ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО И ШЕСТОГО ПОРЯДКОВ

И.С.Орлова[1]

Данная статья является прямым продолжением работы [1], в которой был применен метод точной линеаризации [2] (см.также [3]). В [1] рассматривались нелинейные автономные обыкновенные дифференциальные уравнения 2–го, 3–го и 4–го порядков. В настоящей работе речь идет об уравнениях 5–го и 6–го порядков. Приведены иллюстративные примеры. Некоторые из полученных результатов были анонсированы в [4].

Введение

В работах [2,3] был представлен новый метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Он основан на неточечном нелокальном преобразовании зависимой и независимой переменных, приводящем к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом порядок уравнения не меняется. Отличительной особенностью этого метода является нахождение исходных нелинейных уравнений, а также самих преобразований в явном виде. Это оказалось возможным в результате совместного применения метода преобразований и метода факторизации нелинейных дифференциальных операторов. Построение линеаризуемых уравнений высших порядков осуществляется на основе рекуррентных соотношений. Показано, что линеаризуемые уравнения являются алгебраическими относительно входящих в них производных от зависимой переменной. Порядок нелинейного члена определяется как сумма произведений порядков производных на показатели их степеней. При этом уравнение, принадлежащее к исследуемому классу, представимо в виде алгебраической суммы выражений (с коэффициентами, представленными через зависимую переменную), каждое из которых состоит из всех нелинейных членов одного и того же порядка. Выражение, не зависящее от коэффициентов преобразованного линейного уравнения, имеет порядок, равный порядку уравнения. Все остальные выражения имеют ме́ньший порядок и содержат их.

Ранее в работе [1] были построены линеаризуемые уравнения до четвертого порядка включительно. В настоящей работе построены линеаризуемые уравнения пятого и шестого порядков.

[1]Орлова Ирина Сергеевна, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

1. Линеаризация уравнений 5–го порядка

Пусть дано автономное нелинейное дифференциальное уравнение 5–го порядка

$$F(y,y',y'',y''',y^{(4)},y^{(5)})=0, \tag{1.1}$$

линейное относительно $y^{(5)}$. Найдем общий вид уравнения (1.1), при котором оно приводится нелинейным преобразованием зависимой и независимой переменных

$$y=v(y)z, \qquad dt=u(y)dx \tag{1.2}$$

к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(5)}(t)+5b_1z^{(4)}(t)+10b_2z'''(t)+10b_3z''(t)+5b_4z'(t)+b_5z(t)+c=0. \tag{1.3}$$

Как было показано в работе [1] (см. лемма 1), линеаризация возможна тогда и только тогда, когда (1.1) допускает факторизацию (с точностью до слагаемого cvu^5)

$$[D-(\frac{v^*}{v}+4\frac{u^*}{u})y'-r_5u][D-(\frac{v^*}{v}+3\frac{u^*}{u})y'-r_4u][D-(\frac{v^*}{v}+2\frac{u^*}{u})y'-r_3u]\times$$

$$\times[D-(\frac{v^*}{v}+\frac{u^*}{u})y'-r_2u][D-\frac{v^*}{v}y'-r_1u]y+cvu^5=0,\ (*)=\frac{d}{dy}. \tag{1.4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если уравнение (1.1) линеаризуется с помощью (1.2), то оно допускает разложение следующей структуры:

$$F\equiv\psi_5+5b_1u\psi_4+10b_2u^2\psi_3+10b_3u^3\psi_2+5b_4u^4\psi_1+b_5u^5y+cvu^5=0, \tag{1.5}$$

где $\psi_k,\ k=\overline{1,5}$ являются алгебраическими суммами, содержащими всевозможные слагаемые, каждое из которых есть произведение производных в соответствующих степенях от зависимой переменной, сумма порядков которых (с учетом показателей степеней) равна k. А именно:

$$\begin{aligned}
&\psi_5=g_{50}y^{(5)}+g_{51}y^{(4)}y'+g_{52}y'''y''+g_{53}y'''y'^2+g_{54}y''^2y'+g_{55}y''y'^3+g_{56}y'^5,\\
&\psi_4=g_{40}y^{(4)}+g_{41}y'''y'+g_{42}y''^2+g_{43}y''y'^2+g_{44}y'^4,\\
&\psi_3=g_{30}y'''+g_{31}y''y'+g_{32}y'^3,\\
&\psi_2=g_{20}y''+g_{21}y'^2,\\
&\psi_1=g_{10}y'.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

При этом функции $g_{50},\dots,g_{56}$ для ψ_5 имеют следующие выражения:

$$g_{50}=1-\frac{v^*}{v}y,$$

$$g_{51}=-[5\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^*}{v}y)(10\frac{v^*}{v}+11\frac{u^*}{u})],$$

$$g_{52}=-5[2\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^*}{v}y)(4\frac{v^*}{v}+3\frac{u^*}{u})],$$

$$g_{53}=(1-\frac{v^*}{v}y)(60\frac{{v^*}^2}{v^2}-30\frac{v^{**}}{v}+90\frac{u^*v^*}{uv}+60\frac{{u^*}^2}{u^2}-14\frac{u^{**}}{u})+30\frac{v^{**}v^*}{v^2}y+45\frac{u^*v^{**}}{uv}y-$$
$$-10\frac{v^{***}}{v}y,$$

$$g_{54}=(1-\frac{v^*}{v}y)(90\frac{{v^*}^2}{v^2}-45\frac{v^{**}}{v}+120\frac{u^*v^*}{uv}+70\frac{{u^*}^2}{u^2}-18\frac{u^{**}}{u})+45\frac{v^{**}v^*}{v^2}y+60\frac{u^*v^{**}}{uv}y-$$
$$-15\frac{v^{***}}{v}y,$$

$$g_{55}=10\frac{v^{****}}{v}y-10(\frac{v^{***}}{v}y-3\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}y)(4\frac{v^{*}}{v}+7\frac{u^{*}}{u})-60\frac{{v^{**}}^{2}}{v^{2}}y+195\frac{v^{**}{u^{*}}^{2}}{vu^{2}}y-$$
$$-45\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(40\frac{v^{***}}{v}-240\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}+240\frac{{v^{*}}^{3}}{v^{3}}-210\frac{u^{*}v^{**}}{uv}+420\frac{u^{*}{v^{*}}^{2}}{uv^{2}}+$$
$$+390\frac{{u^{*}}^{2}v^{*}}{u^{2}v}-90\frac{u^{**}v^{*}}{uv}-125\frac{u^{*}u^{**}}{u^{2}}+210\frac{{u^{*}}^{3}}{u^{3}}+11\frac{u^{***}}{u}),$$
$$g_{56}=\frac{v^{*****}}{v}y-5(\frac{v^{****}}{v}y-4\frac{v^{***}v^{*}}{v^{2}}y+12\frac{v^{**}{v^{*}}^{2}}{v^{3}}y-6\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y)(\frac{v^{*}}{v}+2\frac{u^{*}}{u})+$$
$$+60\frac{{v^{**}}^{2}v^{*}}{v^{3}}y-20\frac{v^{***}v^{**}}{v^{2}}y-10\frac{v^{***}u^{**}}{vu}y-5\frac{v^{**}u^{***}}{vu}y+60\frac{{v^{**}}^{2}u^{*}}{v^{2}u}y+45\frac{v^{***}{u^{*}}^{2}}{u^{2}v}y-$$
$$-135\frac{v^{**}v^{*}{u^{*}}^{2}}{v^{2}u^{2}}y-105\frac{v^{**}{u^{*}}^{3}}{vu^{3}}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(5\frac{v^{****}}{v}-40\frac{v^{***}v^{*}}{v^{2}}-30\frac{{v^{**}}^{2}}{v^{2}}+180\frac{v^{**}{v^{*}}^{2}}{v^{3}}-$$
$$-120\frac{{v^{*}}^{4}}{v^{4}}-30\frac{u^{**}v^{**}}{uv}-40\frac{u^{*}v^{***}}{uv}+135\frac{v^{**}{u^{*}}^{2}}{u^{2}v}+240\frac{v^{**}v^{*}u^{*}}{uv^{2}}+60\frac{u^{**}{v^{*}}^{2}}{uv^{2}}-$$
$$-270\frac{{u^{*}}^{2}{v^{*}}^{2}}{u^{2}v^{2}}+120\frac{u^{*}u^{**}v^{*}}{u^{2}v}-210\frac{{u^{*}}^{3}v^{*}}{u^{3}v}-10\frac{u^{***}v^{*}}{uv}-240\frac{{v^{*}}^{3}u^{*}}{v^{3}u}-10\frac{{u^{**}}^{2}}{u^{2}}-$$
$$-15\frac{u^{*}u^{***}}{u^{2}}+105\frac{{u^{*}}^{2}u^{**}}{u^{3}}-105\frac{{u^{*}}^{4}}{u^{4}}+\frac{u^{****}}{u});$$

