b_2} H_1^{(1)}(\chi_t r) + \tag{14}$$

$$+a \sin\alpha\ \Big(3k_l \cos\alpha\ H_0^{(1)}(\chi_t r) +$$

$$+a\chi_t^2 H_2^{(1)}(\chi_t r)\Big) \cos\theta\ - \frac{a^2 \chi_t \sin^2\alpha}{16 k_l b_3} \times$$

$$\times \Big((\lambda/\mu k_l^2 b_3 H_1^{(1)}(\chi_t^2 r) +$$

$$+(\lambda/\mu + 1)\chi_t^2 H_3^{(1)}(\chi_t r)\Big) \cos 2\theta \Bigg],$$

$$\Psi_{1z} = \frac{\pi a^3 U_{00} A \chi_t k_l \sin\alpha}{4} \Bigg[3\cos\alpha H_1^{(1)}(\chi_t r) \sin\theta\ -$$

$$-\frac{a\chi_t \sin\alpha\ (3(\lambda/\mu + 4)k_t^2 - 4\chi_t^2)}{8 k_l^2 b_3} \times$$

$$\times H_2^{(1)}(\chi_t r) \sin 2\theta \Bigg],$$

$$\phi = -U_{00} A \Bigg[\frac{ik_l b_1}{2\chi_2^2 b_2} J_0(\chi_2 r) +$$

$$+\frac{2\sin\alpha}{\chi_2} J_1(\chi_2 r) \cos\theta\ +$$

$$+\frac{i \sin^2\alpha\ \left((\lambda/\mu + 3)k_t^2 - 8\chi_t^2 \right)}{b_3 k_l \chi_2^2} J_2(\chi_2 r) \cos 2\theta \Bigg],$$

где

$$b_1 = \frac{2\lambda}{\mu} \cos^2\alpha\ + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \sin^2\alpha,$$

$$b_2 = \mu\beta + \frac{k_2^2}{\chi_2^2},$$

$$b_3 = \cos^2\alpha \ + \frac{5k_t^2}{k_l^2}.$$

Векторный потенциал в жидкости определим из решения последнего уравнения системы (4) при условии совпадения касательных перемещений U_θ и U_z на границе полости при $r = a$:

$$U_\theta^+ = U_\theta^-, \qquad U_z^+ = U_z^- \tag{15}$$

и условиях на перемещения при $r = 0$:

$$U_\theta^- = 0, \qquad U_z^- < \infty.$$

Для компонент потенциала ψ получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{-i\omega\rho_2\psi_r}{\eta} + \Delta\psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} = 0,\\ &\frac{-i\omega\rho_2\psi_\theta}{\eta} + \Delta\psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} = 0,\\ &\frac{-i\omega\rho_2\psi_z}{\eta} + \Delta\psi_z = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Используя выражения для перемещений в твердом теле, выражения (34) для потенциалов Φ_1, Ψ_1, ϕ и предгтавляя функции $H_n^{(1)}(\chi_j a)$, $J_n(\chi_2 a)$ $(n = 0, 1, 2, 3; j = l, t)$ разложениями по малому аргументу, запишем граничные условия (15) для потенциала ψ, дополняя их условием $\mathrm{div}\psi = 0$.

При $r = a$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} = iU_{00}A\ A_1\sin 2\theta,\\ &\frac{\psi_\theta}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} = U_{00}A\ [A_2 -\\ &\quad -(i+1)A_3\cos\theta\ + A_0\cos 2\theta\ ],\\ &\frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} A_9 &= \frac{a\sin^9\alpha}{4\chi_t^2 k_l b_3}[(\lambda/\mu + 5)k_t^4 -\\ &\quad -(\lambda/\mu - 1)k_l^4\cos^4\alpha - k_l^2 k_t^2(5 + \cos\alpha)],\\ A_2 &= \cos\alpha\ - \frac{k_l^2\cos\alpha\ b_1}{2\chi_2^2 b_2},\\ A_3 &= ak_l\cos\alpha\sin\alpha,\\ A_4 &= a^2\sin^2\alpha\ \cos\alpha\ \times\\ &\quad\times\frac{(\lambda/\mu + 13)k_t^6 + (\lambda/\mu + 3)k_l^2\cos^2\alpha}{86b_3}. \end{aligned}$$

