ФУНКЦИЯ КАМПЕ ДЕ ФЕРЬЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Х.А.Чиханов [1]

В статье дан новый способ построения фундаментальных решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, исключающий решение алгебраических уравнений и вычисление интегралов. Также рассмотрены обобщения рядов Лауричеллы , их классификация и проблема сходимости.

1. Ряды в C^n и функция Кампе де Ферье

Ниже мы рассмотрим ряды вида

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z=(z_1,..,z_n)\in C^n \quad a_k=a_{k_1..k_n}, |k|=k_1+..+k_n \quad z^k={z_1}^{k_1}..{z_n}^{k_n} \tag{1.1}$$

Здесь $k=[k_1,..,k_n]\in N^n$ - мультииндекс, $w=(w_1,..,w_n)\in C^n$,
$<z,w>=z_1\bar{w}_1+\cdots+z_n\bar{w}_n$ - эрмитова форма в $C^n, |z|=\sqrt{<z,z>}$ – норма в C^n.

Определение 1.1. *Ряд (1.1) сходится по норме в C^n ,если существует предел частичных сумм в C^n, когда $k_j\to\infty$ независимо друг от друга.*

Определение 1.2. *Числа $\{r_j\}_1^n$ называются сопряженными радиусами сходимости, если ряд (1.1) сходится в полицилиндре $\{|z|<r_j, j=1..n\}$ и расходится в более широком полицилиндре $\{|z|<\rho_j, j=1..n\}$, где хотя бы для одного $j \quad \rho_j>r_j$.*

Теорема 1.1. [11, с.125]. *Для сопряженных радиусов сходимости справедлива обобщенная формула Коши-Адамара*

$$\lim_{|k|\to\infty}\sup\left|c_k r^k\right|^{1/|k|}=1, \quad r=\{r_1,..,r_n\}. \tag{1.2}$$

Здесь sup *берется при фиксированном $|k|$. Соотношение (1.2) определяет гиперповерхность в R^n, ограничивающую полицилиндр сходимости.*

[1]Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета

Пусть теперь c_k - рациональные функции от k. Введём базисные мультииндексы $e_j = [1,0,..,0], ..e_n = [0,..,0,1]$,так что $k + e_j = [k_1,..,k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1},..,k_n]$. Пусть $f_j(k) = c_{k+e_j}/c_k, j = 1..n$ и $\Phi_j(k) = \lim\limits_{t\to\infty} f_j(tk)$. Предположим также, что

$$|c_{k+e_j}| < (1+\epsilon)\,|\Phi_j(k)|\,|c_k|, \quad j = 1..n, \quad \text{при } |k| > N(\epsilon). \tag{1.3}$$

Эти условия допускают проверку в конкретных случаях. Из них следуют оценки для коэффициентов:

$$|c_k| \le |c_m|(1+\epsilon)^{|k|-|m|}\,|\Phi_{p1}(k-e_{p1})\Phi_{p2}(k-e_{p1}-e_{p2})\cdots\Phi_{pl}(m)|\,. \tag{1.4}$$

Здесь $k - e_{p1}, k - e_{p1} - e_{p2},..,m$ – цепочка мультииндексов, по которой мы спускаемся от мультииндекса k до m . Ясно, что, выбирая разные цепочки, мы получим разные оценки. В любом случае оценки (1.4) позволяют построить мажорирующие ряды специального вида. Для некоторых важных для приложений рядов функции Φ_j имеют достаточно простой вид: $\Phi_j(k) = {k_j}^{\alpha}/|k|^{\alpha}$, где α -целое число. Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left[\frac{\prod k_j!}{|k|!}\right]^{\alpha} r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}(1+\epsilon)^{|k|}. \tag{1.5}$$

Отметим два частных случая: 1^0. $\alpha = 0$. Ряд (1.5) расщепляется в произведение рядов и область сходимости $|z_j| < 1$, $j = 1..n$. 2^0. $\alpha = -1$. Ряд (1.5) приводится к виду $\sum[(1+\epsilon)(r_1+\cdots+r_n)]^p$ и область сходимости $\sum|z_j| < 1$.