функции $g_{40},\ldots,g_{44}$ для ψ_4 представимы в виде:

$$g_{40}=1-\frac{v^{*}}{v}y,$$
$$g_{41}=-[4\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(8\frac{v^{*}}{v}+7\frac{u^{*}}{u})],$$
$$g_{42}=-[3\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(6\frac{v^{*}}{v}+4\frac{u^{*}}{u})],$$
$$g_{43}=(1-\frac{v^{*}}{v}y)(36\frac{{v^{*}}^{2}}{v^{2}}-18\frac{v^{**}}{v}+44\frac{u^{*}v^{*}}{uv}+25\frac{{u^{*}}^{2}}{u^{2}}-7\frac{u^{**}}{u})++18\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}y+22\frac{u^{*}v^{**}}{uv}y-$$
$$-6\frac{v^{***}}{v}y,$$
$$g_{44}=-[\frac{v^{****}}{v}y-(2\frac{v^{***}}{v}y-6\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}y)(2\frac{v^{*}}{v}+3\frac{u^{*}}{u})-6\frac{{v^{**}}^{2}}{v^{2}}y+15\frac{v^{**}{u^{*}}^{2}}{vu^{2}}y-$$
$$-4\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(4\frac{v^{***}}{v}-24\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}+24\frac{{v^{*}}^{3}}{v^{3}}-18\frac{u^{*}v^{**}}{uv}+36\frac{u^{*}{v^{*}}^{2}}{uv^{2}}+$$
$$+30\frac{{u^{*}}^{2}v^{*}}{u^{2}v}-8\frac{u^{**}v^{*}}{uv}-10\frac{u^{*}u^{**}}{u^{2}}+15\frac{{u^{*}}^{3}}{u^{3}}+\frac{u^{***}}{u})];$$

функции g_{30},g_{31},g_{32} для ψ_3 имеют следущий вид:

$$g_{30}=1-\frac{v^{*}}{v}y,$$
$$g_{31}=-[3\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(6\frac{v^{*}}{v}+4\frac{u^{*}}{u})],$$
$$g_{32}=-[\frac{v^{***}}{v}y-3\frac{v^{**}u^{*}}{uv}y-3\frac{v^{**}v^{*}}{v^{2}}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(3\frac{v^{**}}{v}-6\frac{{v^{*}}^{2}}{v^{2}}-6\frac{u^{*}v^{*}}{uv}-3\frac{{u^{*}}^{2}}{u^{2}}+$$
$$+\frac{u^{**}}{u}];$$

функции g_{20},g_{21} для ψ_2 представлены в виде:

$$g_{20}=1-\frac{v^{*}}{v}y,$$
$$g_{21}=-[\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^{*}}{v}y)(2\frac{v^{*}}{v}+\frac{u^{*}}{u})];$$

функция g_{10} для ψ_1 имеет следующий вид:

$$g_{10}=1-\frac{v^{*}}{v}y.$$

• Применив дифференциальный оператор $[D-(\frac{v^*}{v}+4\frac{u^*}{u})y'-r_5u]$ к факторизации

$$[D-(\frac{v^*}{v}+3\frac{u^*}{u})y'-r_4u][D-(\frac{v^*}{v}+2\frac{u^*}{u})y'-r_3u]\times$$

$$\times[D-(\frac{v^*}{v}+\frac{u^*}{u})y'-r_2u][D-\frac{v^*}{v}y'-r_1u]y$$

(см. также формулу (4.3) из [1]) и добавив к полученному выражению слагаемое cvu^5, придем к формуле (1.5), где r_k удовлетворяют характеристическому уравнению

$$r^5+5b_1r^4+10b_2r^3+10b_3r^2+5b_4r+b_5=0. \bullet \tag{1.7}$$

Введя обозначение $g_{51}=5f(y)g_{50}$, имеющее развернутый вид

$$[5\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^*}{v}y)(10\frac{v^*}{v}+11\frac{u^*}{u})]=-5f(y)(1-\frac{v^*}{v}y),$$

придем к уравнению

$$v^{**}-\frac{2}{v}{v^*}^2+(\frac{2}{y}-\frac{11}{5}\frac{u^*}{u}-f)v^*+(\frac{11}{5}\frac{u^*}{u}+f)\frac{1}{y}v=0, \quad f=f(y). \tag{1.8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Общее решение уравнения (1.8) имеет вид

$$v(y)=\frac{y}{\alpha+\beta\int u^{11/5}exp(\int f dy)dy}, \tag{1.9}$$

где α, β – произвольные постоянные.

• Подстановкой $v=V^{-1}$ уравнение (1.8) приводится к линейному неавтономному уравнению

$$V^{**}+(\frac{2}{y}-\frac{11}{5}\frac{u^*}{u}-f)V^*-(\frac{11}{5}\frac{u^*}{u}+f)\frac{1}{y}V=0. \tag{1.10}$$

Оно допускает факторизацию

$$(D_y+\frac{1}{y}-\frac{11}{5}\frac{u^*}{u}-f)(D_y+\frac{1}{y})V=0, \ D_y=d/dy$$

в силу дифференциального аналога формул Виета. А именно, если линейное уравнение

$$Ly\equiv y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{1.11}$$

допускает факторизацию

$$Ly\equiv(D-\alpha_2(x))(D-\alpha_1(x))y=0, \tag{1.12}$$

то справедливы формулы

$$a_1(x)=-(\alpha_1+\alpha_2), \qquad a_0(x)=\alpha_2\alpha_1-\alpha_1', \tag{1.13}$$

называемые дифференциальным аналогом формул Виета. Поэтому общее решение уравнения (1.10) имеет вид

$$V=\frac{1}{y}[\alpha+\beta\int u^{11/5}exp(\int f dy)dy]$$

и, следовательно, $v(y)$ удовлетворяет соотношению (1.9). Действительно, если (1.11) допускает факторизацию (1.12), то его общее решение можно представить в виде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1 = exp(\int \alpha_1 dx),\ y_2 = y_1 \int exp(\int(\alpha_2 - \alpha_1)dx)dx$ (см.также [1,с.10]; [5,с.41]).•

