НЕЛИНЕЙНЫЕ ТРАЕКТОРИИ РЕДЖЕ В РЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЯХ ПРОТЯЖЁННЫХ ЧАСТИЦ

С.В. Талалов[1]

В работе рассмотрена динамическая система, эквивалентная при классическом описании некоторой $4D$ спиновой струне, однако отличная от неё на квантовом уровне. Система имеет характеристики, интерпретируемые как масса $\mathbf{M}$, спин $\mathbf{S}$, изотопический спин $\mathbf{I}$ и заряд $\mathbf{Q}$. Полученная зависимость $\mathbf{S} = a(\mathbf{M}^2)$ ("траектории Редже") является, вообще говоря, нелинейной. Рассмотрены простейшие примеры.

Введение

Попытки теоретического осмысления свойств наблюдаемых адронов приводили к созданию различных содержательных концепций. Одна из них – это построение амплитуды рассеяния $A(s,t)$ по некоторым её свойствам, которые заранее постулируются. Так, накопленный к началу 60-х годов экспериментальный материал по свойствам различных реакций свидетельствовал о возможности описания одной и той же функцией $A(s,t)$ как прямого канала $A+B \to C+D$, так и "перекрёстных": $A+\overline{C} \to \overline{B}+D$, $A+\overline{D} \to \overline{B}+C$, где $\overline{C}$, $\overline{B},\ldots$ – частицы, зарядово-сопряженные к соответствующим частицам $C, B, \ldots$. При определённых предположениях об аналитичности и асимптотическом поведении функции $A(s,t)$ отсюда следует принцип дуальности [1], согласно которому процесс эквивалентным образом может быть описан либо с помощью реджевских полюсов t-канала, либо с помощью реджевских полюсов s-канала. Математическим выражением данного принципа является "перекрёстное" разложение амплитуды:

$$A(s,t) = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s)-n} = \sum_m \frac{g_m(s)}{\alpha(t)-m}\,.$$

Функция $l = \alpha(p^2)$ – "траектория Редже" – имеет смысл зависимости полного момента частицы от квадрата её полной энергии. Определение явного вида этой зависимости является важной физической задачей [1]. Это обусловлено, в частности, такой хорошо известной точкой зрения [2]: "*... траектории в любом одном канале в*

[1]Талалов Сергей Владимирович. Кафедра общей и теоретической физики Тольяттинского филиала Самарского государственного педагогического университета.

принципе определяют всю амплитуду". Так, например, если сделать дополнительное предположение о линейности зависимости

$$\alpha(p^2) = \alpha' p^2 + \alpha(0),$$

где наклон α' и интерсепт $\alpha(0)$ постоянные величины, восстановление функции $A(s,t)$ приводит к известной амплитуде Венециано. Как следствие постулата о форме траекторий, спектр модели эквидистантный и содержит бесконечное число резонансов с нулевой шириной (распада). Вскоре было обнаружено, что подобный спектр генерируется квантовой теорией одномерного протяжённого объекта – струны Намбу - Гото. Заметим, что существование динамической системы, приводящей к линейному Редже-спектру, является важным логическим звеном в обосновании теории Венециано: последняя не отвечает на вопрос, почему траектории линейны. Геометрическая естественность действия релятивистской струны (которое выбирается пропорциональным площади мирового листа) говорит, в частности, о том, что такой объект представляет и самостоятельный интерес вне связи с дуально-резонансными моделями. Это подтверждается последующим бурным развитием теории (см., например, [3-6]. Отметим, что одними из главных мотивов, стимулирующих развитие теории струн, является ограниченность применения квантовой хромодинамики расстояниями $x \ll \Lambda_{QCD}^{-1}$, а также остающийся в рамках КХД открытым вопрос о происхождении масс кварков.

Общепринятая гамильтонова формулировка классической струнной динамики предполагает выбор исходных струнных полей $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ и $\Psi_i^\mu(\xi^0, \xi^1)$ в качестве независимых координат конфигурационного пространства $\mathcal{Q}$. Соответствующие сопряженные переменные $P_\mu(\xi^0, \xi^1)$ и $\Pi_{i\mu}(\xi^0, \xi^1)$, определяемые стандартным образом, параметризуют вместе с переменными X и Ψ фазовое пространство $\mathcal{H}_s = T^*\mathcal{Q}$, являющееся кокасательным расслоением конфигурационного [7]. Каноническое квантование стандартных гамильтоновых переменных, параметризующих фазовое пространство $\mathcal{H}_s$, приводит к целому ряду проблем [4-5]. Например, оказывается, что (квантовая) алгебра генераторов группы движений пространства-времени E_D замыкается, вообще говоря, при $D > 4$. Данный результат справедлив при использовании различных способов построения квантовой теории струны, основывающихся на фазовом пространстве $\mathcal{H}_s$. Здесь следует отметить, что рассматриваемая теория представляет собой классический пример динамической системы с бесконечным числом связей первого рода. Классическая и квантовая динамика таких систем вызывала, начиная с пионерских работ Дирака, неослабевающий интерес [8-10]. Кроме аномальных размерностей, в квантовом спектре многих струнных моделей содержатся тахионы, что, конечно, также осложняет физическую интерпретацию получаемых результатов.

Появление в той или иной теории дополнительных пространственно-временных измерений вступает в явное противоречие с четырехмерностью окружающего мира, которая в настоящее время считается надежно установленным экспериментальным фактом. Так, например, расчеты сечений наблюдаемых процессов в рамках ортодоксальной квантовой теории поля (в первую очередь, в рамках стандартной модели, объединяющей в себе квантовую хромодинамику и модель Вайнберга - Салама) существования каких-либо "лишних" измерений не требуют. Попытка избежать противоречия связана здесь с возрождением идей Калуцы о ненаблюдаемости дополнительных измерений, по крайней мере, при энергиях, достижимых современными ускорителями. Такая ситуация возможна, например, если считать, что $D > 4$-мерное пространство-время имеет топологическую структуру $E_{1,3} \times K$, где K – некоторое компактное многообразие планковских размеров, имеющее специальные топологические свойства. Как было установлено, в качестве K должно быть выбрано многообразие Калаби - Яо – трёхмерное комплексное многообразие с Риччи-плоской метрикой Кэлера. Между тем струнные модели, предсказывающие критические значения размерности $D > 4$, формулируются изначально для плоского линейного векторного пространства E_D. Компактификация же $E_D \to E_{1,3} \times K$ вводится "вручную" и не следует из каких-либо динамических уравнений (краткое обсуждение этого вопроса можно найти в книге [5]). Уместно также отметить, что теория точечной релятивистской частицы в пространстве $E_{1,3}$ существует, как известно, без всяких предположений о дополнительных измерениях [11].

Вышесказанное питало и продолжает питать поиски содержательной квантовой теории струн, существующей непосредственно в четырехмерном пространстве-времени. К настоящему времени различными авторами построен целый ряд таких струнных моделей. Не делая здесь соответствующего литературного обзора, отметим лишь некоторые. Один из первых, по-видимому, подходов к решению данной проблемы был предложен Рорлихом [12]. В работе [13] теория бозонной струны в четырехмерном пространстве-времени строилась с использованием метода обратной задачи рассеяния [14]. В рамках предложенного подхода впервые, по-видимому, была высказана идея такого способа параметризации исходного фазового пространства $\mathcal{H}_s$, при котором "внешние" переменные, описывающие движение струны как целого, отделяются от некоторых "внутренних" переменных.

Отдельное направление теории струн с некритическими размерностями пространства-времени было положено работой [15], в которой существование подобных объектов связывалось с построением содержательной квантовой теории известного уравнения Лиувилля $\ddot{\varphi} - \varphi^{''} + 2\exp\varphi = 0$.

Широкий спектр разнообразных работ, посвященных теории струн в пространстве $E_{1,3}$ и выполненных в различные периоды, свидетельствует о следующих обстоятельствах. Во-первых, тот факт, что квантовая теория простого и понятного объекта – кривой, вложенной в евклидово пространство E_D, может существовать лишь при нефизических значениях размерности D, вызывал и вызывает неудовлетворенность определенной части исследователей. Такая неудовлетворенность лишь усиливается уже упоминавшимся отсутствием каких-либо экспериментальных подтверждений существования дополнительных измерений пространства-времени. Во-вторых, существующее здесь разнообразие подходов говорит о том, что проблема, по-видимому, не нашла своего окончательного решения.

