ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Р.Е. Попович, В.Н. Бойко[1]

Предложен новый подход к построению дифференциальных инвариантов однопараметрической группы локальных преобразований в пространстве одной независимой и m зависимых переменных. Показано, что при известном универсальном инварианте полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов произвольного порядка такой группы можно построить с помощью одной квадратуры и дифференцирования. Проанализирована связь между дифференциальными инвариантами первого порядка и интегрированием уравнений Риккати.

Введение

Теория дифференциальных инвариантов является важной составной частью группового анализа дифференциальных уравнений. В частности, ее используют (в явном или неявном виде) при интегрировании в квадратурах или понижении порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, описании классов инвариантных дифференциальных уравнений [1–5]. В связи с технической сложностью построения полного набора дифференциальных инвариантов произвольного порядка особую роль в их теории играют различные варианты теоремы о конечном базисе дифференциальных инвариантов, которую нестрого можно сформулировать следующим образом: *для произвольной группы G локальных преобразований существует такой конечный набор дифференциальных инвариантов, что произвольный дифференциальный инвариант группы G является функцией этих инвариантов и их G-инвариантных производных.* Впервые подобное утверждение (для однопараметрической группы локальных преобразований в пространстве двух переменных) получено еще С. Ли в конце XIX в. [1] (см. также [2, 4]) и вскоре существенно обобщено А. Трессом [6]. Дальнейшее развитие теории дифференциальных инвариантов связано с работами Л.В. Овсянникова [3] и П. Олвера [7–10], где введены понятия оператора инвариантного дифференцирования, совокупности независимых контактно-инвариантных дифференциальных форм и др., а также получены результаты о стабилизации ранга продолженного действия группы и оценки количества дифференциальных инвариантов.

[1]Попович Роман Емельянович, Бойко Вячеслав Николаевич. Институт математики НАН Украины

В данной работе изучаются дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований в пространстве одной независимой и m зависимых переменных ($m \in \mathbf{N}$). Обобщена теорема Ли о дифференциальных инвариантах однопараметрической группы локальных преобразований, а именно: доказано, что при известном универсальном инварианте полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов произвольного порядка такой группы можно построить с помощью одной квадратуры и дифференцирования. В статье также проанализирована связь между дифференциальными инвариантами первого порядка и интегрированием уравнений Риккати.

1. Обобщение теоремы Ли о дифференциальных инвариантах

Пусть $Q = \xi(x,u)\partial_x + \eta^i(x,u)\partial_{u^i}$ — инфинитезимальный оператор однопараметрической группы G локальных преобразований, действующей на множестве $\mathcal{M} \subset \mathcal{J}_{(0)} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, где $\mathcal{X} \simeq \mathbf{R}$ — пространство независимой переменной x и $\mathcal{U} \simeq \mathbf{R}^m$ — пространство зависимых переменных $u = (u^1, u^2, \dots u^m)$, $G^{(n)}$ — продолжение действия группы G на подмножество $\mathcal{M}_{(n)} = \mathcal{M} \times \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)} \times \dots \times \mathcal{U}^{(n)}$ продолженного пространства $\mathcal{J}_{(n)} = X \times \mathcal{U}_{(n)}$ струй n-го порядка над пространством $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ (здесь $\mathcal{U}_{(n)} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)} \times \dots \times \mathcal{U}^{(n)}$), $n \geq 1$, $Q^{(n)}$ — n-е продолжение оператора Q (см. [4]). Дифференциальным инвариантом n-го порядка группы G (или оператора Q) называется функция $I\colon \mathcal{M}_{(n)} \to \mathbf{R}$, являющаяся инвариантом продолженного действия $G^{(n)}$. Для того чтобы функция I была дифференциальным инвариантом n-го порядка группы G, необходимо и достаточно выполнение соотношения $Q^{(n)} I = 0$.