ТЕОРЕМА 1.1. Уравнение (1.1) линеаризуется преобразованием (1.2) тогда и только тогда, когда оно имеет следующий вид:

$$y^{(5)} + 5f(y)y'y^{(4)} + y''y'''(7\frac{\varphi^*}{\varphi} + 10f) + y'^2y'''[8\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{63}{5}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi^*}{\varphi}f + 10(f^2 + f^*)] +$$

$$+y'y''^2[15\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{112}{5}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2} + 6\frac{\varphi^*}{\varphi}f + 15(f^2 + f^*)] + y'^3y''[\frac{987}{25}\frac{{\varphi^*}^3}{\varphi^3} - \frac{244}{5}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2} + 11\frac{\varphi^{***}}{\varphi} +$$

$$+(21\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{169}{5}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2})f - 4\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2 + f^*) + 10(f^3 + 3ff^* + f^{**})] - y'^5[\frac{8064}{625}\frac{{\varphi^*}^4}{\varphi^4} - \frac{2946}{125}\frac{{\varphi^*}^2\varphi^{**}}{\varphi^3} +$$

$$+\frac{102}{25}\frac{{\varphi^{**}}^2}{\varphi^2} + \frac{186}{25}\frac{\varphi^*\varphi^{***}}{\varphi^2} - \frac{6}{5}\frac{\varphi^{****}}{\varphi} - (\frac{1989}{125}\frac{{\varphi^*}^3}{\varphi^3} - \frac{458}{25}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2} + \frac{19}{5}\frac{\varphi^{***}}{\varphi})f + (\frac{129}{25}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2} -$$

$$-\frac{16}{5}\frac{\varphi^{**}}{\varphi})(f^2 + f^*) + \frac{6}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^3 + 3ff^* + f^{**}) - (f^4 + 6f^2f^* + 3{f^*}^2 + 4ff^{**} + f^{***})] +$$

$$+5b_1\varphi\{y^{(4)} + y'y'''(4f + \frac{9}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}) + y'^2y''[\frac{31}{5}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{189}{25}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2} + \frac{22}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}f + 6(f^2 + f^*)] + y''^2(3f +$$

$$+\frac{13}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}) + y'^4[\frac{336}{125}\frac{{\varphi^*}^3}{\varphi^3} + \frac{118}{25}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2} + \frac{6}{5}\frac{\varphi^{***}}{\varphi} + (\frac{33}{5}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{87}{25}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2})f + \frac{3}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2 + f^*) + (f^3 +$$

$$+3ff^* + f^{**})]\} + 10b_2\varphi^2\{y''' + y'y''(3f + \frac{13}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}) + y'^3[\frac{6}{5}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{24}{25}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2} + \frac{7}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi}f + (f^2 + f^*)]\} +$$

$$+10b_3\varphi^3\{y'' + y'^2(\frac{6}{5}\frac{\varphi^*}{\varphi} + f)\} + 5b_4\varphi^4y' + \varphi^{14/5}exp(-\int fdy) \times$$

$$\times[b_5\int \varphi^{11/5}exp(\int fdy)dy + \frac{c}{\beta}] = 0. \qquad (1.14)$$

При этом преобразованием

$$z = \beta\int \varphi^{11/5}\exp(\int fdy)dy, \quad dt = \varphi dx \qquad (1.15)$$

оно приводится к линейному уравнению (1.3).

• Подставив (1.9) в уравнение (1.5) (где $\alpha = 0$), положив $\varphi = u(y)$ и учтя, что $r_k,\ k = \overline{1,5}$, – корни характеристического уравнения (1.7), придем к (1.14). •

Специальный случай уравнения (1.14) получается при $\varphi = \exp(-5/11\int fdy)$, а именно преобразование (1.15) примет вид:

$$z = y, \qquad dt = \varphi dx,$$

т.е. в этом случае линеаризация осуществляется за счет преобразования независимой переменной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Таким образом, в силу теоремы 1.1 уравнения вида

$$y^v+\varphi_1 f y' y^{iv}+\varphi_2 y'' y'''+\varphi_3 y'^2 y'''+\varphi_4 y' y''^2+\varphi_5 y'^3 y''+\varphi_6 y^{iv}+\varphi_7 y' y'''+\varphi_8 y''^2+$$

$$+\varphi_9 y'^2 y''+\varphi_{10} y'''+\varphi_{11} y' y''+\varphi_{12} y''+\sum_{k=0}^{5} f_k y'^k=0$$

могут быть подвергнуты испытанию методом точной линеаризации. Это уравнение можно еще более конкретизировать, а именно положить $\varphi_6=a\varphi,\ \varphi_{10}=b\varphi^2$, $\varphi_{12}=c\varphi^3,\ f_1=d\varphi^4$, где $a,b,c,d=const$.

ТЕОРЕМА 1.2. Уравнение (1.14) допускает при $c=0$ однопараметрические семейства решений

$$\int \frac{\varphi^{6/5}\exp(\int f dy)dy}{\int \varphi^{11/5}\exp(\int f dy)dy}=r_k x+C, \tag{1.16}$$

где r_k – корни характеристического уравнения (1.7).

• Уравнение (1.4) примет вид:

$$[D-(\frac{v^*}{v}+4\frac{u^*}{u})y'-r_5 u][D-(\frac{v^*}{v}+3\frac{u^*}{u})y'-r_4 u][D-(\frac{v^*}{v}+2\frac{u^*}{u})y'-r_3 u]\times$$

$$\times[D-(\frac{v^*}{v}+\frac{u^*}{u})y'-r_2 u][D-\frac{v^*}{v}y'-r_1 u]y=0.$$

Любое решение уравнения 1–го порядка

$$(D-\frac{v^*}{v}y'-r_k u)y=0, \quad k=1,2,3,4,5 \tag{1.17}$$

является также решением всего уравнения. Подставляя в (1.17)

$$v(y)=\frac{y}{\beta\int \varphi^{11/5} exp(\int f dy)dy}, \quad u=\varphi$$

и решая его, получим (1.16). •

ПРИМЕР 1.1. Уравнение

$$y^{(5)}-\frac{6}{y}y'y^{(4)}-\frac{5}{y}y''y'''+\frac{15}{y^2}y'^2y'''+\frac{10}{y^2}y'y''^2-\frac{15}{y^3}y'^3y''+5b_1[yy^{(4)}-3y'y'''-y''^2+$$

$$+\frac{3}{y}y'^2y'']+10b_2[y^2y'''-yy'y'']+10b_3y^3y''+5b_4y^4y'+\frac{1}{2}b_5y^6+\frac{1}{2}cy^5=0 \tag{1.18}$$

подстановкой

$$z=y^2, \qquad dt=ydx \tag{1.19}$$

приводится к (1.3) и допускает при $c=0$ однопараметрические семейства решений

$$y=-2/(r_k x+C), \tag{1.20}$$

где r_k – различные характеристические корни уравнения (1.7), а C – постоянная интегрирования. Действительно, при $c=0$ (1.16) допускает следующую факторизацию:

$$[D-\frac{3}{y}y'-r_5y][D-\frac{2}{y}y'-r_4y][D-\frac{1}{y}y'-r_3y][D-r_2y][D+\frac{1}{y}y'-r_1y]y=0.$$