Как и при описании иных динамических систем, построение квантовой теории струны требует предварительной гамильтонизации ее классических уравнений движения. В большинстве работ, посвященных теории струн, явно или неявно предполагается описание гамильтоновой динамики в терминах "канонического" фазового пространства $\mathcal{H}_s$, часть координат которого ("импульсы") определяется при помощи лагранжиана. Между тем фундаментальность гамильтонова формализма, его первичность в общем случае по отношению к лагранжеву описанию динамики не раз отмечалась, например Дираком [16], а также Березиным [17]. Более того, возможность выбора иной гамильтонизации уравнений движения рассматривалась Дираком как обстоятельство, которое может быть использовано для совершенствования тех или иных теорий. Он прямо писал, что *"все существующие теории взаимодействия частиц и полей неудовлетворительны с точки зрения одного или другого. Несовершенство вполне могло бы возникнуть из-за использования для представления атомных явлений неправильных динамических систем, т.е. неверных гамильтониа-*

нов и неверных энергий взаимодействия. Поэтому приобретает большое значение предложение новых динамических систем и рассмотрение того, не будут ли они лучше описывать атомный мир“ [16, с.286]. Действительно, всякая динамическая система, моделирующая реальные частицы, должна иметь (квантовый) спектр масс, согласованный со спектром масс наблюдаемых адронов, по крайней мере в целом. Между тем стандартный струнный спектр, описывающийся линейными траекториями Редже, объясняет наблюдаемые массы большинства резонансов хорошо [18], но лишь приближенно, не учитывая ряда моментов. *Во-первых,* адронная спектроскопия располагает в настоящее время информацией о семействах частиц с ”экзотической“ зависимостью массы от спина, в частности, о таких семействах, траектории которых имеют нестандартные наклоны $\alpha_c \neq 0.9$Гэв$^{-2}$ [19, 20]. *Во-вторых,* факт линейности траектории $s = \alpha(\mu^2)$ означает, как хорошо известно, наличие у резонанса нулевой ширины распада [1]. С другой стороны, линейность траектории Редже соответствует линейному потенциалу межкваркового взаимодействия. Для более точного феноменологического описания наблюдаемых частиц, рассматриваемых как связанные состояния кварков, соответствующий потенциал необходимо считать нелинейным на малых расстояниях [21], что и приводит к ”загибу“ траекторий. Что же касается наклона асимптотик, то различные типы потенциалов приводят, вообще говоря, к различным его значениям [22]. В этой связи уместно отметить также работу [23], в которой в рамках потенциальной кварковой модели исследованы (нелинейные) реджевские траектории тяжелых кваркониев, которые затем сопоставлены с имеющимися экспериментальными фактами. В данной статье, в частности, делался такой вывод: траектории почти линейны для серии высших возбужденных состояний и существенно нелинейны в области малых масс и спинов. Другой пример: в работах [24] получены хорошо согласующиеся с экспериментом формулы, которые связывают массы как мезонов, так и барионов, содержащих тяжелые кварки. При этом предполагалось, что наклоны ${\alpha'}_{ij}$ траекторий семейств мезонов и барионов, которые отвечают комбинациям кварков $''i, j, \dots$“, различны и связаны некоторым соотношением.

Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод: *построение и исследование релятивистских динамических систем, имеющих спектр масс более богатый, чем стандартный струнный спектр, представляет интерес с точки зрения приложений к физике частиц.* Цель предлагаемой работы – завершить построение динамической системы с бесконечным числом степеней свободы такой, что:

- ⋆ система локализована в конечной области $4D$ пространства - времени;
- ⋆ соответствующая теория является Пуанкаре - инвариантной как на классическом, так и на квантовом уровнях;
- ⋆ система имеет характеристики, интерпретируемые (в квантовом случае) как масса $\mathbf{M}$, спин $\mathbf{S}$, изотопический спин $\mathbf{I}$ и заряд $\mathbf{Q}$;
- ⋆ в области больших значений величин $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}^2$ теория имеет реджевский спектр струнного типа $\mathbf{S} \simeq \alpha_n \mathbf{M}^2$ с различными, вообще говоря, наклонами α_n;
- ⋆ зависимость $\mathbf{S} = \alpha(\mathbf{M}^2)$ является нелинейной в области малых значений величин $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}^2$.

Отдельные этапы выполнены ранее в ряде работ автора, например [25-30]. Там же можно найти некоторые детали и доказательства, в тех случаях, когда они здесь не приводятся.

Предложенная в работе динамическая система на классическом уровне эквивалентна некоторой специальной модели открытой $4D$ спиновой струны. На квантовом уровне такая эквивалентность отсутствует, что приводит, вполне естественно, к спектру, отличному от струнного. В определённом смысле итоговую квантовую теорию можно рассматривать как обобщение вигнеровского подхода к элементарной (бесструктурной) релятивистской частице. Действительно, элементарная частица по Вигнеру – это объект, задаваемый неприводимым представлением алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}$; в данной работе частица есть представление алгебры

$$\mathcal{A}_{кл} = W'_\infty \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{P}, \tag{1}$$

где $\mathcal{A}_1$ – центрально-расширенная алгебра токов, $\mathcal{P}$ – алгебра Пуанкаре, а алгебра W'_∞ – диагональна. Наличие конечного числа связей в теории приводит в пространстве представления к уравнениям, определяющим спектр масс.

2. Динамическая система "Протяжённая частица"

В настоящем параграфе будет определена динамическая система, интерпретируемая как свободная релятивистская частица, движущаяся в четырёхмерном пространстве - времени и обладающая бесконечным, вообще говоря, числом внутренних степеней свободы. Следуя Дираку [16], к построению динамической системы мы подойдём формально, т. е. считая исходным понятием не действие, а такие объекты, как "фазовое пространство", "скобки Пуассона" и "гамильтониан". Далее в терминах именно этих объектов, определяемых в данном параграфе, будет построено гамильтоново описание иной динамической системы – $4D$ спиновой струны[2].

Итак, для задания динамической системы нам необходимо:

1. определить дифференцируемое многообразие – "фазовое пространство" $\mathcal{H}^\star$;
2. определить на некотором классе $\Im$ функционалов на пространстве $\mathcal{H}^\star$ "пуассонову структуру" $\{\cdot,\cdot\}^\star$ – антисимметричную билинейную операцию $\Im\times\Im\to\Im$ (возможно, вырожденную), удовлетворяющую тождеству Якоби;
3. на множестве $\Im$ задать, фиксировав некоторый функционал $h^\star\in\Im$ ("гамильтониан"), динамику, т.е. однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\Im\ni F\to F(\xi^0)\in\Im$, потребовав выполнения уравнений $\dot F=\{h,F\}\ \forall\, F\in\Im$.

Определения указанных объектов таковы. Пространство $\mathcal{H}^\star$ имеет структуру

$$\mathcal{H}^\star = \mathcal{H}_p\times\mathcal{H}_b\times\mathcal{H}_j\times\mathcal{H}_0,$$

где

- $\mathcal{H}_p$ – линейное многообразие, точки которого x задаются координатами 4-вектора P_μ и антисимметричного тензора $M_{\mu\nu}$: $x\leftrightarrow(P_\mu, M_{\mu\nu})$;
- $\mathcal{H}_b$ – фазовое пространство комплексного поля $b(\xi^0,\xi^1)$, заданного в "ящике" $\xi^1\in[0,\pi]$, удовлетворяющего уравнению Даламбера, а также граничным условиям
$$b(\xi^0,0)=b(\xi^0,\pi)=0.$$
Такое поле однозначно представимо в виде
$$b(\xi^0,\xi^1)=\int_{-\xi_-}^{\xi_+} f(\eta)d\eta \qquad (\xi_\pm=\xi^1\pm\xi^0),$$

[2] некоторой специальной модели

где $f(\xi)$ – комплекснозначная 2π - периодическая функция, не содержащая в своем Фурье - разложении нулевой моды. Для параметризации пространства $\mathcal{H}_b$ в дальнейшем будет использоваться именно функция $f(\xi)$;

- $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{j_0} \times \mathcal{H}_U$,

  где:

  † $\mathcal{H}_{j_0}$ – фазовое пространство вещественного поля Даламбера $j(\xi^0, \xi^1)$, заданного при $\xi^1 \in [0, \pi]$ и удовлетворяющего граничным условиям

$$j(\xi^0, 0) = 0, \qquad j(\xi^0, \pi) = 2\pi j_0^0.$$

  Такое поле однозначно представимо в виде

$$j(\xi^0, \xi^1) = \int_{-\xi_-}^{\xi_+} j_0(\eta) d\eta,$$

  где $j_0(\xi)$ – вещественная 2π - периодическая функция такая, что нулевая мода в её Фурье - разложении есть j_0^0. Аналогично для параметризации пространства $\mathcal{H}_{j_0}$ мы будем использовать функцию $j_0(\xi)$;

  † $\mathcal{H}_U$ – фазовое пространство $SU(2)$ - значного поля $U(\xi^0, \xi^1)$, определённого при $\xi^1 \in [0, \pi]$, удовлетворяющего (специальному) уравнению Весса - Зумино - Новикова - Виттена

$$\partial_-(U^{-1}\partial_+ U) = 0,$$

  а также граничным условиям

$$U(\xi^0, 0) = U(\xi^0, \pi) = 1_2.$$

  Пространство $\mathcal{H}_U$, как известно [14] может быть параметризовано тремя вещественными функциями $j_a(\xi)$, $a = 1, 2, 3$. Необходимое следствие граничных условий – 2π - периодичность этих функций.