Далее мы будем использовать схему Горна [1, с.221]. Рассмотрим ряд Кампе де Ферье

$$K_{l,p}^{m,n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{|k|}(a')_{|k|}\cdots(a^{(m-1)})_{|k|} \quad (b)_k(b')_k\cdots(b^{(p-1)})_k}{(c)_{|k|}(c')_{|k|}\cdots(c^{(l-1)})_{|k|} \quad (d)_k(d')_k\cdots(d^{(q-1)})_k}\,\frac{z^k}{k!}. \tag{1.6}$$

Здесь $(b^{(s)})_k = (b_1^{(s)})_{k_1}\cdots(b_n^{(s)})_{k_n}$, $(g)_p = g(g+1)\cdots(g+p-1)$ - символ Похгаммера. Ряд (1.6) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(c+\sum z_s\partial_s)(c'+\sum z_s\partial_s)\cdots(c^{(l-1)}+\sum z_s\partial_s)(d_k+z_k\partial_k)(d'_k+z_k\partial_k)\cdots\\ \cdots(d_k^{(q-1)}+z_k\partial_k)(1+z_k\partial_k)\frac{U}{z_k}-(a+\sum z_s\partial_s)(a'+\sum z_s\partial_s)\cdots\\ \cdots(a^{(m-1)}+\sum z_s\partial_s)(b_k+z_k\partial_k)(b'_k+z_k\partial_k)\cdots(b^{(p-1)}{}_k+z_k\partial_k)U=0, \quad k=1..n.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Несложный подсчёт даёт

$$f_j(k) = {k_j}^{p-q-1}|k|^{m-l}, \quad \Phi_j(k) = {k_j}^{p-q-1}|k|^{m-l}\lim_{t\to\infty} t^{p-q+m-l-1}, \quad j = 1..n. \tag{1.8}$$

Следовательно,

$$\Phi_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m+p \le l+q, \\ \infty & \text{при} \quad m+p \ge l+q+2, \\ (k_j/|k|)^{p-q-1} & \text{при} \quad m+p = l+q+1. \end{cases} \tag{1.8$'$}$$

Отсюда согласно схеме Горна следует

Теорема 1.2. *Ряд Кампе де Ферье (1.6) является целой голоморфной функцией при $m+p \le l+q$; при $m+p \ge l+q+2$ ряд не имеет открытой области сходимости (сходится только в нуле); при $m+p=l+q+1$ и $p \ne q+1$ ряд сходится в области , являющейся пересечением области $\sum |z_j|^{1/(q-p+1)<1}$ с кубом $|z_j| < 1,\ j = 1..n$. Наконец, при $p-q-1 = l-m = 0$ ряд сходится в кубе $|z_j| < 1,\ j = 1..n$.*

Ниже мы выписываем ряды с непустой открытой областью сходимости ($m+p = l+q+1 \le 3$); как частный случай имеем ряды Лауричеллы F_A, F_B, F_C, F_D. (Заметим кстати , что при $n = 2$ нумерация рядов Аппеля не совпадает с обозначениями рядов Лауричеллы, а именно $F_A = F_2, F_B = F_3, F_C = F_4, F_D = F_1$). В примерах, отмеченных звёздочкой *, указана область, которую даёт схема Горна. Фактической же областью сходимости является куб. Причина такого расхождения в том, что старший член дифференциального уравнения системы (1.7) при $l+q+1 = m+p$ имеет вид $z_k^{m+p-1}(1-z_k)\partial_k^{m+p}U$; поэтому прямая $z_k = 1$ является особой прямой системы (1.7), и при обходе вокруг этой прямой происходит бифуркация решений. Это, естественно, мешает сходимости ряда при $|z_k| > 1$.