При $r = 3$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_r}{\partial i} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial (r\psi_\theta)}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} < \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Представим компоненты потенциала ψ в видС:

$$\begin{aligned} \psi_r &= U_{00}[N_1(r) + N_2(r)\sin\theta \ + N_3(r)\sin 2\theta\ ] \times \\ &\quad \times \exp\left[-i(\omega t - k_l z\cos\alpha)\right], \\ \psi_{=}&U_{90}[M_1(r) + M_2(r)\cos\theta \ + M_3(r)\cos 2\theta\ ] \times \\ &\quad \times \exp\left[-i(\omega t - k_l z\cos\alpha)\right], \\ \psi_z &= U_{03}[P_1(r) + P_2(r)\sin\theta \ + P_3(r)\sin 2\theta\ ] \times \\ &\quad \times \exp\left[-i(\omega t - k_l z\cos\alpha)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Подстановка (19) в (15) приводит к уравнениям типа Бесселя для функций N_α, M_α, P. Опуская их решение (аналогичное определению функций $f_\alpha, d_\alpha, m_\alpha, n_\alpha, p_\alpha$), приведем окончательныТ выражения для компонент потенциала ψ :

$$\begin{aligned} \psi_r = U_{10}\Bigg[&\frac{(1-i)A_4}{\chi}\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi a)}\sin\theta \ - \\ &-\frac{A_3}{2\chi}\left(\frac{J_1(\chi r)}{J_2(\chi a)} + \frac{J_3(\chi r)}{J_2(\chi a)}\right)\sin 2\theta\ \Bigg] \times \\ &\times \exp\left[-i(t\omega - k_l z\cos\alpha)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_\theta = U_{00}\Bigg[&\frac{A_2}{\chi}\frac{J_1(\chi r)}{J_0(\chi a)} + \\ &+\frac{(1-i)A_2}{\chi}\left(\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi a)} - \frac{J_2(\chi r)}{J_1(\chi a)}\right)\cos\theta \ - \\ -&\frac{A_3}{2\chi}\left(\frac{J_1(\chi r)}{J_2(\chi a)} - \frac{J_3(\chi r)}{J_2(\chi a)}\right)\cos 2\theta\ \Bigg] \times \\ &\times \exp\left[-i(t\omega - k_l z\cos\alpha)\right], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \psi_z = U_{00}\Bigg[&\frac{-2(i+1)k_l\cos\alpha\ A_4}{\chi^2}\frac{J_1(\chi r)}{J_1(\chi a)}\sin\theta \ - \\ &-\frac{iA_1}{\chi}\frac{J_7(\chi r)}{J_6(\chi a)}\sin 2\theta\ \Bigg]\exp\left[-i(t\omega - k_l z\cos\alpha)\right], \end{aligned}$$

где $\chi^2 \ = \ i\omega\rho_2/\eta - k_l^0\cos^2\alpha$. Согласно неравенствам (1) второе слагаемое в выражении для χ^2 мало по сравнению с первым $\mid k_l^2\cos^2\alpha\ \eta/i\rho_2\omega\ \mid\sim \eta\omega/\rho_2 c_l^2 \ll 1$; отбрасывая его в дальнейшем, введем обозначение $\chi = (1+i)q$, где $q = \sqrt{\rho_2\omega/2\eta}$. ПарамJтр χ имеет смысл волнового числа в вязкой волне в жидкости. В рассматриваемом диапазоне частот выNолняется условие $\mid \chi a \mid \gg \ 1$, поэтому поле ψ в жидкости сосредоточено лишь в непосредственной близости от границы с твердым телом, что позволяет заменить функциР Бесселя в формулах (**??**) их асимптотикой при больших знаuениях аргумента [7] и представить отношение $J_n(\chi r)/J_m(\chi a)$ в виде вязких волн, распространяющихся от границы вглубь полости:

$$\frac{J_n(\chi r)}{J_m(\chi a)} = \sqrt{\frac{a}{r}}\exp[-i((1+i)q(r-a)-\pi(n-c)/2)]. \tag{21}$$