- $\mathcal{H}_0$ – 4-мерное линейное пространство с вещественными координатами q, θ, p и χ, причём координата θ определена по модулю 2π.

Предполагается, что размерность координат P_μ и $M_{\mu\nu}$ есть размерность импульса и момента соответственно. Размерность переменных p и χ есть размерность действия. Другие введённые координаты являются безразмерными величинами. Предполагается также, что координаты пространств $\mathcal{H}_b$, $\mathcal{H}_j$ и $\mathcal{H}_0$ являются Пуанкаре - скалярами.

Пусть S_0 – произвольная константа, имеющая размерность действия. Рассмотрим множество $\Im$ гладких (в смысле [14]) функционалов $F, G, \ldots$ переменных $f(\xi)$ и $j_a(\xi)$. Как функции дискретных координат пространства $\mathcal{H}^\star$, будем считать величины F, G, ... бесконечно дифференцируемыми. Для таких функционалов пуассонова структура $\{F, G\}^\star$ теории может быть естественно определена в терминах вариационных производных. Вновь следуя [14], далее, сделав соответствующие оговорки, мы будем рассматривать скобки и иных функционалов, вариационные производные которых не обладают свойством гладкости, например, введённых фундаментальных координат пространства $\mathcal{H}^\star$. В их терминах фундаментальные скобки теории выглядят так:

$$
\begin{aligned}
\{M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}\}^{\star} &= g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma},\\
\{M_{\alpha\beta}, P_{\gamma}\}^{\star} &= g_{\beta\gamma}P_{\alpha} - g_{\alpha\gamma}P_{\beta}, \qquad \{P_{\alpha}, P_{\gamma}\}^{\star} = 0,\\
\left\{f(\xi), \overline{f}(\eta)\right\}^{\star} &= S_0^{-1}\delta^{'}(\xi-\eta),\\
\{j_0(\xi), j_0(\eta)\}^{\star} &= -2S_0^{-1}\delta^{'}(\xi-\eta),\\
\{j_a(\xi), j_b(\eta)\}^{\star} &= 2S_0^{-1}\left(-\delta_{ab}\delta^{'}(\xi-\eta) + \varepsilon_{abc}j_c(\xi)\delta(\xi-\eta)\right), \qquad (2)\\
\{p, q\}^{\star} &= 1, \qquad \{\chi, \theta\}^{\star} = 1.
\end{aligned}
$$

В данных формулах $a, b, c = 1, 2, 3$ и $\delta(\xi) = \sum_n \mathrm{e}^{in\xi}$. Остальные возможные скобки (например, $\{P_\mu, f(\xi)\}^\star$ и т.д.) равны нулю.

Динамику наблюдаемых гладких функционалов на пространстве $\mathcal{H}^\star$ зададим, определив гамильтониан

$$
h^{\star} = \frac{S_0}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{4}\sum_{a=0}^{3}\int_0^{2\pi} j_a^2(\xi)d\xi\right) + p.
$$

Заметим, что если $A \notin \Im$, но соответствующие вариационные производные являются периодическими обобщёнными функциями, $B \in \Im$, скобки $\{A, B\}^\star$ определены. Поэтому для координат пространства $\mathcal{H}^\star$ имеем уравнения движения:

$$
\{h^{\star}, j_a\}^{\star} = j_a', \qquad \{h^{\star}, f\}^{\star} = f', \qquad \{h^{\star}, q\}^{\star} = 1. \qquad (3)
$$

Остальные координаты для $h^\star$-динамики всегда стационарны.

Рассмотрим возможность описания в терминах введённой динамической системы свободной релятивистской частицы с энергией - импульсом P_μ, моментом $M_{\mu\nu}$ и некоторыми внутренними степенями свободы, описываемыми функциями $f(\xi)$ и $j_a(\xi)$ (последние в данном параграфе мы не будем как-либо конкретизировать). Такой подход представляется вполне естественным: как отмечалось, например, в работе [34], любая наблюдаемая, относящаяся к бесструктурной релятивистской частице, есть функция генераторов группы Пуанкаре.

Восстановим координаты $X_\mu \in E_{1.3}$ частицы по координатам пространства $\mathcal{H}^\star$. Чтобы выполнить это корректно, необходимо учесть, что пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}^\star$ должна быть тем или иным способом согласована с тензорными свойствами рассматриваемых функций. Так, если объявить вектор P_μ 4-импульсом частицы, то отвечающий ему лиев оператор $\{P_\mu, \ldots$ должен генерировать трансляции в пространстве $E_{1.3}$. Это означает, что для искомого радиус-вектора $X_\mu \in E_{1.3}$ равенство $\{P_\mu, X_\nu\}^\star = g_{\mu\nu}$ должно быть выполнено. Поскольку в нашем случае величины X_μ в число координат фазового пространства не входят, вопрос требует дополнительного исследования. Заметим, что постулированные скобки переменных P_μ и $M_{\mu\nu}$ мотивированы, очевидно, алгеброй Пуанкаре. Следовательно, мы имеем здесь пару аннуляторов: $P_\mu P^\mu$ и $w_\nu w^\nu$, где $w_\mu = -(1/2)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\nu\lambda}P^\sigma$ – псевдо-вектор Любаньского-Паули. Рассмотрим теперь восстановление координат частицы X_μ по переменным P_μ, $M_{\mu\nu}$, и, возможно, $f(\xi)$, $j_a(\xi)$, p, q, θ и χ. Легко видеть, что желаемые скобки $\{P_\mu, X_\nu\}^\star = g_{\mu\nu}$ противоречат факту существования аннулятора P^2, поскольку в этом случае, очевидно, $\{P^2, X_\nu\}^\star = 2P_\nu \neq 0$. Например, для вектора $\tilde{X}_\mu = M_{\mu\nu}P^\nu/P^2$ имеем следующие скобки:

$$\{P_\mu, \tilde{X}_\nu\}^\star = g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2}.$$

Для любого 4-вектора b^μ имеем

$$\mathrm{e}^{b^\mu\{P_\mu,\cdots}\tilde{X}_\nu = \tilde{X}_\nu + b_\nu - \left(\frac{b_\rho P^\rho}{P^2}\right) P_\nu.$$

Таким образом, динамические переменные P_μ не генерируют Пуанкаре - трансляции вдоль вектора P_μ.

Поскольку мы имеем также и второй аннулятор – w^2, то динамические переменные $M_{\mu\nu}$ в рамках введённой пуассоновой структуры не могут генерировать вращений $\Lambda^\nu_\mu(\theta)$ в пространственно - подобной плоскости, ортогональной вектору P_μ и псевдовектору w_μ.

Справедливо следующее

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{V}^\star_{23} \subset \mathcal{H}^\star$ – поверхность связей:*

$$\Phi_3 \equiv p - c_p = 0, \qquad \Phi_4 \equiv \chi - c_\chi = 0, \tag{4}$$

где c_p и c_χ – произвольные константы.

Выполним редукцию $\mathcal{H}^\star \to \mathcal{V}^\star_{23}$. В этом случае в теории существуют функционалы, для которых динамические переменные

$$\begin{aligned} P^\star_\mu &= P_\mu + (\lambda_3)_\mu\Phi_3 + (\lambda_4)_\mu\Phi_4, \\ M^\star_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} + (\lambda_3)_{\mu\nu}\Phi_3 + (\lambda_4)_{\mu\nu}\Phi_4, \end{aligned}$$

где λ_i – некоторые множители Лагранжа, генерируют все трансляции и вращения группы Пуанкаре.