ПРИМЕР 1.2. Уравнение

$$y^{(5)}-\frac{y'y^{(4)}}{y}(5-5k+11l)-5\frac{y''y'''}{y}(2-2k+3l)+\frac{y'y''^2}{y^2}[6(1-k+l)(2-k+2l)+(3-3k+4l)\times$$

$$\times(6-3k+10l)]+\frac{y'^2y'''}{y^2}[3(1-k+l)(2-k+2l)+(3-3k+4l)(2-k+3l)+(4-4k+7l)(2-k+4l)]-$$

$$-\frac{y'^3y''}{y^3}[(1-k+l)(2-k+2l)(12-4k+15l)+(3-3k+4l)(2-k+3l)(3-k+4l)]+$$

$$+\frac{y'^5}{y^4}(1-k+l)(2-k+2l)(3-k+3l)(4-k+4l)+5b_1y^l\{y^{(4)}-\frac{y'y'''}{y}(4-4k+7l)-\frac{y''^2}{y}(3-3k+4l)+$$

$$+\frac{y'^2y''}{y^2}[3(1-k+l)(2-k+2l)+(3-3k+4l)(2-k+3l)]-\frac{y'^4}{y^3}(1-k+l)(2-k+2l)(3-k+3l)\}+$$

$$+10b_2y^{2l}[y'''-\frac{y'y''}{y}(3-3k+4l)+\frac{y'^3}{y^2}(1-k+l)(2-k+2l)]+10b_3y^{3l}[y''-\frac{y'^2}{y}(1-k+l)]+$$

$$+5b_4y^{4l}y'+\frac{b_5}{k}y^{5l+1}+\frac{1}{k}cy^{1-k+5l}=0 \qquad (1.21)$$

подстановкой $z=y^k$, $dt=y^l dx$ приводится к (1.3). Действительно, это уравнение факторизуется

$$[D-\frac{1-k+4l}{y}y'-r_5y^l][D-\frac{1-k+3l}{y}y'-r_4y^l][D-\frac{1-k+2l}{y}y'-r_3y^l]\times$$

$$\times[D-\frac{1-k+l}{y}y'-r_2y^l][D-\frac{1-k}{y}y'-r_1y^l]y+cy^{1-k+5l}=0.$$

В частности, при $k=1$ и произвольном l получим факторизацию

$$[D-\frac{4l}{y}y'-r_5y^l][D-\frac{3l}{y}y'-r_4y^l][D-\frac{2l}{y}y'-r_3y^l]\times$$

$$\times[D-\frac{l}{y}y'-r_2y^l][D-r_1y^l]y+cy^{5l}=0,$$

а при $l=0$ и произвольном k получим другую факторизацию

$$[D-\frac{1-k}{y}y'-r_5][D-\frac{1-k}{y}y'-r_4][D-\frac{1-k}{y}y'-r_3]\times$$

$$\times[D-\frac{1-k}{y}y'-r_2][D-\frac{1-k}{y}y'-r_1]y+cy^{1-k}=0.$$

Следующий пример дает общий вид уравнения 5–го порядка, линеаризуемого заменой лишь зависимой переменной.

ПРИМЕР 1.3 Уравнение

$$y^{(5)}+5f(y)y'y^{(4)}+10fy''y'''+10y'^2y'''(f^2+f^*)+15y'y''^2(f^2+f^*)+$$

$$+10y'^3y''(f^3+3ff^*+f^{**})+y'^5(f^4+6f^2f^*+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})+$$

$$+5b_1\{y^{(4)}+4fy'y'''+6y'^2y''(f^2+f^*)+3fy''^2+y'^4(f^3+3ff^*+f^{**})\}+$$

$$+10b_2\{y''' + 3fy'y'' + y'^3(f^2 + f^*)\} + 10b_3\{y'' + fy'^2\} + 5b_4y' +$$
$$+exp(-\int fdy)[b_5\int exp(\int fdy)dy + \frac{c}{\beta}] = 0$$

приводится к (1.3) преобразованием

$$z = \int exp(\int fdy)dy, \quad dt = dx.$$

2. Линеаризация уравнений 6–го порядка

Пусть дано автономное нелинейное дифференциальное уравнение 6–го порядка

$$F(y, y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}) = 0, \tag{2.1}$$

линейное относительно $y^{(6)}$. Найдем общий вид уравнения (2.1), при котором оно приводится преобразованием (1.2) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(6)}(t) + 6b_1z^{(5)}(t) + 15b_2z^{(4)}(t) + 20b_3z'''(t) + 15b_4z''(t) + 6b_5z'(t) + b_6z(t) + c = 0. \tag{2.2}$$

Как было показано в работе [1] (см. лемма 1), линеаризация возможна тогда и только тогда, когда (2.1) допускает факторизацию (с точностью до слагаемого cvu^6)

$$[D - (\frac{v^*}{v} + 5\frac{u^*}{u})y' - r_6u][D - (\frac{v^*}{v} + 4\frac{u^*}{u})y' - r_5u][D - (\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u})y' - r_4u]\times$$
$$\times[D - (\frac{v^*}{v} + 2\frac{u^*}{u})y' - r_3u][D - (\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})y' - r_2u][D - \frac{v^*}{v}y' - r_1u]y + cvu^6 = 0. \tag{2.3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если уравнение (2.1) линеаризуется с помощью (1.2), то оно допускает разложение следующей структуры:

$$F \equiv \psi_6 + 6b_1u\psi_5 + 15b_2u^2\psi_4 + 20b_3u^3\psi_3 + 15b_4u^4\psi_2 + 6b_5u^5\psi_1 + b_6u^6y + cvu^6 = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\psi_6 = h_{60}y^{(6)} + h_{61}y^{(5)}y' + h_{62}y^{(4)}y'' + h_{63}y^{(4)}y'^2 + h_{64}y'''^2 + h_{65}y'''y''y' + h_{66}y'''y'^3 +$$
$$+h_{67}y''^3 + h_{68}y''^2y'^2 + h_{69}y''y'^4 + h_{6,10}y'^6,$$

а выражения для $\psi_k,\ k = \overline{1,5}$ вычисляются согласно формулам (1.6). Выражения для $h_{6k},\ k = \overline{0,10}$ имеют следующий вид:

$$h_{60} = 1 - \frac{v^*}{v}y,$$
$$h_{61} = -[6\frac{v^{**}}{v}y + (1 - \frac{v^*}{v}y)(12\frac{v^*}{v} + 16\frac{u^*}{u})],$$
$$h_{62} = -[15\frac{v^{**}}{v}y + (1 - \frac{v^*}{v}y)(30\frac{v^*}{v} + 26\frac{u^*}{u})],$$
$$h_{63} = (1 - \frac{v^*}{v}y)(90\frac{{v^*}^2}{v^2} - 45\frac{v^{**}}{v} + 162\frac{u^*v^*}{uv} + 126\frac{{u^*}^2}{u^2} - 25\frac{u^{**}}{u}) + 45\frac{v^{**}v^*}{v^2}y + 81\frac{u^*v^{**}}{uv}y -$$
$$-15\frac{v^{***}}{v}y,$$
$$h_{64} = -5[2\frac{v^{**}}{v}y + (1 - \frac{v^*}{v}y)(4\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u})],$$
$$h_{65} = (1 - \frac{v^*}{v}y)(360\frac{{v^*}^2}{v^2} - 180\frac{v^{**}}{v} + 550\frac{u^*v^*}{uv} + 350\frac{{u^*}^2}{u^2} - 79\frac{u^{**}}{u}) + 180\frac{v^{**}v^*}{v^2}y +$$
$$+275\frac{u^*v^{**}}{uv}y - 60\frac{v^{***}}{v}y,$$