Здесь и далее индексы i, j, k, l изменяются от 1 до m. По повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^m(x,u))$ — полный набор функционально независимых инвариантов (или *универсальный инвариант* [3]) оператора Q, а $J(x,u)$ — частное решение уравнения $QJ = 1$. Тогда функции $I^1(x,u)$, $I^2(x,u)$, $\dots$, $I^m(x,u)$ и $J(x,u)$ — функционально независимы. Выполним локальную замену переменных: $y = J(x,u)$ — новая независимая переменная и $v^k = I^k(x,u)$ — новые зависимые переменные. В переменных y и $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$ оператор Q имеет вид ∂_y. Следовательно, для произвольного $n \geq 1$ вид продолженного оператора $Q^{(n)}$ совпадает с $Q = \partial_y$, поэтому

$$v, \quad v' = \left(\frac{dv^1}{dy}, \frac{dv^2}{dy}, \dots, \frac{dv^m}{dy}\right), \quad v'' = \left(\frac{d^2v^1}{dy^2}, \frac{d^2v^2}{dy^2}, \dots, \frac{d^2v^m}{dy^2}\right), \quad \dots,$$
$$v^{(n)} = \left(\frac{d^nv^1}{dy^n}, \frac{d^nv^2}{dy^n}, \dots, \frac{d^nv^m}{dy^n}\right)$$

образуют полный набор его функционально независимых инвариантов, т.е. $v_{(n)} = (v, v', v'', \dots, v^{(n)})$ — универсальный инвариант группы $G^{(n)}$. (Функциональная независимость v, v', v'', $\dots$, $v^{(n)}$ очевидна, поскольку $(y, v_{(n)})$ является набором переменных в пространстве $\mathcal{J}_{(n)}$.) Это значит, что v — фундаментальный набор дифференциальных инвариантов оператора Q, т.е. произвольный дифференциальный инвариант оператора Q можно представить как функцию от v и производных v по оператору G-инвариантного дифференцирования, который совпадает здесь с оператором $D_y = \partial_y + v^i_y \partial_{v^i} + v^i_{yy} \partial_{v^i_y} + \cdots$ полной производной по переменной y.

Возвратимся к старым переменным. Учитывая равенство

$$D_y = \frac{1}{D_x J} D_x,$$

сразу получим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^m(x,u))$ *— универсальный инвариант оператора* Q, $J(x,u)$ *— частное решение уравнения* $QJ = 1$. *Тогда функции*

$$I^k(x,u), \qquad \left(\frac{1}{D_x J} D_x\right)^p I^k(x,u), \quad p = \overline{1,n}$$

образуют полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов (или универсальный дифференциальный инвариант) n*-го порядка оператора* Q.

Следствие 1. *Для произвольного оператора* Q *существует полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов* n*-го порядка, в котором каждый инвариант является рациональной функцией переменных* u^k_x, u^k_{xx}, ..., $(u^k)^{(n)}$ *продолженного пространства с коэффициентами, зависящими от* x *и* u^k.

Из теоремы 1 при $m = 1$ можно легко получить результат С. Ли о дифференциальных инвариантах однопараметрической группы преобразований в пространстве двух переменных (см. [1–4]).

Следствие 2. *Пусть* $I(x,u)$ *и* $V(x,u,u_x)$ *— дифференциальные инварианты нулевого и строго первого (т.е.* $\partial V/\partial u_x \neq 0$*) порядка оператора* $Q = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$. *Тогда функции*

$$I, \quad V, \quad \frac{d^p V}{dI^p} = \left(\frac{1}{D_x I} D_x\right)^p V, \quad p = \overline{1, n-1},$$

где $D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + \dots$ *— оператор полной производной по переменной* x, *образуют полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов* n*-го порядка оператора* Q.

Отметим, что если известен универсальный инвариант I оператора Q, то частное решение уравнения $QJ = 1$ можно найти с помощью одной квадратуры. Например, в случае $\xi \neq 0$ таким решением будет $J(x,u) = \int dx/\xi(x, U(x,C))$, где $u = U(x,C)$ — решение системы алгебраических уравнений $I(x,u) = C := (C_1, C_2, \dots, C_m)$ относительно переменных u, а после интегрирования необходимо выполнить обратную подстановку $C = I(x,u)$. Аналогично, если $\eta^k \neq 0$ для некоторого k, то можно положить $J(x,u) = \int du^k/\eta^k(X, U^1, \dots, U^{k-1}, u^k, U^{k+1}, \dots, U^m)$ (суммирование по k здесь не производится), где $x = X(u^k, C)$, $u^i = U^i(u^k, C)$, $i \neq k$ — решение системы алгебраических уравнений $I(x,u) = C$ относительно переменных x, u^i, $i \neq k$.