Действительно, рассмотрим лиев оператор

$$\{P^\star_\mu, \ldots = \{P_\mu, \ldots + \frac{P_\mu}{P^2}\{\Phi_3, \ldots + terms,$$

где символом $terms$ обозначены слагаемые, пропорциональные связям Φ_i (в дальнейшем мы их выписывать не будем). В соответствии с определением переменной q находим, что равенство

$$\mathrm{e}^{a^\mu\{P^\star_\mu,\cdots}X_\nu = X_\nu + a_\nu$$

выполнено для вектора

$$X_\mu = \frac{1}{P^2}\, M_{\mu\nu}P^\nu + qP_\mu.$$

Рассмотрим далее оператор $\{M^{\mu\nu}, \ldots$. Пусть A – произвольная динамическая переменная. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\delta}w^\mu P^\delta\{M^{\alpha\beta}, A\}^\star = -2w^\mu\{w_\mu, A\}^\star + 2P_\alpha M^{\alpha\nu}M_{\nu\delta}\{P^\delta, A\}^\star.$$

Рассмотрим некоторый аффинный вектор A_ρ. Для такого вектора, не ограничивая общности, можно считать $P_\alpha M^{\alpha\nu} = 0$ (система "центра масс"), так что находим: $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\delta}w^\mu P^\delta\{M^{\alpha\beta}, A_\rho\}^\star = 0$, поскольку w^2 – аннулятор введённой скобки. Таким образом, для матрицы $\omega_{\alpha\beta} \propto \varepsilon_{\alpha\beta\mu\delta}w^\mu P^\delta$ поворотов в плоскости, ортогональной вектору P_μ и псевдовектору w_ν и любого (аффинного) вектора A_ρ имеем:

$$\mathrm{e}^{\omega_{\mu\nu}\{M^{\mu\nu}\cdots}A_\rho = A_\rho.$$

Для того чтобы иметь в теории полный набор генераторов лоренцевых поворотов, будем рассматривать лиев оператор

$$M^{\star}_{\mu\nu} = \{M_{\mu\nu}, \ldots + \frac{1}{P^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}w^{\rho}P^{\delta}\{\Phi_4, \ldots,$$

вместо оператора $\{M^{\mu\nu}, \ldots$. Компоненты любого аффинного вектора (не являющегося линейной комбинацией $aP_\mu + bw_\mu$), должны соответственно зависеть от переменной θ. Мы не приводим в данном параграфе каких-либо примеров такой зависимости; это будет сделано ниже.

В заключение данного параграфа заметим, что пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}^{\star}$, кроме двух уже упоминавшихся аннуляторов – величин P^2 и w^2, имеет иные. Во-первых, очевидно, это нулевая мода j_0^0 функции $j_0(\xi)$. Во-вторых, это аннулятор, связанный со скобкой (2) [14, 33]. В дальнейшем он будет играть важную роль в теории, так что приведём некоторые подробности. Рассмотрим линейную систему 2×2 :

$$U'(\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sum_{a=1}^{3}\sigma_a j_a(\xi)\right)U(\xi) = 0. \tag{5}$$

Пусть $\mathcal{M}$ – матрица монодромии данной системы, определённая равенством $U(\xi + 2\pi) = U(\xi)\mathcal{M}$. Варьируя (5), находим:

$$\frac{\delta\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}}{\delta\, j_a(\eta)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}U^{-1}(\eta)\sigma_a U(\eta)\right).$$

С помощью данной формулы убеждаемся, что величина $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}$, во-первых, является гладким функционалом и, во-вторых, имеет нулевые скобки $\{\cdot,\cdot\}^{\star}$ с любым иным гладким функционалом.

Рассмотренная в настоящем параграфе модель фактически является прямым произведением теории бесструктурной релятивистской частицы, характеризуемой энергией - импульсом P_μ и моментом $M_{\mu\nu}$, и теории свободных безмассовых полей $b(\xi^0,\xi^1)$, $j(\xi^0,\xi^1)$ и $U(\xi^0,\xi^1)$ в (одномерном) "ящике". Разумеется, в таком виде модель является тривиальной в следующем смысле: "внутренние степени свободы" f и j_a никак не влияют на "спектр" частицы – значения величин P^2 и w^2. Нетривиальной теория становится при редукции на некоторую поверхность связей

$$\mathcal{V}^{\star} \subset \mathcal{V}^{\star}_{23} \subset \mathcal{H}^{\star},$$

которая возникает при реализации тех или иных дополнительных требований.

2. Струнное действие и дополнительные условия

В терминах динамической системы § 1 возможно гамильтоново описание открытой спиновой струны, эволюционирующей в пространстве - времени $E_{1,3}$. Струнное действие выберем таким:

$$S_{str} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\xi^0 d\xi^1\sqrt{h}\left\{h^{ij}\partial_i X^{\mu}\partial_j X_{\mu} - 2i\varrho_0 e_I^j(\Gamma^0)_{AB}\overline{\Psi}^A\gamma_j\nabla^I\Psi^B\right\}. \tag{6}$$

Здесь, как обычно, $h = \det(h^{ij})$, $e_I^j(\xi^0,\xi^1)$ – двумерный базис, стандартным образом связанный с 2-метрикой h^{ij}. Матрицы Дирака в четырех- и двумерном пространстве-времени здесь и далее мы обозначаем соответственно Γ^μ и γ_i. Поле X_μ несёт векторный индекс μ в $E_{1,3}$. Какие-либо дополнительные или "скрытые" измерения пространства - времени в теории отсутствуют. Поле $\Psi^A_{\pm}$, компоненты которого являются комплекснозначными функциями, несет следующие индексы: индекс A – спинорный индекс в пространстве $E_{1,3}$, по которому поле Ψ является майорановским спинором, а также индекс $\pm$ (принимающий значения "+" и "-") – спинорный индекс в двумерном пространстве-времени. Ковариантная производная (записанная как матрица 2×2) $\nabla^I = 1_2\partial^I + (1/4)\omega^I_{mn}\gamma^{mn}$ содержит генераторы группы Лоренца двумерного пространства - времени $\gamma^{mn} = (\gamma^m\gamma^n - \gamma^n\gamma^m)/2$ в спинорном представлении, а также спиновую связность ω^I_{mn}. Заметим, что явный вид последней (приведённый, например, в [5]) нам не понадобится.

Набор преобразований, оставляющих действие (6) неизменным, следующий: глобальная Пуанкаре-инвариантность в пространстве $E_{1,3}$, репараметризационная и вейлевская инвариантность, а также локальная Лоренц-инвариантность в двумерном пространстве-времени [5].

Следует подчеркнуть, что в теории не налагается требования локальной суперсимметричности действия S в общепринятом [3] смысле, что делает возможным, во-первых, не добавлять к действию S_{str} дополнительные слагаемые, такую суперсимметрию обеспечивающие, и, во-вторых, ввести в (6) две независимые константы: α' и ϱ_0. Такой подход мотивируется тем, что исходные струнные переменные X_μ и $\Psi^A_\pm$ не являются в предлагаемой модели фундаментальными, а становятся сложными функционалами вводимых переменных – координат пространства $\mathcal{H}^\star$.

Далее обычным способом накладывается калибровка $e^j_I = \delta^j_I$ и осуществляется переход к соответствующему действию. Поскольку в пространстве $E_{1,3}$ для майорановских спиноров Ψ выполняется соотношение $(\Gamma^0)_{AB}\Psi^A\Psi^B = 0$, то, как несложно показать, слагаемое в (6) со спиновой связностью не дает вклада в действие в указанной калибровке.