$$h_{66} = 20\frac{v^{****}}{v}y - 5(\frac{v^{***}}{v}y - 3\frac{v^{**}v^{*}}{v^2}y)(16\frac{v^{*}}{v} + 33\frac{u^{*}}{u}) - 120\frac{{v^{**}}^2}{v^2}y + 525\frac{v^{**}{u^{*}}^2}{vu^2}y -$$
$$-104\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y + (1 - \frac{v^{*}}{v}y)(80\frac{v^{***}}{v} - 480\frac{v^{**}v^{*}}{v^2} + 480\frac{{v^{*}}^3}{v^3} - 495\frac{u^{*}v^{**}}{uv} + 990\frac{u^{*}{v^{*}}^2}{uv^2} +$$
$$+1050\frac{{u^{*}}^2v^{*}}{u^2v} - 208\frac{u^{**}v^{*}}{uv} - 329\frac{u^{*}u^{**}}{u^2} + 630\frac{{u^{*}}^3}{u^3} + 25\frac{u^{***}}{u}),$$

$$h_{67} = (1 - \frac{v^{*}}{v}y)(90\frac{{v^{*}}^2}{v^2} - 45\frac{v^{**}}{v} + 120\frac{u^{*}v^{*}}{uv} + 70\frac{{u^{*}}^2}{u^2} - 18\frac{u^{**}}{u}) + 45\frac{v^{**}v^{*}}{v^2}y + 60\frac{u^{*}v^{**}}{uv}y -$$
$$-15\frac{v^{***}}{v}y,$$

$$h_{68} = -[45\frac{v^{****}}{v}y - 15(\frac{v^{***}}{v}y - 3\frac{v^{**}v^{*}}{v^2}y)(12\frac{v^{*}}{v} + 23\frac{u^{*}}{u}) - 270\frac{{v^{**}}^2}{v^2}y + 1015\frac{v^{**}{u^{*}}^2}{vu^2}y -$$
$$-213\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y + (1 - \frac{v^{*}}{v}y)(180\frac{v^{***}}{v} - 1080\frac{v^{**}v^{*}}{v^2} + 1080\frac{{v^{*}}^3}{v^3} - 1035\frac{u^{*}v^{**}}{uv} + 2070\frac{u^{*}{v^{*}}^2}{uv^2} +$$
$$+2030\frac{{u^{*}}^2v^{*}}{u^2v} - 426\frac{u^{**}v^{*}}{uv} - 623\frac{u^{*}u^{**}}{u^2} + 1120\frac{{u^{*}}^3}{u^3} + 51\frac{u^{***}}{u})],$$

$$h_{69} = -[15\frac{v^{*****}}{v}y - 5(15\frac{v^{*}}{v} + 34\frac{u^{*}}{u})(\frac{v^{****}}{v}y - 4\frac{v^{***}v^{*}}{v^2}y + 12\frac{v^{**}{v^{*}}^2}{v^3}y) +$$
$$+495\frac{v^{**}u^{**}v^{*}}{uv^2}y + 1085\frac{v^{**}u^{**}u^{*}}{vu^2}y + 900\frac{{v^{**}}^2v^{*}}{v^3}y - 300\frac{v^{***}v^{**}}{v^2}y - 165\frac{v^{***}u^{**}}{vu}y -$$
$$-81\frac{v^{**}u^{***}}{vu}y + 1020\frac{{v^{**}}^2u^{*}}{v^2u}y + 840\frac{v^{***}{u^{*}}^2}{u^2v}y - 2520\frac{v^{**}v^{*}{u^{*}}^2}{v^2u^2}y - 2100\frac{v^{**}{u^{*}}^3}{vu^3}y +$$
$$+(1 - \frac{v^{*}}{v}y)(75\frac{v^{****}}{v} - 600\frac{v^{***}v^{*}}{v^2} - 450\frac{{v^{**}}^2}{v^2} + 2700\frac{v^{**}{v^{*}}^2}{v^3} - 1800\frac{{v^{*}}^4}{v^4} - 495\frac{u^{**}v^{**}}{uv} -$$
$$-680\frac{u^{*}v^{***}}{uv} + 2520\frac{v^{**}{u^{*}}^2}{u^2v} + 4080\frac{v^{**}v^{*}u^{*}}{uv^2} + 990\frac{u^{**}{v^{*}}^2}{uv^2} - 5040\frac{{u^{*}}^2{v^{*}}^2}{u^2v^2} + 2170\frac{u^{*}u^{**}v^{*}}{u^2v} -$$
$$-4200\frac{{u^{*}}^3v^{*}}{u^3v} - 162\frac{u^{***}v^{*}}{uv} - 4080\frac{{v^{*}}^3u^{*}}{v^3u} - 175\frac{{u^{**}}^2}{u^2} - 266\frac{u^{*}u^{***}}{u^2} + 2030\frac{{u^{*}}^2u^{**}}{u^3} -$$
$$-2205\frac{{u^{*}}^4}{u^4} + 16\frac{u^{****}}{u})],$$

$$h_{6,10} = -[\frac{v^{******}}{v}y - 3(2\frac{v^{*}}{v} + 5\frac{u^{*}}{u})(\frac{v^{*****}}{v}y - 5\frac{v^{****}v^{*}}{v^2}y + 20\frac{v^{***}{v^{*}}^2}{v^3}y - 60\frac{v^{**}{v^{*}}^3}{v^4}y) +$$
$$+240\frac{v^{***}v^{**}v^{*}}{v^3}y + 300\frac{v^{***}v^{**}u^{*}}{uv^2}y + 80\frac{v^{***}u^{**}v^{*}}{uv^2}y - 540\frac{{v^{**}}^2{v^{*}}^2}{v^4}y + 210\frac{v^{***}u^{**}u^{*}}{vu^2}y -$$
$$-900\frac{{v^{**}}^2v^{*}u^{*}}{v^3u}y + 45\frac{v^{**}v^{*}u^{***}}{v^2u}y + 105\frac{v^{**}u^{***}u^{*}}{vu^2}y - 630\frac{v^{**}v^{*}u^{**}u^{*}}{v^2u^2}y -$$
$$-840\frac{v^{**}u^{**}{u^{*}}^2}{vu^3}y - 30\frac{v^{****}v^{**}}{v^2}y - 20\frac{v^{****}u^{**}}{vu}y + 120\frac{{v^{**}}^2u^{**}}{v^2u}y - 240\frac{v^{**}{v^{*}}^2u^{**}}{v^3u}y +$$
$$+90\frac{{v^{**}}^3}{v^3}y + 105\frac{v^{****}{u^{*}}^2}{vu^2}y - 420\frac{v^{***}v^{*}{u^{*}}^2}{v^2u^2}y + 1260\frac{v^{**}{v^{*}}^2{u^{*}}^2}{v^3u^2}y + 70\frac{v^{**}{u^{**}}^2}{vu^2}y -$$
$$-20\frac{{v^{***}}^2}{v^2}y - 15\frac{v^{***}u^{***}}{vu}y - 6\frac{v^{**}u^{****}}{vu}y - 630\frac{{v^{**}}^2{u^{*}}^2}{v^2u^2}y - 420\frac{v^{***}{u^{*}}^3}{u^3v}y +$$
$$+1260\frac{v^{**}v^{*}{u^{*}}^3}{v^2u^3}y + 945\frac{v^{**}{u^{*}}^4}{vu^4}y + (1 - \frac{v^{*}}{v}y)(6\frac{v^{*****}}{v} - 60\frac{v^{****}v^{*}}{v^2} - 75\frac{v^{****}u^{*}}{vu} +$$
$$+360\frac{v^{***}{v^{*}}^2}{v^3} - 120\frac{v^{***}v^{**}}{v^2} + 600\frac{v^{***}v^{*}u^{*}}{v^2u} - 80\frac{v^{***}u^{**}}{vu} + 420\frac{v^{***}{u^{*}}^2}{vu^2} + 540\frac{{v^{**}}^2v^{*}}{v^3} +$$
$$+480\frac{v^{**}v^{*}u^{**}}{v^2u} - 1440\frac{v^{**}{v^{*}}^3}{v^4} - 2700\frac{v^{**}{v^{*}}^2u^{*}}{v^3u} - 2520\frac{v^{**}v^{*}{u^{*}}^2}{v^2u^2} + 630\frac{v^{**}u^{**}u^{*}}{vu^2} -$$
$$-45\frac{v^{**}u^{***}}{vu} - 1260\frac{v^{**}{u^{*}}^3}{vu^3} + 450\frac{{v^{**}}^2u^{*}}{v^2u} + 720\frac{{v^{*}}^5}{v^5} - 480\frac{{v^{*}}^3u^{**}}{uv^3} + 2520\frac{{u^{*}}^2{v^{*}}^3}{u^2v^3} -$$
$$-1260\frac{{v^{*}}^2u^{*}u^{**}}{u^2v^2} + 2520\frac{{v^{*}}^2{u^{*}}^3}{u^3v^2} + 90\frac{u^{***}{v^{*}}^2}{uv^2} + 1800\frac{u^{*}{v^{*}}^4}{uv^4} + 140\frac{{u^{**}}^2v^{*}}{u^2v} + 210\frac{u^{***}u^{*}v^{*}}{u^2v} -$$
$$-1680\frac{u^{**}{u^{*}}^2v^{*}}{u^3v} + 1890\frac{{u^{*}}^4v^{*}}{vu^4} - 12\frac{v^{*}u^{****}}{vu} - 35\frac{u^{**}u^{***}}{u^2} + 280\frac{{u^{**}}^2u^{*}}{u^3} - 21\frac{u^{*}u^{****}}{u^2} +$$
$$+210\frac{{u^{*}}^2u^{***}}{u^3} - 1260\frac{{u^{*}}^3u^{**}}{u^4} + 945\frac{{u^{*}}^5}{u^5} + \frac{u^{*****}}{u})].$$