$$K_{00}^{10} = \sum \frac{(a)_{|k|}}{k!} z^k = \left(1 - \sum z_j\right)^{-a}, \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.9}$$

$$K_{00}^{01} = \sum \frac{(b)_k}{k!} z^k = \prod (1-z_j)^{-b_j}, \qquad |z_j| < 1; \tag{1.10}$$

$$K_{10}^{20} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}}{(c)_{|k|} k!} z^k = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, a' \\ c \end{matrix} \middle| \sum z_j\right), \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.11}$$

$$K_{01}^{20} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}}{(d)_k k!} z^k \equiv F_C, \qquad \sum \sqrt{|z_j|} < 1; \tag{1.12}$$

$$K_{10}^{11} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(b)_k}{(c)_{|k|} k!} z^k \equiv F_D, \qquad |z_j| < 1; \tag{1.13}$$

$$K_{01}^{11} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(b)_k}{(d)_k k!} z^k \equiv F_A, \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.14}$$

$$K_{10}^{02} = \sum \frac{(b)_k\,(b')_k}{(c)_{|k|}\,k!} z^k \equiv F_B, \qquad \sum |z_j|^{-1/2} < 1; \tag{1.15)*$$

$$K_{01}^{02} = \sum \frac{(b)_k\,(b')_k}{(d)_k\,k!} z^k = \prod {}_2F_1\left(\begin{matrix} b_j, b'{}_j \\ d_j \end{matrix} \middle| z_j\right), \qquad |z_j| < 1; \tag{1.16}$$

$$K_{20}^{30} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(a")_{|k|}}{(c)_{|k|}\,(c')_{|k|}\,k!} z^k = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, a', a" \\ c, c' \end{matrix} \middle| \sum z_j\right), \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.17}$$

$$K_{11}^{30} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(a")_{|k|}}{(c)_{|k|}\,(d)_k\,k!} z^k, \qquad \sum \sqrt{|z_j|} < 1; \tag{1.18}$$

$$K_{02}^{30} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(a")_{|k|}}{(d)_k\,(d')_k\,k!} z^k, \qquad \sum |z_j|^{1/3} < 1; \tag{1.19}$$

$$K_{20}^{21} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(b)_k}{(c)_{|k|}\,(c')_{|k|}\,k!} z^k, \qquad |z_j| < 1; \tag{1.20}$$

$$K_{11}^{21} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(b)_k}{(c)_{|k|}\,(d)_k\,k!} z^k, \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.21}$$

$$K_{02}^{21} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(a')_{|k|}\,(b)_k}{(d)_k\,(d')_k\,k!} z^k, \qquad \sum |z_j|^{1/3} < 1; \tag{1.22}$$

$$K_{20}^{12} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(b)_k\,(b')_k}{(c)_{|k|}\,(c')_{|k|}\,k!} z^k, \qquad \sum \frac{1}{|z_j|} < 1 \tag{1.23$*$}$$

$$K_{11}^{12} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(b)_k\,(b')_k}{(c)_{|k|}\,(d)_k\,k!} z^k, \qquad |z_j| < 1; \tag{1.24}$$

$$K_{02}^{12} = \sum \frac{(a)_{|k|}\,(b)_k\,(b')_k}{(d)_k\,(d')_k\,k!} z^k, \qquad \sum |z_j| < 1; \tag{1.25}$$

$$K_{20}^{03} = \sum \frac{(b)_k\,(b')_k\,(b")_k}{(c)_{|k|}\,(c')_{|k|}\,k!} z^k, \qquad \sum |z_j|^{-1/2} < 1; \tag{1.26$*$}$$

$$K_{11}^{03} = \sum \frac{(b)_k\,(b')_k\,(b")_k}{(c)_{|k|}\,(d)_k\,k!} z^k, \qquad \sum \frac{1}{|z_j|} < 1; \tag{1.27$*$}$$

$$K_{02}^{03} = \sum \frac{(b)_k\,(b')_k\,(b")_k}{(d)_k\,(d')_k\,k!} z^k = \prod {}_3F_2\left(\begin{matrix} b, b', b" \\ d, d' \end{matrix}\,\middle|\, z_j\right), \qquad |z_j| < 1. \tag{1.28}$$