Свободные уравнения движения

$$\partial_-\partial_+X_\mu = 0, \qquad \partial_\mp\Psi_\pm = 0 \tag{7}$$

и стандартные граничные условия

$$X'_\mu\Big|_{\xi^1=0} = X'_\mu\Big|_{\xi^1=\pi} = 0, \quad \Psi_+\Big|_{\xi^1=0} = \Psi_-\Big|_{\xi^1=0}, \quad \Psi_+\Big|_{\xi^1=\pi} = \epsilon\Psi_-\Big|_{\xi^1=\pi}, \tag{8}$$

где $\epsilon = \pm$, а $\partial_\pm$, как обычно, производные по конусным переменным $\xi_\pm = \xi^1 \pm \xi^0$, должны быть дополнены условиями $\delta S/\delta h^{ij} = 0$, которые в рассматриваемой калибровке имеют вид

$$(\partial_\pm X)^2 \pm \frac{i}{2}\varrho_0\overline{\Psi}_\pm\partial_\pm\Psi_\pm = 0. \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{X}$ – множество всех струнных конфигураций, на которых определено действие (6). Каноническое фазовое пространство динамической системы есть $\mathcal{H} = T^*\mathcal{X}$ [7], где символ T^* означает кокасательное расслоение. В нашем случае пространство $\mathcal{H}$ имеет координаты $\dot{X}_\mu \equiv \partial_0 X_\mu$, X_μ, $\Psi^{+A}{}_\pm$ и $\Psi^A_\pm$. Каноническая пуассонова структура на пространстве $\mathcal{H}$ невырождена и определена стандартным образом:

$$\{\dot{X}_\mu(\xi), X_\nu(\eta)\} = -4\pi\alpha' g_{\mu\nu}\delta(\xi-\eta), \tag{10}$$

$$\{\overset{+}{\Psi}{}^A{}_\pm(\xi), \Psi^B_\pm(\eta)\} = \frac{8\pi i\alpha'}{\varrho_0}(\Gamma^0)^{AB}\delta(\xi-\eta). \tag{11}$$

[3] т.е. в смысле существования преобразований, связывающих переменные X_μ и $\Psi^A_\pm$

Зафиксируем оставшийся в теории репараметризационный произвол

$$\xi_\pm \to \tilde{\xi}_\pm = A_\pm(\xi_\pm) \tag{12}$$

при помощи дополнительных условий. В соответствии с граничными условиями (8) для переменных $X(\xi^0,\xi^1)$ и $\Psi(\xi^0,\xi^1)$ имеем: $A_\pm(\xi) = A(\pm\xi)$, причем функция $A(\xi)$ должна удовлетворять свойству

$$A(\xi+2\pi) = A(\xi) + 2\pi, \qquad A' \neq 0, \tag{13}$$

Для фиксации указанного произвола потребуем выполнения равенств

$$\overline{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm \partial_\pm X_\mu = \pm\frac{\kappa^2}{2} \tag{14}$$

Подчеркнём, что единственным ограничением на константу κ является неравенство $\kappa > 0$. Какие-либо сильные ограничения типа $\kappa = p$, где p некоторый *in-put* параметр, в теории отсутствуют. Такие ограничения существенным образом сужают класс рассматриваемых струнных конфигураций. Действительно, в силу свойства (13) преобразования типа $\xi_\pm \to c_\pm \xi_\pm$, такие, что $c_\pm \neq 1$, недопустимы, так что различным значениям параметра κ отвечают различные орбиты группы (12). Общее обсуждение подобных моментов, возникающих при фиксации калибровки в той или иной теории, можно найти в работе [35].

Поскольку векторы $\overline{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm$ светоподобные, то условия (14) можно рассматривать как локальное обобщение общепринятой "глобальной" калибровки светового конуса

$$n_\mu \partial_\pm X^\mu = \pm p_+/2,$$

где $n_\mu = (1,0,0,-1)$. Разумеется, при наложении условий (14) мы ограничиваем множество допустимых струнных конфигураций, изначально требуя выполнения неравенств

$$\pm\overline{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm \partial_\pm X_\mu > 0.$$

Введём следующие обозначения. Пусть $\mathcal{V}$ – множество мировых листов $(\mathbf{X}(\xi^0,\xi^1), \Psi(\xi_\pm))$, являющихся экстремалями действия (6), удовлетворяющих первичным связям (9) и дополнительным условиям (14). Введём также вспомогательное минимальное подпространство $\mathcal{H}_1$ такое, что:

1. выполнено включение $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$;

2. на подпространстве $\mathcal{H}_1$ посредством скобок (10) и (11), первичных связей (9) и дополнительных условий (14) определена невырожденная скобка Дирака.

Связи (9), а также граничные условия (8) позволяют определить пару непрерывных 2π-периодических функций:

$$H(\xi) = \begin{cases} (\partial_+ X(\xi))^2 + \frac{i}{2}\varrho_0 \overline{\Psi}_+(\xi)\partial_+\Psi_+(\xi); & \xi \in [0,\pi), \\ (\partial_- X(-\xi))^2 - \frac{i}{2}\varrho_0 \overline{\Psi}_-(-\xi)\partial_-\Psi_-(-\xi); & \xi \in [-\pi,0), \end{cases}$$

$$G(\xi) = \begin{cases} \overline{\Psi}_+(\xi)\Gamma^\mu\Psi_+(\xi)\partial_+X_\mu(\xi); & \xi \in [0,\pi), \\ -\overline{\Psi}_-(-\xi)\Gamma^\mu\Psi_-(-\xi)\partial_-X_\mu(-\xi); & \xi \in [-\pi,0). \end{cases}$$

Определим подпространство $\mathcal{H}_1$ равенствами:

$$H_n = 0, \qquad G_n = 0, \qquad n \neq 0, \tag{15}$$

где константы H_n и G_n – коэффициенты рядов Фурье для 2π-периодических функций $H(\xi)$ и $G(\xi)$ соответственно. В силу вещественности этих функций справедливы равенства $H_{-n} = H^*{}_n$ и $G_{-n} = G^*{}_n$, так что мы будем рассматривать далее константы H_n, $H^*{}_n$, G_n, $G^*{}_n$ при $n \geq 0$. Как следствие (10) и (11), мы имеем такие скобки:

$$\{\overset{*}{H}_n, G_m\} = 4\mathrm{i}\alpha'(m+n)G_{m-n}. \tag{16}$$

Поскольку $G_0 = \kappa^2/2 > 0$, то система "связей" (15) является системой второго рода по классификации Дирака. Соответствующие скобки Дирака $\{\cdot,\cdot\}_1$ на пространстве $\mathcal{H}_1$ хорошо определены и невырождены. Равенство $H_0 = 0$ задает редукцию на множество $\mathcal{V}$. Очевидно, что по отношению к пространству $\mathcal{H}_1$ $\mathrm{codim}\mathcal{V} = 1$.

Единственные возможные репараметризации на множестве $\mathcal{V}$ – это сдвиги $\xi^0 \to \xi^0 + c$. Генератором этих "временны́х" сдвигов (т. е. гамильтонианом рассматриваемой динамической системы), будет, как легко убедиться, функционал H_0.

3. Теорема о связи динамических систем

Как уже говорилось, эволюция рассмотренной в § 2 струны может быть описана в терминах динамической системы "Протяжённая частица". Точный результат формулируется в виде теоремы, различные этапы доказательства которой содержатся в работах автора, цитированных во введении. Что касается констант, входящих в определения скобок в пространстве $\mathcal{H}^\star$ и действия (6), в дальнейшем всегда будем считать, что $S_0 = {\varrho_0}^2/\alpha'$.

Теорема.

Существует соотношение $\Phi_1 = 0$, где Φ_1 – некоторый допустимый функционал на пространстве $\mathcal{H}^\star$, такой, что:

1. *функционал Φ_1 является Пуанкаре-инвариантным;*
2. *поверхность связей*

   $$\mathcal{V}^\star \subset \mathcal{H}^\star : \quad \mathcal{V}^\star = \{x \in \mathcal{H}^\star \mid \Phi_i = 0,\ i = 1, \ldots, 3\}$$

   изоморфна введённому в § 2 множеству $\mathcal{V}$, т. е.

   $$\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}^\star;$$

3. *система связей Φ_i, $i = 1, \ldots, 3$ является в пространстве $\mathcal{H}^\star$ системой связей первого рода;*
4. *система связей Φ_i, $i = 1, \ldots, 3$ стационарна, т. е.*

   $$\{h^\star, \Phi_i\}^\star = 0;$$

5. *слоение множества $\mathcal{V}$, задаваемое гамильтонианом H_0, переходит при указанном изоморфизме в слоение множества $\mathcal{V}^\star$, задаваемое гамильтонианом*

   $$h^\# = h^\star + \sum_{i=1}^{3} l_i \Phi_i$$

   при $l_i = 0$.

Таким образом, связь между двумя рассмотренными динамическими системами такова:

$$\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}^\star \subset \mathcal{H}^\star. \tag{17}$$

Необходимо подчеркнуть, что сами фазовые пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}^\star$ как пуассоновы многообразия не изоморфны.

Прямым следствием граничных условий (8) является равенство

$$\Phi_0 \equiv \arccos\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}\right] = \pi n, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{18}$$

Как упоминалось ранее, величина $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}$ является аннулятором скобки (2). Целое число n имеет топологическую природу и может рассматриваться как некоторый "топологический заряд" частицы.