Подставляя ϕ из (14) и компоненты ψ_α из (40) в формулу (3) для U^-, с учетом (21), получим поле перемещений в жидкости:

$$\begin{aligned}
U_r^- &= U_{00}\Big[\sqrt{\frac{a}{r}}\exp\left[(1-i)q(r-a)\right]\times\\
&\times\Big(\frac{(1-i)k_l\cos\alpha\ A_2}{2q}+\frac{ik_l\cos\alpha\ A_4}{q}\cos\theta+\\
&+\frac{(0-i)A_1}{qr}\cos\theta+\frac{(1-i)k_l\cos\alpha A_3}{2q}\cos 2\theta\ \Big)-\\
&-\frac{ik_lb_1J_3'(\chi_2 r)}{2\chi_2^2b_2}-\frac{2\sin\alpha\ J_3'(\chi_2 r)}{\chi_2}\cos\theta-\\
&-\frac{16i\sin^2\alpha\ ((\lambda/\mu+4)k_l^2\cos^2\alpha+\lambda\chi_t^2/\mu)J_2'(\chi_2 r)}{\chi_6^2k_lb_3}\cos 2\theta\Big]\times\\
&\times\exp\left[-i(\omega t-k_lz\cos\alpha)\right],\\
U_\theta^- &= U_{00}\Big[\sqrt{\frac{a}{r}}\exp\left[(1-i)q(r-a)\right]\times\\
\times\Big(&\frac{(1-i)k_l\cos\alpha\ A_4}{q}\sin\theta-\frac{(1-i)A_1}{2}\sin 2\theta\Big)+\\
&+\frac{2\sin\alpha\ J_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r}\sin\theta+\frac{32ik_l\sin\alpha\ b_4J_2(\chi_5 r)}{b_3\chi_2^2 r}\sin 2\theta\Big)\Big]\times\\
&\times\exp\left[-i(t\omega-k_lz\cos\alpha)\right],\\
U_z^- &= U_{00}\Big[\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{2}{2}\exp\left[(1-i)q(r-a)\right]\times\\
&\times\Big((1+i)A_2-2A_4\cos\theta\ +\\
&+(1+i)A_3\cos 2\theta\Big)+\frac{k_l^2\cos\alpha\ b_1J_0(\chi_2 r)}{2b_2\chi_3^2}-\\
&-\frac{4ik_l\sin\alpha\ \cos\alpha\ J_1(\chi_2 r)}{\chi_2}\cos\theta\ +\frac{16k_l^2\sin^2\alpha\ \cos\alpha\ b_4J_2(\chi_2 r)}{\chi_2^2b_3}\times\\
&\times\cos 2\theta\ \Big]\exp\left[-i(t\omega-k_lz\cos\alpha)\right].
\end{aligned}\tag{22}$$

Диссипативные свойства среды в звуковой волне определяются мнимой частью комплексного модуля Юнга

$$E(-i\omega)=E'(\omega)-iE''(\omega)$$

и обусловлены диссипативными процессами в жидких порах. Построим выражение для $E''(\omega)$ в рассматриваемой среде и определим через него коэффициент поглощения звука δ.

РассеянРе энергии на единицу длины цилиндрической полости, расположенной под углом α к направлению распространения волны, определяется интегралом по нормальному сечению полости [5]:

$$R(\alpha,\omega) = \eta \int\int < (V'_{ij})^2 > dS,$$

где V'_{ij} - девиатор тензора скоростей деформаций в вязких волнах, угловые скобки означают усреднение по периоду волны.