Ряды Аппеля F_1, F_2, F_3 исследовались В.А.Голубевой [5] в связи с теорией фуксовых систем. Интересно отметить, что наибольшей группой преобразований обладает ряд F_1 (120 преобразований) и его обобщение - ряд F_D. Это объясняется тем, что ряд Лауричеллы F_D обладает простым одномерным интегральным представлением:

$$F_D\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle|\, b \,\middle|\, z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \prod (1-tz_j)^{-b_j}\, dt. \tag{1.29}$$

В монографии У.Миллера [7] функция Лауричеллы F_D исследовалась методами теории представлений групп. В работах И.М.Гельфанда и его учеников [4] изучалась специальная функция от матричного аргумента, определяемая как интеграл от замкнутой дифференциальной формы.В работе [10] отмечается, что гипергеометрическая функция Гельфанда, изучавшаяся в [4], является функцией типа Кампе де Ферье. Большая информация по гипергеометрическим рядам содержится в справочниках серии ПБМ [8]. Отметим также, что современный подход к теории аппроксимаций Паде предполагает использование групповых свойств рядов ${}_pF_q$[6]. О более общих рядах Гейне см.[3].

2. Фундаментальные решения для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

Определение 2.1. *Для двух мультииндексов $k = [k_1..k_n]$ и $m = [m_1..m_n]$ положим $k \le m$ р,если $k_j \le m_j$ для всех j. Если при этом хотя бы для одного индекса $k_j < m_j$ то $k < m$.* Ниже мы рассматриваем уравнение вида

$$\partial_m U = \sum_{p<m} a_p \partial_p U. \tag{2.1}$$

Будем искать фундаментальное решение E уравнения (2.1) в пространстве распределений D' (см.[2]), исчезающее вне главного конуса $R_+^n = \{x_j \le 0\}$. Имеем:

$$\eta^m \hat{E} = \left(\sum_{p<m} a_p \eta^p \right) \hat{E} + 1, \qquad \hat{E}(\xi) = F_{x\to\xi} E(x), \qquad \eta = -i\xi. \tag{2.2}$$

Здесь $F_{x\to\xi}$ - преобразование Фурье. Согласно теоремам типа Винера-Пэли $\hat{E}(\xi)$ является аналитической функцией от ξ при $\Im(\xi_j) > 0$. Разложим её в ряд Лорана $\hat{E}(\xi) = \sum\limits_0^\infty b_p/\eta^{p+1}$. Теперь обратное преобразование даёт

$$E(x) = \sum_{p=0}^\infty b_p \frac{x_+^p}{p!}, \qquad \text{где} \quad x_+^p = \begin{cases} x_+^p & \text{в конусе} \quad R_+^n, \\ 0 & \text{вне конуса} \quad R_+^n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим примеры. (Ниже $U_j = \partial U/\partial x_j$). Уравнение

$$U_{123} = a_1 U_{23} + a_2 U_{31} + a_3 U_{12} + b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3 + cU \tag{2.4}$$

имеет фундаментальное решение

$$E(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{|k|!\,(a_1)^{k_1}\,(a_2)^{k_2}\,(a_3)^{k_3}\,(b_1)^{k_4}\,(b_2)^{k_5}\,(b_3)^{k_6}(c)^{k_7}}{k!} \times$$
$$\times \frac{(x_1)_+^{k_1+k_5+k_6+k_7}}{(k_1+k_5+k_6+k_7)!}\,\frac{(x_2)_+^{k_2+k_4+k_6+k_7}}{(k_2+k_4+k_6+k_7)!}\,\frac{(x_3)_+^{k_3+k_4+k_5+k_7}}{(k_3+k_4+k_5+k_7)!}. \tag{2.5}$$

В частности, уравнение $U_{123} = a_1 U_{23} + a_2 U_{31} + a_3 U_{12}$ имеет фундаментальное решение

$$E(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{[k_1!\,k_2!\,k_3!]^2} (a_1 x_{1+})^{k_1} (a_2 x_{2+})^{k_2} (a_3 x_{3+})^{k_3} \tag{2.6}$$