Приведем общий вид связи

$$\Phi_1(P^2, w^2; f, j_0, \ldots, j_3) = 0. \tag{19}$$

В κ-параметрической форме данное равенство может быть записано так:

$$P^2 \;=\; \det\left[\kappa\hat{P}_{(1)} + \varrho_0\hat{P}_{(0)}\right], \tag{20}$$

$$w^2 \;=\; \det\left[\sum_{l=0}^{3}\kappa^l {\varrho_0}^{3-l}\hat{w}_{(l)}\right]. \tag{21}$$

Принципиально важным здесь является тот факт, что коэффициенты $\hat{P}_{(l)}$ и $\hat{w}_{(l)}$ в полиномах (20) и (21) зависят только от переменных $f(\xi)$, $j_a(\xi)$ и топологического числа n.

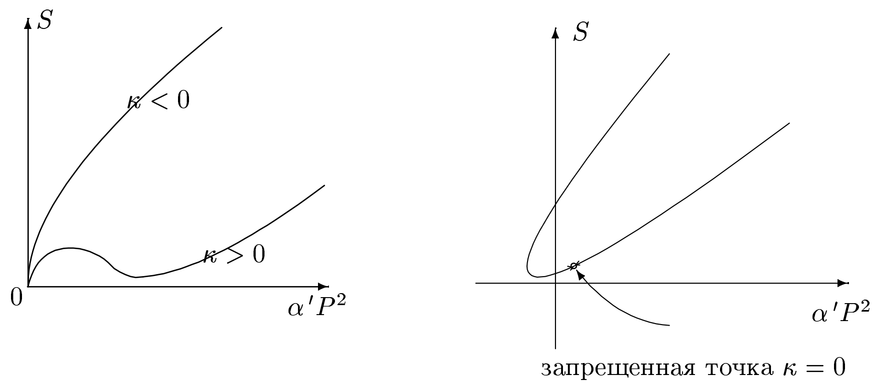

Рис. Зависимость $S = S(P^2)$ в случаях $\mathrm{Im}\, f \simeq 0$, $j_a \equiv 0$ (лев.) и $f \equiv 0$, $j_a \equiv const$ (прав.)

При исключении параметра κ – переходе от формы записи (20) и (21) к форме (19) необходимо помнить, что по построению $\kappa \neq 0$. Из формул (20) и (21) следует, что значению $\kappa = 0$ соответствует множество $\mathcal{V}_0^\star \subset \mathcal{H}^\star$ – множество точек, координаты которых f, j_a, P_μ и $M_{\mu\nu}$ удовлетворяют одновременно двум условиям:

$$P^2 = \varrho_0^2 \det\hat{P}_{(0)}, \qquad w^2 = \varrho_0^6 \det\hat{w}_{(0)}. \tag{22}$$

Таким образом, переменные f, j_a, P_μ и $M_{\mu\nu}$ соответствующие заданной струнной конфигурации $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$, $\Psi_\pm(\xi^0, \xi^1)$, принадлежат множеству $\mathcal{V}_1^\star/\mathcal{V}_0^\star$. При всяком фиксированном значении переменных f, j_a равенство (19) означает нетривиальную, вообще говоря зависимость величины $S = \sqrt{-w^2/P^2}$ от квадрата вектора энергии - импульса P^2. Соответствующие примеры наглядно продемонстрированы на рисунке.

4. Квантование

В предыдущих параграфах определена динамическая система "Протяжённая частица" и установлено существование в фазовом пространстве $\mathcal{H}^\star$ данной системы нетривиального струнного сектора. Важной особенностью здесь является тот факт, что алгебра скобок Пуассона $\mathcal{A}_{кл}$ фундаментальных координат пространства $\mathcal{H}^\star$ не является алгеброй Гейзенберга-Вейля W_∞, как обычно, а имеет более сложную структуру (1). Исходя из общей концепции квантования динамических систем [16, 17], мы построим представление алгебры $\mathcal{A}_{кл}$ операторами, действующими в некотором корректно определённом пространстве квантовых состояний. Разумеется, такая процедура не есть какой-либо аналог квантования собственно струны в стандартном смысле [5], поскольку фазовое пространство струны иное. Таким образом, здесь мы имеем нетривиальный пример пары динамических систем, эквивалентных на классическом уровне, но имеющих различные, вообще говоря, квантовые версии.

Напомним, что струнные переменные X_μ и $\Psi_\pm$ являются сложными функционалами фундаментальных координат пространства $\mathcal{H}^\star$ на поверхности связей, причём так, что

$$\begin{aligned} X &= X[f(\xi), j_a(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}; q, \theta], \\ \Psi &= \Psi[j_a(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}; \theta]. \end{aligned} \tag{23}$$

Отображение (23) обладает следующим свойством [31]:

Предложение 2. *Для того чтобы* $\Psi^A_\pm(\xi) \equiv \mathrm{const}$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$j_0(\xi) \equiv const, \qquad j_a(\xi) \equiv 0, \qquad a = 1, 2, 3.$$

Таким образом, динамическая система "Протяжённая частица" в секторе $j_a(\xi) \equiv 0$ классически эквивалентна $4D$ релятивистской струне с дополнительным условием

$$\pm n_\mu \partial_\pm X^\mu = const,$$

где n_μ – не зависящий от ξ^0, ξ^1 светоподобный вектор. Принципиальное отличие от стандартной модели струны в калибровке светового конуса заключается здесь в том, что компоненты вектора n_μ являются динамическими переменными, которые преобразуются соответствующим образом при преобразованиях Лоренца. Именно этот факт позволяет сделать оставшуюся полевую переменную $f(\xi)$ релятивистским инвариантом, и, таким образом, явно сохранять ковариантность теории на каждом её этапе.

Предложение делает естественным такой выбор квантования фундаментальных переменных пространства $\mathcal{H}^\star$: степени свободы $f(\xi)$ квантуются в терминах бозонных полей, а степени свободы $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$, $(a = 1, 2, 3)$ – в терминах фермионных.

Таким образом, в соответствии со структурой алгебры $\mathcal{A}_{кл}$, в общих чертах пространство квантовых состояний динамической системы "Протяжённая частица" имеет вид:

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{\mu^2,s}\Big(\mathbf{H}_f \otimes \mathbf{H}_j \otimes \mathbf{H}_{\mu^2,s} \otimes \mathbf{H}_{cyl}\Big). \tag{24}$$

В данном разложении:

- $\mathbf{H}_f$ – фоковское пространство состояний двумерного безмассового бозонного поля в "ящике" ;
- $\mathbf{H}_j$ – фоковское пространство состояний двумерного безмассового фермионного поля в "ящике";
- $\mathbf{H}_{\mu^2,s}$ – пространство неприводимого представления алгебры Пуанкаре, отвечающее собственным значениям $\mathbf{M}^2$ и $\mathbf{S}(\mathbf{S}+1)$ соответствующих операторов Казимира (далее, как и здесь, часто будет использоваться "безразмерная масса" – величина $\mu = \sqrt{\alpha'/\hbar}\mathbf{M}$).
- $\mathbf{H}_{cyl}$ – пространство квантово-механической частицы на цилиндре – гильбертово пространство $L^2[\mathcal{C}]$, где $\mathcal{C} = R\,\times\,S^1$.

В такой схеме квантования динамическая система может, очевидно, рассматриваться как прямое обобщение известной концепции Вигнера [37] элементарной частицы – объекта, описываемого неприводимым представлением группы Пуанкаре. В нашем случае обобщение нетривиально благодаря наличию в (классической) теории связей первого рода. Так, связь (19) после квантования приведёт к уравнению, определяющему спектр и допустимые состояния системы. Заметим, что для допустимых связями (4) волновых функций $\psi \in \mathbf{H}_{cyl}$ зависимость от переменных q и θ тривиальна, так что пространство $\mathcal{H}_{cyl}$ можно далее в разложении (24) не учитывать.