• Применив дифференциальный оператор $[D-(\frac{v^*}{v}+5\frac{u^*}{u})y'-r_6u]$ к (1.4) (при $c=0$) и добавив к полученному выражению слагаемое cvu^6, придем к формуле (2.4), где r_k удовлетворяют характеристическому уравнению

$$r^6+6b_1r^5+15b_2r^4+20b_3r^3+15b_4r^2+6b_5r+b_6=0. \bullet \tag{2.5}$$

Введя обозначение $h_{61}=6f(y)h_{60}$, что в развернутом виде дает

$$[6\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^*}{v}y)(12\frac{v^*}{v}+16\frac{u^*}{u})]=-6f(y)(1-\frac{v^*}{v}y),$$

придем к уравнению

$$v^{**}-\frac{2}{v}{v^*}^2+(\frac{2}{y}-\frac{8}{3}\frac{u^*}{u}-f)v^*+(\frac{8}{3}\frac{u^*}{u}+f)\frac{1}{y}v=0, \quad f=f(y). \tag{2.6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$v(y)=\frac{y}{\alpha+\beta\int u^{8/3}exp(\int fdy)dy}, \tag{2.7}$$

где α,β – произвольные постоянные.

• Подстановкой $v=V^{-1}$ уравнение (2.6) приводится к линейному неавтономному уравнению

$$V^{**}+(\frac{2}{y}-\frac{8}{3}\frac{u^*}{u}-f)V^*-(\frac{8}{3}\frac{u^*}{u}+f)\frac{1}{y}V=0. \tag{2.8}$$

Оно допускает факторизацию

$$(D_y+\frac{1}{y}-\frac{8}{3}\frac{u^*}{u}-f)(D_y+\frac{1}{y})V=0, \ D_y=d/dy$$

в силу дифференциального аналога формул Виета. Поэтому общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$V=\frac{1}{y}[\alpha+\beta\int u^{7/4}exp(\int fdy)dy]$$

и, следовательно, $v(y)$ удовлетворяет соотношению (2.7) (см. доказательство предложения 1.2). •

ТЕОРЕМА 2.1. Уравнение (2.1) линеаризуется преобразованием вида (1.2) тогда и только тогда, когда оно имеет следующий вид:

$$y^{(6)}+6f(y)y'y^{(5)}+y''y^{(4)}(14\frac{\varphi^*}{\varphi}+15f)+y'''^2(\frac{35}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}+10f)+y'^2y^{(4)}[15\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{70}{3}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}-$$

$$-\frac{\varphi^*}{\varphi}f+15(f^2+f^*)]+y'y''y'''[81\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{350}{3}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}+45\frac{\varphi^*}{\varphi}f+60(f^2+f^*)]++y''^3[22\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-$$

$$-\frac{70}{3}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}+20\frac{\varphi^*}{\varphi}f+15(f^2+f^*)]+y'^3y'''[\frac{2590}{27}\frac{{\varphi^*}^3}{\varphi^3}-\frac{365}{3}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+\frac{85}{3}\frac{\varphi^{***}}{\varphi}-\frac{265}{3}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}f+$$

$$+56\frac{\varphi^{**}}{\varphi}f-5\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2+f^*)+20(f^3+3ff^*+f^{**})]+y'^2y''^2[\frac{560}{3}\frac{{\varphi^*}^3}{\varphi^3}-265\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+69\frac{\varphi^{***}}{\varphi}-$$

$$-225\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}f+147\frac{\varphi^{**}}{\varphi}f+15\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2+f^*)+45(f^3+3ff^*+f^{**})]-y'^4y''[\frac{4865}{27}\frac{{\varphi^*}^4}{\varphi^4}+65\frac{{\varphi^{**}}^2}{\varphi^2}-$$

$$-\frac{1110}{3}\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{**}}{\varphi^3}+\frac{410}{3}\frac{\varphi^*\varphi^{***}}{\varphi^2}-24\frac{\varphi^{****}}{\varphi}-\frac{2620}{9}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}f+355\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}f-79\frac{\varphi^{***}}{\varphi}f+120\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}\times$$

$$\times(f^2+f^*)-75\frac{\varphi^{**}}{\varphi}(f^2+f^*)+10\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^3+3ff^*+f^{**})-15(f^4+6f^2f^*+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})]+$$

$$+y'^6[\frac{8645}{243}\frac{\varphi^{*^5}}{\varphi^5}-\frac{8300}{81}\frac{\varphi^{*^3}\varphi^{**}}{\varphi^4}+\frac{400}{9}\frac{\varphi^{**^2}\varphi^*}{\varphi^3}+\frac{1250}{27}\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{***}}{\varphi^3}-\frac{125}{9}\frac{\varphi^{**}\varphi^{***}}{\varphi^2}-\frac{115}{9}\frac{\varphi^{****}\varphi^*}{\varphi^2}+$$

$$+\frac{5}{3}\frac{\varphi^{*****}}{\varphi}-\frac{6295}{81}\frac{\varphi^{*^4}}{\varphi^4}f+\frac{1280}{9}\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{**}}{\varphi^3}f-\frac{70}{3}\frac{\varphi^{**^2}}{\varphi^2}f-\frac{415}{9}\frac{\varphi^{***}\varphi^*}{\varphi^2}f+\frac{22}{3}\frac{\varphi^{****}}{\varphi}f+\frac{1340}{27}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}\times$$