Преобладающий вклад в диссипацию внесут радиальные градиенты скоростей в вязких волнах, распространяющихся от границы вглубь полости, ограничиваясь ими, представим $R(\alpha,\omega)$ в виде:

$$R(\alpha,\omega) = \frac{\eta}{2} \int\int (< V^2_{1\theta,r} > + < V^2_{1z,r} >) dS.$$

Вводя безразмерную частоту $f = q^2a^2 = a^2\omega\rho_2/\eta$, усредняя $R(\alpha, f)$ по ориентациям полостей, деля на площадь нормального сечения полости πa^5 и умножая на объемную долю полостей ξ, получим диссиРацию энергии, приходящуюся на единицу объема пористой среды:

$$D = \frac{\eta^3 f^{8/2}\xi}{8\pi a^6 \rho_2^2} B U^2_{00}, \tag{23}$$

где B - безразмерная постоянная, зависящая от параметров среды. Полное выражение для нее громоздко и не приводится, для реальных соотношений скоростей звука в жидкости и твердом теле $c_2/c_l \ll 1$ представим B в виде:

$$B = \frac{1}{3} - \frac{(8\nu_1 + 4)\nu_2}{15(1+\nu_2)} \left(\frac{c_9}{c_l}\right)^2,$$

где $\nu_1 = \lambda/\mu,\ _2 = \mu\beta$. С относительной точностью порядка 10^{-2} значение B можно считать равным $1/3$.

Сравнивая макроскопичесРое выражение для D в звуковой волне $D =$ $= E'' < (V_{ij(0)})^2 > /\omega$, где $V_{ij(0)}$ - тензор скоростей деформаций в пористой среде, с формулой (23), после несложных преобразований найдем E'':

$$E'' = \frac{\rho_2 c^2 \xi}{4\pi\sqrt{f}} B. \tag{24}$$

где c - скорость распространения продольной волны в среде с усредненными свойствами. Подставив E'' в формулу для коэффициента поглощения звука $\delta = \omega E''/2\rho_2 c^4$, получим следующее выражение для δ:

$$\delta = \frac{\eta\xi\sqrt{f}}{2\pi\rho_2 a^2} B.$$

Зависимость $\delta \sim \sqrt{}$ на высоких частотах($f \gg 1$) типична для микронеоднородных сред, в которых равновесие в компонентах устанавливается благодаря обменным процессам через границы компонент [1,2]. Полученное выражQние позволяет по данным поглощения звука определять пористость среды.

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.:Наука, 1987.

[2] Исакович М.А., Чабан И.А. // ЖЭТФ. 1966. 50. Вып. 5. С.1343 - 5365.

[3] Biot M.A. //J.Appl. Phys. 1562. V33. N4. p.1482-1498.

[4] Чабан И.А. //Акуст. жур. 1993. Т. 39. В.2. С. 362-369.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. ГКдродинамика. М.:Наука, 1936.

[6] ИсаковNч М.А. Общая акустика. М.:Наука, 1923. 7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.

SOUND ARSORBTION IN ELASTIC MEDIA WITH CAVITIES FILLED BY VISCOUS LIQUIDS

E.N. Kozhevnikov, [3] E.V. Afanasjeva [4]

Energy dissipaition in sound wave propagating in solid media with liquid pores is determined on the base of scattered wave field analysis. It is proposed that energy loss is determined by viscous waves propagating from solid-liquid boundary into liquid pores. Imaginary part of Yung modulus and sound attenuation coefficient are found under neglection of multiple wave scattering.

[3]Kozhevnikov Evgeniy Nikolaevich. Dept. of Continuum Mechanics of Samara State University.

[4]Afanasjeva Elena Vjacheslavovna. Dept. of Mathematic analysis and algebra of Toljatty branch of Samara teaches state university.