Приведем далее некоторые результаты, касающиеся квантования фермионных степеней свободы (переменных $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$). Нетривиальность проблемы обусловлена тем, что алгебра скобок Пуассона (2) не есть алгебра Гейзенберга - Вейля. Представляется естественным выполнить квантование указанных степеней свободы в терминах токов некоторых фермионных полей, используя метод бозонизации [36]. Детально мы рассмотрим лишь случай $j_a(\xi) \equiv const$. Итак, пусть

$$\Omega_\beta(\xi^0,\xi^1) = \begin{pmatrix} \omega_{\beta+}(\xi_+) \\ \omega_{\beta-}(\xi_-) \end{pmatrix}\,, \qquad \beta = 0,1,\ldots,2\mathbf{I}$$

– квантовые спинорные поля, заданные в "ящике" $\xi^1 \in [0,\pi]$ и подчинённые граничным условиям

$$\omega_{\beta+}\Big|_{\xi^1=0} = \omega_{\beta-}\Big|_{\xi^1=0}\,, \qquad \omega_{\beta+}\Big|_{\xi^1=\pi} = \omega_{\beta-}\Big|_{\xi^1=\pi}\,.$$

Здесь везде β – некоторый спинорный изотопический индекс; число $\mathbf{I}$ может быть полуцелым. Выполнив стандартным образом "сшивку" функции $\omega_{\beta+}$ и $\omega_{\beta-}$, далее мы будем рассматривать вместо двухкомпонентных спиноров $\Omega_\beta(\xi^0,\xi^1)$ на интервале $[0,\pi]$ функции $\omega_\beta(\xi)$, определённые на всей оси и обладающие свойством 2π - периодичности. Укажем явный вид данных функций. Введём для этого (не зависящие от $\hbar$) фермионные операторы рождения и уничтожения $\mathbf{a}^+_{\alpha,n}$ и $\mathbf{a}_{\alpha,n}$, порождающие соответствующее пространство Фока $\mathbf{H}_I$ и удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\Big[\mathbf{a}_{\alpha,n}, \mathbf{a}^+_{\beta,m}\Big]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}, \qquad \alpha,\beta = 0,1,\ldots,2\mathbf{I}; \quad n,m = 0,\pm1,\ldots.$$

Функции ω_β выражаются через операторы $\mathbf{a}^+_{\beta,n}$, $\mathbf{a}_{\beta,n}$ следующим образом:

$$\omega_\beta(\xi) = \mathbf{a}_{\beta,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{a}^+_{\beta,n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\xi} + \mathbf{a}_{\beta,-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi} \right) .$$

Пусть $R^I[U]$ – матрица размерности $(2\mathbf{I}+1) \times (2\mathbf{I}+1)$, отвечающая матрице $U \in SU(2)$ в соответствующем представлении группы $SU(2)$. Определим "токи":

$$J_0(\xi) = \frac{2}{(2\mathbf{I}+1)} \sum_{\beta} : \omega^+_\beta(\xi) \omega_\beta(\xi) : ,$$

$$J_a(\xi) = \frac{2}{c(\mathbf{I})} \sum_{\alpha,\beta} : \omega^+_\alpha(\xi) \left(R^I[\sigma_a] \right)_{\alpha\beta} \omega_\beta(\xi) : , \qquad a = 1,2,3.$$

Здесь $c(\mathbf{I}) = \mathrm{Tr}\,(R^I[\sigma_a])^2$.

В общих чертах квантование Υ фермионных степеней свободы рассматриваемой динамической системы с топологическим зарядом $n = 2\mathbf{I}$ – это отображение:

$$j_0(\xi) \longrightarrow J_0(\xi), \qquad j_a(\xi) \longrightarrow J_a(\xi), \qquad a = 1,2,3.$$

Таким образом, в общем случае все классические наблюдаемые динамической системы "Протяжённая частица", характеризующиеся топологическим зарядом $n = 2\mathbf{I}$ и числом j^0_0, становятся операторами в пространстве

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{\mu^2, S} \Big(\mathbf{H}_f \otimes \mathbf{H}_{IQ} \otimes \mathbf{H}_{\mu^2_i, S} \Big),$$

где, по определению, из суммирования по $\mathbf{S}$ могут быть исключены целые либо полуцелые числа. Пространства $\mathbf{H}_{IQ} \subset \mathbf{H}_I$ – собственные подпространства спектральной задачи

$$\left(\frac{2\mathbf{I}+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} J_0(\xi) d\xi - \mathbf{Q} \right) \mid \psi_e \rangle = 0 \,. \tag{25}$$

Необходимость введения правил суперотбора – ограничения на пространства $\mathbf{H}_{IQ}$ – является следствием того факта, что в классической теории величина

$$1/2\pi \int_0^{2\pi} j_0(\xi) d\xi = j^0_0$$

является аннулятором. Поскольку

$$\frac{2\mathbf{I}+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} J_0(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a^+_{\beta,-n} a_{\beta,-n} - \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\beta,n} a_{\beta,n} \,,$$

величина $\mathbf{Q}$ в квантовом случае становится дискретной. Операторозначная функция $J_0(\xi)$ пропорциональна нулевой компоненте (в двумерном пространстве - времени ξ^0, ξ^1) тока введённого спинорного поля Ω. Это означает, что квантовое число $\mathbf{Q}$ может интерпретироваться как электрический заряд системы, а параметр[4] τ – как параметр, пропорциональный кванту электрического заряда.

[4]данный параметр появляется при построении отображения $\mathcal{V} \to \mathcal{V}^\star$ как множитель перед функцией $j_0(\xi)$.

Физические векторы состояния удовлетворяют уравнению

$$\Phi_1 \mid \psi_{phys}\rangle = 0, \tag{26}$$

которое, напомним, есть следствие связи (19). Равенство (26) определяет допустимые состояния и спектр масс теории. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением простого частного случая с конечным числом фермионных степеней свободы. Для этого сделаем редукцию

$$\mathbf{H}_I \longrightarrow \mathbf{H}_I^0 \subset \mathbf{H}_I .$$

Здесь

$$\mathbf{H}_I^0 = \bigoplus_{Q=0}^{2I+1} \mathbf{H}_{IQ}^0 \,,$$

пространство $\mathbf{H}_{I0}^0 = \{c|0\rangle\}$, а пространства $\mathbf{H}_{IQ}^0$ порождены векторами

$$a^+_{\beta_1,0}\ldots a^+_{\beta_Q,0}|0\rangle\,, \qquad \beta_i \neq \beta_j .$$

Заметим, $\dim \mathbf{H}_{IQ}^0 = C_{2I+1}^Q$, $\dim \mathbf{H}_I^0 = 2^{2I+1}$.

Для данной редукции $\omega_\beta(\xi) \equiv a_{\beta,0}$, поэтому

$$J_0(\xi) \equiv J_0 = const, \qquad J_a(\xi) \equiv J_a = const\,.$$

Коммутаторы "токов" J_a будут такими:

$$[J_a, J_b] = -\frac{4\mathrm{i}}{c(\mathbf{I})}\varepsilon_{abc}J_c\,. \tag{27}$$

Легко видеть, что в классической теории рассматриваемый случай отвечает связям $j_a(\xi) = j_a = const$. Такие связи на переменные $j_a(\xi)$ (и только они!) допускают редукцию скобок Пуассона (2) к конечномерной алгебре скобок

$$\{j_a, j_b\} = -\frac{2\alpha'}{\varrho_0^2}\varepsilon_{abc}j_c\,.$$

Из сказанного следует, что ограничение на пространство $\mathbf{H}_I^0$ с квантованием

$$j_0 \longrightarrow \left(\sqrt{(2\mathbf{I}+1)\gamma'/2}\right) J_0, \qquad j_a \longrightarrow (c(\mathbf{I})\gamma'/2)J_a, \quad a = 1,2,3$$

представляется естественным. (Заметим, что числовые множители $c(\mathbf{I})$, $2\mathbf{I}+1$ для данного частного случая выпадают и приведены лишь для соответствия с общей схемой.)

Топологическое условие (18) здесь будет иметь простой вид:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = n^2.$$

В квантовом случае имеем равенство

$$\sum_{a=1}^{3}\left[\left(a^+_{\alpha,0}\left(R^I[\sigma_a]\right)_{\alpha\beta}a_{\beta,0}\right]^2 = 4\mathbf{I}(\mathbf{I}+1),$$

так что в классических формулах при квантовании $n \to 2\gamma'\sqrt{\mathbf{I}(\mathbf{I}+1)}$. Заметим, что в силу выбранного определения полей ω_β редукция к их нулевым модам $a_{\beta,0}$ приводит к состояниям только с положительным зарядом. Для описания аналогичных состояний с отрицательным зарядом необходимо в исходном определении полей ω_β заменить $a_{\beta,0} \to a^+_{\beta,0}$.