Пример 1. Пусть $m = 1$, а $G = \mathrm{SO}(2)$ — группа поворотов, действующая на $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \simeq \mathbf{R}^2$, с инфинитезимальным оператором $Q = u\partial_x - x\partial_u$ (см. для сравнения [4]). $I = \sqrt{x^2 + u^2}$ — инвариант группы G (оператора Q), отсюда $U(x,C) = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$. Тогда

$$J = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm \arcsin \frac{x}{C} = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + u^2}}$$

(здесь константа интегрирования взята равной 0), откуда

$$V = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{x + u u_x}{-u + x u_x} \sqrt{x^2 + u^2}, \quad \text{или} \quad \widetilde{V} = \frac{x + u u_x}{-u + x u_x}$$

— дифференциальный инвариант первого порядка оператора Q.

Таким образом, *если найден универсальный инвариант оператора Q, то полный набор его функционально независимых дифференциальных инвариантов произвольного порядка можно построить с помощью одной квадратуры и дифференцирования.*

2. Дифференциальные инварианты первого порядка

Рассмотрим подробнее дифференциальные инварианты первого порядка. Из теоремы 1 следуют такие утверждения.

Утверждение 1. *Если $I = (I^1(x,u), I^2(x,u), \ldots, I^m(x,u))$ — универсальный инвариант оператора Q и $J = J(x,u)$ — частное решение уравнения $QJ = 1$, то функции*

$$I^k_{(1)} = I^k_{(1)}(x, u_{(1)}) = \frac{dI^k}{dJ} = \frac{D_x I^k}{D_x J} = \frac{I^k_x + I^k_{u^i} u^i_x}{J_x + J_{u^j} u^j_x}$$

образуют полный набор функционально независимых дифференциальных инвариантов строго первого порядка оператора Q.

Следствие 3. *Компоненты строго первого порядка универсального дифференциального инварианта оператора Q можно искать в виде дробно-линейных функций переменных u^k_x продолженного пространства с коэффициентами, зависящими от x и u^k.*

Для переформулировки утверждения 1 введем новое понятие.

Определение. *Дифференциал $dW(x,u)$ будем называть инвариантным относительно группы G (оператора Q), если он не изменяется под действием преобразований из группы G.*

Введенное понятие инвариантного дифференциала является частным случаем более общего понятия контактно-инвариантной дифференциальной формы первого порядка в продолженном пространстве [8].

Необходимым и достаточным условием инвариантности дифференциала является равенство $dQW(x,u) = 0$. Возможны два принципиально разных случая:

1) функция $W(x,u)$ — инвариант оператора Q, т.е. $QW(x,u) = 0$; дифференциал $dW(x,u)$ автоматически будет инвариантным относительно оператора Q (*инвариантный дифференциал первого рода*);

2) функция $W(x,u)$ не является инвариантом оператора Q, но дифференциал $dW(x,u)$ инвариантен относительно оператора Q (*инвариантный дифференциал второго рода*); тогда $QW(x,u)$ — ненулевая постоянная.

Утверждение 2. *Отношение инвариантных дифференциалов оператора Q первого и второго рода является его дифференциальным инвариантом строго первого порядка. Если dI^1, dI^2, $\ldots$, dI^m образуют полный набор независимых инвариантных дифференциалов оператора Q первого рода, то их отношения с его инвариантным дифференциалом второго рода исчерпывают функционально независимые дифференциальные инварианты строго первого порядка оператора Q.*

Если известен некоторый набор функций $I^k(x,u)$ и $J(x,u)$, задающих универсальный инвариант и инвариантный дифференциал второго рода оператора Q соответственно, то все такие наборы, очевидно, можно найти по формулам

$$\hat{I}(x,u) = F(I(x,u)), \qquad \hat{J}(x,u) = J(x,u) + H(I(x,u)),$$

где $F = (F^1, F^2, \dots, F^m)$ и H — дифференцируемые функции своих переменных, $|\partial F/\partial I| \neq 0$. Эти формулы определяют отношение эквивалентности Ω на множестве $\mathcal{N}$ наборов из $m+1$ гладких функций от $m+1$ переменных с ненулевым якобианом. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначим как $\mathcal{N}/\Omega$.