Уравнение $U_{123} = b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3$ имеет фундаментальное решение

$$E(x) = \sum_0^\infty \frac{(k_1+k_2+k_3)!\, b_1^{k_1}\, b_2^{k_2}\, b_3^{k_3}}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,\frac{(x_1)_+^{k_2+k_3}}{(k_2+k_3)!}\,\frac{(x_2)_+^{k_3+k_1}}{(k_3+k_1)!}\,\frac{(x_3)_+^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}. \tag{2.7}$$

Уравнение $U_{1..n} = cU$ имеет фундаментальное решение $E = \sum (cx_{1+} \cdots x_{n+})^k/[k!]^n$
Уравнение $U_{xxy} = lU_{xx} + mU_{xy} + pU_x + qU_y + rU$ имеет фундаментальное решение

$$E(x) = \sum \frac{|k|!}{k!} l^{k_1} m^{k_2} p^{k_4} q^{k_4} r^{k_5} \frac{x_+^{k_2+k_3+2k_4+2k_5}}{(k_2+k_3+2k_4+2k_5)!}\,\frac{y_+^{k_1+k_3+k_5}}{(k_1+k_3+k_5)!}. \tag{2.8}$$

В заключение отметим 2 уравнения, не относящиеся к данному классу, но важные для приложений. Уравнение $\triangle U + \sum \frac{2\lambda_k}{x_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$ имеет фундаментальное решение

$$E(x) = \mu r^{-2c} F_A \left(\begin{matrix} c, \lambda \\ 2\lambda \end{matrix} \middle| -\frac{4x_1\xi_1}{r^2}, .., -\frac{4x_n\xi_n}{r^2} \right), \qquad r = |x-\xi|, \quad c = \frac{n}{2} - 1 + \sum \lambda_k. \tag{2.9}$$

Матричный аналог этого решения использовался автором [9] при изучении соответствующей вырождающейся эллиптической системы с коммутирующими матричными коэффициентами. Интересно отметить, что для этой системы возможно одновременное вырождение как первого, так и второго рода(на разных гиперплоскостях).

Пространственное комплексное волновое уравнение $\partial_{tt}U = \triangle U$ имеет решения вида [7, с.300]:

$$U(x,y,z) = (z+t)^{-a}(t-z)^{-b}(x-iy)^{c}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\frac{x^2+y^2}{t^2-z^2}\right). \tag{2.9}$$

Литература

[1] Бейтмен Г.,Эрдейи. Серия СМБ. Высшие трансцендентные функции. Т.1 М.: Наука, 1973. 296с.

[2] Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320с.

[3] Гаспер Дж.,Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993. 349с.

[4] Гельфанд И.М.,Васильев В.А.,Зелевинский А.В. Поведение общих гипергеометрических функций в комплексной области. Докл. АН СССР. 1986. Т.290, N2, С.277-281.

[5] Голубева В.А. Гипергеометрические функции двух переменных Аппеля и Кампе де Ферье. Сиб. мат. журн. 1979. Т.20(5). С.997-1014.

[6] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир,1980, 608с.

[7] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981, С.344.

[8] Прудников А.П.,Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983, 752с.

[9] Чиханов Х.А. Матричные ряды Лауричеллы и краевые задачи для вырождающихся эллиптических систем. Сиб. мат. журн. 1985. Т.26(5). С.182-189.

[10] Чиханов Х.А. Гипергеометрические ряды и фуксовы системы. Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25(10). С.1727-1730

[11] Янушаускас А.И. Двойные ряды. Наука,Новосибирск,1980. 224с.

KAMPE DE FERIETS FUNCTION AND FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF ONE CLASS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Ch. Chikhanov [2]

It is presented a new way of building of fundamental solutions for one class of differential equations with partial derivations with constant coefficients, avoiding some algebraic manipulations and calculation of integrals. It is considered the generalised Laurichella series, their classifications and problem of convergencies.

[2] Chikhanov Chamit, dept. of Mathematics Samara State University