$$\times(f^2+f^*)-\frac{170}{3}\frac{\varphi^{**}\varphi^*}{\varphi^2}(f^2+f^*)+\frac{35}{3}\frac{\varphi^{***}}{\varphi}(f^2+f^*)+\frac{20}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi}(f^3+3ff^*+f^{**})-\frac{95}{9}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}\times$$

$$\times(f^3+3ff^*+f^{**})-\frac{5}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^4+6f^2f^*+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})+(f^5+10f^3f^*+15ff^{*^2}+$$

$$+10f^2f^{**}+10f^*f^{**}+5ff^{***}+f^{****})]+6b_1\varphi\left\{y^{(5)}+y'y^{(4)}(\frac{7}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}+5f)+y''y'''(\frac{35}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}+\right.$$

$$+10f)+y'^2y'''[\frac{38}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{140}{9}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}+\frac{25}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}f+10(f^2+f^*)]+y'y''^2(22\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{70}{3}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}+20\frac{\varphi^*}{\varphi}f+$$

$$+15(f^2+f^*)]+y'^3y''[\frac{770}{27}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-\frac{145}{3}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+\frac{47}{3}\frac{\varphi^{***}}{\varphi}-45\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}f+35\frac{\varphi^{**}}{\varphi}f+10\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2+f^*)+$$

$$+10(f^3+3ff^8+f^{**})]-y'^5[\frac{455}{81}\frac{\varphi^{*^4}}{\varphi^4}-15\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{**}}{\varphi^3}+\frac{10}{3}\frac{\varphi^{**^2}}{\varphi^2}+\frac{65}{9}\frac{\varphi^*\varphi^{***}}{\varphi^2}-\frac{5}{3}\frac{\varphi^{****}}{\varphi}-\frac{365}{27}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}f+$$

$$+20\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}f-\frac{17}{3}\frac{\varphi^{***}}{\varphi}f+\frac{25}{3}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}(f^2+f^*)-6\frac{\varphi^{**}}{\varphi}(f^2+f^*)-\frac{2}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^3+3ff^*+f^{**})-$$

$$\left.-(f^4+6f^2f^*+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})]\right\}+15b_2\varphi^2\left\{y^{(4)}+y'y''(4f+\frac{11}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi})+y''^2(3f+\right.$$

$$+4\frac{\varphi^*}{\varphi})+y'^2y''[9\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-7\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}+10\frac{\varphi^*}{\varphi}f+6(f^2+f^*)]+y'^4[\frac{35}{27}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-\frac{10}{3}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+\frac{5}{3}\frac{\varphi^{***}}{\varphi}-$$

$$\left.-\frac{11}{3}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}f+4\frac{\varphi^{**}}{\varphi}f+2\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2+f^*)+(f^3+3ff^*+f^{**})]\right\}+20b_3\varphi^3\left\{y'''+y'y''(3f+\right.$$

$$\left.+4\frac{\varphi^*}{\varphi})+y'^3[\frac{5}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{5}{9}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}+\frac{7}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}f+(f^2+f^*)]\right\}+15b_4\varphi^4\left\{y''+y'^2(\frac{5}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}+f)\right\}+$$

$$+6b_5\varphi^5y'+\varphi^{10/3}exp(-\int fdy)[b_6\int\varphi^{8/3}exp(\int fdy)dy+\frac{c}{\beta}]=0. \tag{2.9}$$

При этом преобразованием

$$z=\beta\int\varphi^{8/3}\exp(\int fdy)dy,\quad dt=\varphi dx \tag{2.10}$$

оно приводится к линейному уравнению (2.2).

• Подставив (2.7) в уравнение (2.4) (где $\alpha=0$), положив $\varphi=u(y)$ и учтя, что $r_k,\ k=\overline{1,6}$ – корни характеристического уравнения (2.5), придем к (2.9). •

Специальный случай уравнения (2.9) получается при $\varphi = \exp(-3/8\int f dy)$, а именно преобразование (2.10) примет вид:

$$z = y, \qquad dt = \varphi dx,$$

т.е. в этом случае линеаризация осуществляется за счет преобразования независимой переменной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Таким образом, в силу теоремы 2.1 уравнения вида

$$y^{(6)} + \varphi_1 y' y^{(5)} + \varphi_2 y'' y^{(4)} + \varphi_3 y'''^2 + \varphi_4 y'^2 y^4 + \varphi_5 y' y'' y''' + \varphi_6 y''^3 + \varphi_7 y'^3 y''' + \varphi_8 y'^2 y''^2 +$$

$$+\varphi_9 y'^4 y'' + \varphi_{10} y^{(5)} + \varphi_{11} y' y^{(4)} + \varphi_{12} y'' y''' + \varphi_{13} y'^2 y''' + \varphi_{14} y' y''^2 + \varphi_{15} y'^3 y'' + \varphi_{16} y^{(4)} +$$

$$+\varphi_{17} y' y'' + \varphi_{18} y''^2 + \varphi_{19} y'^2 y'' + \varphi_{20} y''' + \varphi_{21} y' y'' + \varphi_{22} y'' + \sum_{k=0}^{6} f_k y'^k = 0$$

могут быть подвергнуты испытанию методом точной линеаризации. Этот класс уравнений можно еще более конкретизировать, а именно $\varphi_{10} = a\varphi,\ \varphi_{16} = b\varphi^2$, $\varphi_{20} = c\varphi^3,\ \varphi_{22} = d\varphi^4,\ f_1 = e\varphi^5$, где $a, b, c, d, e = const$.

ТЕОРЕМА 2.2. Уравнение (2.9) допускает при $c = 0$ однопараметрические семейства решений

$$\int \frac{\varphi^{5/3} \exp(\int f dy) dy}{\int \varphi^{8/3} \exp(\int f dy) dy} = r_k x + C, \tag{2.11}$$

где r_k – корни характеристического уравнения (2.5).

• Уравнение (2.3) примет вид:

$$[D - (\frac{v^*}{v} + 5\frac{u^*}{u})y' - r_6 u][D - (\frac{v^*}{v} + 4\frac{u^*}{u})y' - r_5 u][D - (\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u})y' - r_4 u]\times$$

$$\times[D - (\frac{v^*}{v} + 2\frac{u^*}{u})y' - r_3 u][D - (\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})y' - r_2 u][D - \frac{v^*}{v}y' - r_1 u]y = 0.$$

Любое решение уравнения 1–го порядка

$$(D - \frac{v^*}{v}y' - r_k u)y = 0, \quad k = 1,2,3,4,5,6 \tag{2.12}$$

является также решением всего уравнения. Подставляя в (2.12)

$$v(y) = \frac{y}{\beta\int \varphi^{8/3} exp(\int f dy) dy}, \quad u = \varphi$$