Утверждение 3. *Между множествами $\mathcal{N}/\Omega$ и $\{Q\}$ существует взаимнооднозначное соответствие: совокупность $\{(I^k(x,u);\ J(x,u))\}$ решений системы $QI^k = 0$, $QJ = 1$ является элементом множества $\mathcal{N}/\Omega$, и наоборот, если $(I^k(x,u); J(x,u))$ — некоторый представитель класа эквивалентности из $\mathcal{N}/\Omega$, то система $QI^k = 0$, $QJ = 1$ является определенной системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов соответствующего оператора Q.*

3. Стандартный подход и интегрирование уравнений Риккати

Операторы G-инвариантного дифференцирования в случае одной независимой переменной традиционно ищутся в виде

$$\mathcal{D} = \frac{1}{D_x I^0} D_x,$$

где I^0 — дифференциальный инвариант группы G. Поэтому для построения универсального дифференциального инварианта произвольного порядка однопараметрической группы локальных преобразований с помощью оператора G-инвариантного дифференцирования такого вида необходимо найти $m+1$ функционально независимых дифференциальных инвариантов группы G минимально возможного порядка, т.е. m функционально независимых дифференциальных инвариантов нулевого порядка (или просто инвариантов) и один дифференциальный инвариант строго первого порядка. Дифференциальный инвариант $I^1_{(1)}$ строго первого порядка находится как инвариант первого продолжения

$$Q^{(1)} = \xi\partial_x + \eta^i\partial_{u^i} + (\eta^i_x + \eta^i_{u^j}u^j_x - \xi_x u^i_x - \xi_{u^j}u^j_x u^i_x)\partial_{u^i_x}$$

оператора Q, т.е. как первый интеграл соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{du^k}{\eta^k} = \frac{du^k_x}{\eta^k_x + \eta^k_{u^j}u^j_x - \xi_x u^k_x - \xi_{u^j}u^j_x u^k_x}, \qquad \exists\, l\colon \quad \frac{\partial I^1_{(1)}}{\partial u^l_x} \neq 0 \tag{1}$$

(суммирования по k здесь нет, нижние индексы функций обозначают дифференцирование по соответствующим переменным). Интегрирование системы (1), как правило, является технически сложной задачей. При известном универсальном инварианте $I(x,u)$ оператора Q оно сводится к интегрированию системы уравнений типа Риккати вида

$$\frac{dv^k}{dx} = -\frac{\xi_{u^j}}{\xi}v^k v^j + \frac{\eta^k_{u^j}}{\xi}v^j - \frac{\xi_x}{\xi}v^k + \frac{\eta^k_x}{\xi}\,\Bigg|_{u=U(x,C)}, \tag{2}$$

если $\xi \neq 0$, или

$$\frac{dv^k}{du^i} = -\frac{\xi_{u^j}}{\eta^i}v^k v^j + \frac{\eta^k_{u^j}}{\eta^i}v^j - \frac{\xi_x}{\eta^i}v^k + \frac{\eta^k_x}{\eta^i}\ \Bigg|_{x=X(u^i,C),\ u^l=U^l(u^i,C),\ l\neq i}, \qquad (3)$$

если $\eta^i \neq 0$ для некоторого фиксированного i. Здесь $u = U(x,C)$ и $x = X(u^i,C)$, $u^l = U^l(u^i,C)$, $l \neq i$ — решения системы алгебраических уравнений $I(x,u) = C$ относительно переменных u и $x, u^l, l \neq i$ соответственно. Константы $C = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ в системах (2) и (3) считаются параметрами. Случай $\eta^i \neq 0$ сводится к случаю $\xi \neq 0$ с помощью преобразования годографа ($x \leftrightarrow u^i$, а также $\xi \leftrightarrow \eta^i$, $v^i \to 1/v^i$ и $v^l \to -v^l/v^i$, $l \neq i$). Поэтому далее подробно рассматривается только случай $\xi \neq 0$.

Предложенный в утверждении 1 способ нахождения дифференциальных инвариантов строго первого порядка в отличие от стандартного метода позволяет обойти прямое интегрирование системы уравнений типа Риккати (2) или (3) и найти решение задачи с помощью одной квадратуры и дифференцирования. Это значит, что *при известном универсальном инварианте $I(x,u)$ оператора Q системы (2) и (3) всегда интегрируются одной квадратурой*. Действительно, так как $u = U(x,C)$ — общее решение системы $u^k_x = \eta^k(x,u)/\xi(x,u)$, то легко проверить, что $v = U_x(x,C)$ — частное решение системы (2) (здесь, как и в (2), C — набор параметров). Общее решение системы (2) имеет вид

$$v = -(I_u - \widetilde{C}\otimes J_u)^{-1}\cdot(I_x - \widetilde{C}J_x)\Big|_{u=U(x,C)} = U_z + U_C(E - \widetilde{C}\otimes J_C)^{-1}\widetilde{C}J_z$$

(в последнем равенстве произведена подстановка $x = z$, $u = U(z,C)$), где E — единичная матрица размера $m\times m$, $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_m)$ — произвольные константы, $I_u = (I^k_{u^l})$, $\widetilde{C}\otimes J_u = (\widetilde{C}^k J_{u^l})$, $I_x = (I^k_x)$, $\widetilde{C}\otimes J_C = (\widetilde{C}^k J_{C^l})$, $U_z = (U^k_z)$, $U_C = (U^k_{C^l})$. Обратная матрица к $I_u - \widetilde{C}\otimes J_u$ всегда существует при достаточно малых $\widetilde{C}^k$, поскольку $\det I_u \neq 0$.

Остановимся подробнее на случае одной зависимой переменной ($m = 1$). В этом случае первое продолжение оператора $Q = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$ и характеристическая система (1) имеют соответственно вид

$$Q^{(1)} = \xi\partial_x + \eta\partial_u + (\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2)\partial_{u_x},$$

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{du}{\eta} = \frac{du_x}{\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2}. \qquad (4)$$

Если известен инвариант $I(x,u)$ оператора Q, то задача интегрирования системы (4) сводится, в общем случае, к интегрированию уравнения Риккати (как уже отмечалось, можно предполагать, что $\xi \neq 0$)

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\xi_u}{\xi}v^2 + \frac{\eta_u - \xi_x}{\xi}v + \frac{\eta_x}{\xi}\ \Bigg|_{u=U(x,C)}, \qquad (5)$$

где $u = U(x,C)$ — решение алгебраического уравнения $I(x,u) = C$ относительно переменной u, константа C считается параметром.

Выполнив в (5) подстановку $x = z$, $u = U(z,C)$, приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\xi}\left[-\frac{\xi_C}{U_C}v^2 + \left(\frac{\eta_C}{U_C} - \xi_z + \xi_C\frac{U_z}{U_C}\right)v + \eta_z - \eta_C\frac{U_z}{U_C}\right]. \qquad (6)$$

Так как $u = U(z, C)$ — общее решение уравнения $u_z = \eta(z,u)/\xi(z,u)$, то легко проверить, что $v = U_z(z, C)$ (здесь, как и в (6), C — параметр) — частное решение уравнения (6). Общее решение уравнения (5) (или (6)) имеет вид

$$v = -\frac{J_x + \widetilde{C} I_x}{J_u + \widetilde{C} I_u}\bigg|_{u=U(x,C)} = U_z - \frac{J_z U_C}{J_C + \widetilde{C}},$$

где J — частное решение уравнения $QJ = 1$, $\widetilde{C}$ — произвольная константа.