и решая его, получим (2.11). •

ПРИМЕР 2.1. Уравнение

$$y^{(6)} - \frac{10}{y}y' y^{(5)} - \frac{11}{y}y'' y^{(4)} + \frac{45}{y^2}y'^2 y^{(4)} - \frac{5}{y}y'''^2 - \frac{105}{y^3}y'^3 y''' + \frac{105}{y^4}y'^4 y'' + \frac{75}{y^2}y' y'' y''' -$$

$$-\frac{105}{y^3}y'^2 y''^2 + \frac{10}{y^2}y''^3 + 6b_1(y y^{(5)} - 6y' y^{(4)} - 5y'' y''' + \frac{15}{y}y'^2 y''' - \frac{15}{y^2}y'^3 y'' + \frac{10}{y}y' y''^2) +$$

$$+15b_2(y^2 y^{(4)} - 3y y' y''' + 3y'^2 y'' - y y''^2) + 20b_3(y^3 y''' - y^2 y' y'') + 15b_4 y^4 y'' + 6b_5 y^5 y' +$$

$$+\frac{1}{2}b_6 y^7 + \frac{1}{2}c y^6 = 0 \tag{2.13}$$

подстановкой (1.18) приводится к (2.2) и допускает при $c = 0$ однопараметрические семейства решений (1.19), где r_k – различные характеристические корни уравнения (2.5). Действительно, уравнение (2.13) при $c = 0$ допускает следующую факторизацию:

$$[D-\frac{4}{y}y'-r_6y][D-\frac{3}{y}y'-r_5y][D-\frac{2}{y}y'-r_4y][D-\frac{1}{y}y'-r_3y][D-r_2y][D+\frac{1}{y}y'-r_1y]y=0.$$

В качестве первого сомножителя справа можно взять любое выражение вида

$$(D+\frac{1}{y}y'-r_ky)y \equiv 2y'-r_ky^2=0,$$

где $r_k,\ k=\overline{1,6}$ – любой из корней характеристического уравнения (2.5).

В заключение рассмотрим два примера, линеаризуемые соответственно преобразованиями независимой и зависимой переменных.

ПРИМЕР 2.2 Уравнение

$$y^{(6)}-16\frac{\varphi^*}{\varphi}y'y^{(5)}-26\frac{\varphi^*}{\varphi}y''y^{(4)}+(126\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-25\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y'^2y^{(4)}-15\frac{\varphi^*}{\varphi}y'''^2+(350\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-79\frac{\varphi^{**}}{\varphi})\times$$

$$\times y'y''y'''+(70\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-18\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y''^3-(630\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-329\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+25\frac{\varphi^{***}}{\varphi})y'^3y'''-(1120\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-$$

$$-623\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+51\frac{\varphi^{***}}{\varphi})y'^2y''^2-(2030\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{**}}{\varphi^3}-2205\frac{\varphi^{*^4}}{\varphi^4}-266\frac{\varphi^*\varphi^{***}}{\varphi^2}-175\frac{\varphi^{**^2}}{\varphi^2}+16\frac{\varphi^{****}}{\varphi})\times$$

$$\times y'^4y''-(280\frac{\varphi^*\varphi^{**^2}}{\varphi^3}+210\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{***}}{\varphi^3}-1260\frac{\varphi^{*^3}\varphi^{**}}{\varphi^4}+945\frac{\varphi^{*^5}}{\varphi^5}-21\frac{\varphi^*\varphi^{****}}{\varphi^2}-35\frac{\varphi^{**}\varphi^{***}}{\varphi^2}+$$

$$+\frac{\varphi^{****}}{\varphi})y'^6+6b_1\varphi[y^{(5)}-11\frac{\varphi^*}{\varphi}y'y^{(4)}-15\frac{\varphi^*}{\varphi}y''y'''+(60\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-14\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y'^2y'''+(70\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-$$

$$-18\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y'y''^2-(210\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-125\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+11\frac{\varphi^{***}}{\varphi})y'^3y''-(105\frac{\varphi^{*^2}\varphi^{**}}{\varphi^3}-105\frac{\varphi^{*^4}}{\varphi^4}-15\frac{\varphi^*\varphi^{***}}{\varphi^2}-$$

$$-10\frac{\varphi^{**^2}}{\varphi^2}+\frac{\varphi^{****}}{\varphi})y'^4y'']+15b_2\varphi^2[y^{(4)}-7\frac{\varphi^*}{\varphi}y'y'''-4\frac{\varphi^*}{\varphi}y''^2+(25\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-7\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y'^2y''-(15\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3}-$$

$$-10\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2}+\frac{\varphi^{***}}{\varphi})y'^4]+20b_3\varphi^3(y'''-4\frac{\varphi^*}{\varphi}y'y'')++(3\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}-\frac{\varphi^{**}}{\varphi})y'^3]+15b_4\varphi^4[y''-\frac{\varphi^*}{\varphi}y'^2]+$$

$$+6b_5\varphi^5y'+b_6\varphi^6y=0$$

подстановкой $z=y,\ dt=\varphi dx$ приводится к (2.2).

ПРИМЕР 2.3. Уравнение

$$y^{(6)}+6f(y)y'y^{(5)}+15fy''y^{(4)}+10fy'''^2+15y'^2y^{(4)}(f^2+f^*)+60y'y''y'''(f^2+f^*)+15y''^3\times$$

$$\times(f^2+f^*)+20y'^3y'''(f^3+3ff^*+f^{**})+45y'^2y''^2(f^3+3ff^*+f^{**})+15y'^4y''(f^4+6f^2f^*+$$

$$+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})+y'^6(f^5+10f^3f^*+15ff^{*^2}+10f^2f^{**}+10f^*f^{**}+5ff^{***}+f^{****})+6b_1\times$$

$$\times\Big\{y^{(5)}+5fy'y^{(4)}+10fy''y'''+10y'^2y'''(f^2+f^*)+15y'y''^2(f^2+f^*)+10y'^3y''(f^3+3ff^8+$$

$$+f^{**})+y'^5(f^4+6f^2f^*+3f^{*^2}+4ff^{**}+f^{***})\}+15b_2\left\{y^{(4)}+4fy'y''+3fy''^2+6y'^2y''\times\right.$$
$$\left.\times(f^2+f^*)+y'^4(f^3+3ff^*+f^{**})\right\}+20b_3\left\{y'''+3fy'y''+y'^3(f^2+f^*)\right\}+$$
$$+15b_4\left\{y''+fy'^2\right\}+6b_5y'+exp(-\int fdy)[b_6\int exp(\int fdy)dy+\frac{c}{\beta}]=0$$

подстановкой

$$z=\beta\int\exp(\int fdy)dy,\quad dt=dx$$

приводится к линейному уравнению (2.2).

Литература

[1] Беркович Л.М., Орлова И.С. Точная линеаризация некоторых классов автономных обыкновенных дифференциальных уравнений//Вестник СамГУ. N 4(10), 1998. С.5–14.

[2] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка//Вестник СамГУ. Спецвыпуск, 1995. С. 6–14.

[3] Беркович Л.М. Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация//Доклады Академии наук, 1999, Т.368 N5. С.604-608.

[4] Orlova I.S. Point and nonpoint transformations of nonlinear ordinary differential equations//Intern.conf.MOGRAN 2000(Modern Group analysis for the new millenium).27sept–03oct 2000. Ufa, Russia. Abstracts P.56.

[5] Беркович Л.М. Факторизация и преобразование обыкновенных дифференциальных уравнений//Саратов:Изд-во Саратовск. ун-та, 1989, 192 с.

ON ONE METHOD OF AN EXACT LINEARIZATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS FIFTH AND SIXTH ORDERS

I. Orlova[2]

This article is a direct continuing of work [1], in which the method of an exact linearization [2] was applied. In [1] the non-linear autonomous ordinary differential equations 2-nd, 3-rd and 4-th orders were considered. In the present work the talk goes about equations 5-th and 6-th is ordinal. The illustrative examples are reduced. Some from obtained results were presented in [4].

[2]Irina Orlova, chair of algebra and geometry, Samara state university