Пример 2. Пусть $Q = \exp(-x-u)(\partial_x + u\partial_u)$. $I(x,u) = u\exp(-x)$ — инвариант оператора Q, откуда $U(x, C) = C\exp(x)$. Тогда

$$J = \int \frac{dx}{\exp(-x - C\exp(x))} = \frac{1}{C}\exp(C\exp(x)) = \frac{\exp(x+u)}{u}$$

(здесь константа интегрирования взята равной 0), а поэтому

$$V = \frac{\exp(-2x-u)u^2(u_x - u)}{u + uu_x - u_x} \quad \text{или} \quad \widetilde{V} = \frac{u_x - u}{u + uu_x - u_x}\exp(-u)$$

является дифференциальным инвариантом первого порядка оператора Q.

Уравнение (5) для данного оператора имеет вид

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + (2 - C\exp(x))v - C\exp(x).$$

Функция $v = C\exp(x)$ является его частным решением, а общее решение этого уравнения Риккати задается формулой

$$v = C\exp(x) - \frac{C^2\exp(2x)}{C\exp(x) - 1 + \widehat{C}\exp(-C\exp(x))},$$

где $\widehat{C}$ — произвольная константа.

Пример 3. Пусть $Q = xu(x\partial_x + ku\partial_u)$, $k \in \mathbf{R}$. $I(x,u) = ux^{-k}$ — инвариант оператора Q, откуда $U(x, C) = Cx^k$. Тогда

$$J = \int \frac{dx}{Cx^{k+2}} = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{C} = \dfrac{\ln x}{xu}, & \text{если } k = -1, \\[2ex] -\dfrac{1}{C(k+1)x^{k+1}} = -\dfrac{1}{(k+1)xu}, & \text{если } k \neq -1 \end{cases}$$

(здесь константа интегрирования взята равной 0). Соответствующее уравнение Риккати имеет вид

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{Cx^k}v^2 + \frac{2(k-1)}{x}v + kCx^{k-2}.$$

Функция $v = kCx^{k-1}$ является частным решением этого уравнения, а его общее решение задается формулой

$$v = -\frac{C}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\widehat{C} - \ln x}\right), \quad \text{если } k = -1, \quad \text{или}$$

$$v = Cx^{k-1}\left(k - \frac{k+1}{1 + \widehat{C}x^{k+1}}\right), \quad \text{если } k \neq -1,$$

где $\widehat{C}$ — произвольная константа.

Заключение

Таким образом, нахождение дифференциальных инвариантов однопараметрической группы G локальных преобразований в пространстве с одной независимой переменной сводится к построению универсального инварианта группы G. Приведенное доказательство теоремы 1 не является существенно чувствительным к количеству независимых переменных и допускает обобщение на некоторые классы многопараметрических групп локальных преобразований (или алгебр Ли дифференциальных операторов).

Литература

[1] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. Leipzig: B.G. Teubner, 1891. 568 s.

[2] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. 48 с.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[4] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

[5] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка, 1989. 336 с.

[6] Tresse A. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. 1894. **18**. P. 1–88.

[7] Olver P.J. Differential invariants and invariant differential equations // Lie Groups and their Appl. 1994. **1**. P. 177–192.

[8] Olver P.J. Differential invariants // Acta Applicandae Math. 1995. **41**. P. 271–284.

[9] Olver P.J. Equivalence, Invariants, and Symmetry. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 541 p.

[10] Olver P.J. Pseudo-stabilization of prolonged group actions. I. The order zero case // J. Nonlin. Math. Phys. 1997. **4**, N 3–4. P. 271–277.

DIFFERENTIAL INVARIANTS of ONE-PARAMETER GROUP of LOCAL TRANSFORMATION and INTEGRABLE RICCATI EQUATIONS

R.O. Popovych, V.M. Boyko[2]

A new tool to construction of differential invariants for a one-parameter group of local transformations in the space of one independent and m dependent variables is proposed. It is proved that if its universal invariant is known then the complete set of functionally independent differential invariants can be constructed via one quadrature and differentiation. Relation of first-order differential invariants to Riccati equations is analysed.

[2]Popovych Roman O., Boyko Vyacheslav M., Institute of Mathematics of NAS Ukraine, 3 Tereshchenkivs'ka Str., 01601 Kyiv 4, Ukraine, E-mail: rop@imath.kiev.ua, boyko@imath.kiev.ua