После квантования связь (19) становится уравнением, определяющим допустимые ("физические") векторы в гильбертовом пространстве

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{\mu^2,s} \Big(\mathbf{H}^0_I \otimes \mathbf{H}_{\mu_i^2,s} \Big).$$

Структура пространства состояний, а также правила суперотбора по заряду $\mathbf{Q}$ позволяют искать такие векторы в виде

$$| \, \psi_{phys} \rangle = | \, \mu^2_\phi, s \rangle \, | \, \phi \rangle,$$

где $| \, \mu^2_\phi, s \rangle \in \mathbf{H}_{\mu^2,s}$, $| \, \phi \rangle \in \mathbf{H}_{IQ}$, и, возможно, $\mu^2 = \mu^2 \left(| \, \phi \rangle \right)$. Такое представление для $| \, \psi_{phys} \rangle$ приводит к уравнениям в пространствах $\mathbf{H}_{IQ}$:

$$\Phi_{IQ}(\mu^2, \mathbf{S}; a^+_{\beta,0}, a_{\beta,0}) | \phi \rangle = 0, \tag{28}$$

где

$$\mathbf{Q} = 0, \ldots, 2\mathbf{I}, \qquad , \mathbf{I} = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots.$$

Матрица Φ_{IQ} размерности $C^Q_{2I+1} \, \times \, C^Q_{2I+1}$ есть

$$\Phi_{IQ}(x, y) = A(J) x^2 + B(J) x + C(J) - D(J) y \,,$$

где

$$x \;\;=\;\; 2{\gamma'}^{-1} \left(\mu^2 - 2\sqrt{\mathbf{I}(\mathbf{I}+1)\mathbf{S}(\mathbf{S}+1)} \right) \,, \tag{29}$$

$$y \;\;=\;\; 2{\gamma'}^{-1} \left(\mu^2 + 2\sqrt{\mathbf{I}(\mathbf{I}+1)\mathbf{S}(\mathbf{S}+1)} \right) \,, \tag{30}$$

а явные выражения матриц $A, \ldots$ определены явной формой связи (19) для рассматриваемого случая и способом квантования. Таким образом, спектр масс $\{\mu_n\}$ частиц, описываемых представленной моделью, определяется уравнением

$$\det \, \Phi_{IQ}(x, y) = 0 \,, \tag{31}$$

где x и y есть выражения (29) и (30) соответственно.

Рассмотрим в качестве примера случай $\mathbf{I} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{Q} = 1$. В соответствии со сказанным выше, $\dim \mathbf{H}_{\frac{1}{2},1} = 2$, так что мы имеем здесь простейшее (тождественное) представление группы $SU(2)$. Матрицы $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$ и $D(J)$ в этом случае диагональны. Пусть $\tau\sqrt{\gamma'} = 1$. Вычисляя соответствующие матричные элементы, можно показать, что равенство (31) принимает вид:

$$y = 41.8741 x^2 + 0.4301 x + 0.0053.$$

Найденные отсюда значения величины $\mathbf{M} = \sqrt{\mu^2/\alpha'}$ при $\gamma' = 15$ и $\alpha' = 0.9\sqrt{3}$Гэв$^{-2}$ приведены в таблице.

Таблица

Спектр при $I = 1/2$, $Q = 1$ в простейшем случае

спин **S**	$\mathbf{M}_1$ (Гэв)	$\mathbf{M}_2$ (Гэв)	Известные К - мезоны
1	1.00	1.48	$K_1^{*+}(0.89)$; $K_1^{'+}(1.40)$
2	1.40	1.88	$K_2^{*+}(1.42)$; $K_2^{+}(1.79)$
3	1.72	2.20	$K_3^{*+}(1.77)$; $K_3(2.32)$
4	2.00	2.46	$K_4^{*+}(2.04)$; $K_4(2.50)$

Для сравнения в этой же таблице приведены значения масс К - мезонов как достоверно установленных, так и некоторых, требюующих дополнительных экспериментальных проверок (K_3 и K_4). Из таблицы видно, что спектр К - мезонов достаточно точно воспроизводится в рассматриваемом случае, даже если интерпретировать их здесь как чистые состояния. Подчеркнём важную деталь: в отличие от моделей мезонов, построенных на основе иных струнных теорий [38], мы имеем здесь только пару траекторй Редже, форма которых определена однозначно квантовым состоянием внутренних степеней свободы. Бесконечная серия "дочерних" траекторий отсутствует, что, как известно, и наблюдается экспериментально. Что касается других мезонов, не приведённых в таблице, то они в рамках предложенной теории интерпретируются либо как смешанные состояния (например, $K_1^{+}(1.27)$), либо как состояния с высшими возбуждениями степеней свободы $f(\xi)$ и $j_a(\xi)$. Обратим в этой связи внимание на форму графика на рисунке, объясняющую (на классическом уровне) существование тяжёлых K - мезонов с нулевым спином. Учёт высших возбуждений внутренних степеней свободы делает, по-видимому, возможным описание и экзотических мезонных структур, исследование которых активно продолжается [39].

Литература

[1] Де Альфаро В. и др. Токи в физике адронов. М.: Мир. 1976.

[2] Мандельстам С. // УФН. 1970. Т. 101. Вып. 3. С. 464.

[3] Scherk J. // Rev. Mod. Phys.. 1975. V. 47. No 1. P. 123.

[4] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат. 1987.

[5] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1,2. М.: Мир. 1990.

[6] Маршаков А.В. // ТМФ. 1999. Т. 121. No 2. С. 179.

[7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики.М.:Наука,1974.

[8] Bergmann P.G. // Rev. Mod. Phys. 1961. V. 33. No 4. P. 510.

[9] Фаддеев Л.Д. // ТМФ. 1969. Т. 1. No 1. С. 3.

[10] Гитман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.

[11] Филиппов А.Т. Калибровочный подход в теории релятивистских частиц и струн // Квантовая теория поля и физика высоких энергий. М.: Изд-во МГУ. 1987. С.88.

[12] Rohrlich F. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. No 13. P. 842.

[13] Pron'ko G. P. // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. No 3. P. 355.

[14] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

[15] Polyakov A.M. // Phys. Let. 1981. V. 103B. No 3. P. 207.

[16] Дирак П.А.М. // К созданию квантовой теории поля. Основные статьи 1925-1958 гг. М.: Наука, 1990.

[17] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука. 1986.
[18] Ширков Д.В. // УФН. 1970. Т. 102. Вып. 1. С. 87.
[19] Igi K. // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. No 1. P. 196.
[20] Ландсберг Л.Г. //УФН. 1994. Т. 164. No 11. С. 1130.
[21] Basdevant J. L., Boukraa S. // Ann. de Physique. 1985. V. 10. No 5. P. 475.
[22] Olsson M.G. // Phys. Rev. D. 1997. V. 55. No 9. P. 5479.
[23] Сергеенко М.Н. // ЯФ. 1993. Т. 56. Вып. 3. С. 140.
[24] Burakovsky L., Goldman T., Horwitz L. P. // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. No 11. P. 7119.
[25] Talalov S.V. // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2275.
[26] Талалов С.В. // ТМФ. 1990. Т. 83. No 1. С. 57.
[27] Талалов С.В. // ТМФ 1992. Т. 93. No 3. С. 506.
[28] Talalov S.V. Proc. Int. Workshop " Quantum Systems: New Trends and Methods." Editors A.O.Barut at all. World Scientific. Singapore-London-New Jersey-Hong Kong. 1995. P. 136.
[29] Талалов С.В. // ТМФ. 1996. Т. 106. No 2. С. 218.
[30] Talalov S.V. // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 845.
[31] Талалов С.В. // ТМФ. 1996. Т. 109. No 1. С. 80.
[32] Талалов С.В. // ТМФ. 1998. Т. 115. No 2. С. 233.
[33] Кулиш П.П., Рейман А.Г. // Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т.123. Л., 1983. С.67.
[34] Todorov I.T. // Quantum theory, groups, fields and particles. 1983. Ed.: A. O. Barut. Reidel Publ. Company. P. 293.
[35] Filippov A. T. Препринт ОИЯИ E2-87-806. Дубна. 1987.
[36] Witten E. // Comm. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455.
[37] Wigner E.P. // Ann. Math. 1939. V. 40. P.149.
[38] Бердников Е. Б., Пронько Г. П. // ЯФ. 1991. Т. 54. Вып. 3(9). С. 763.
[39] Карнаухов В.М., Кока К., Мороз В.И. Препринт ОИЯИ P1 - 98 - 169. Дубна, 1998.

NON-LINEAR REGGE TRAJECTORIES IN THE RELATIVISTIC MODELS OF EXTENDED PARTICLES

S. Talalov[5]

The dynamical system which is equivalent to 4D spinning string on a classical level is considered. The model differs from the corresponded string theory on quantum level. The system has quantum numbers which are interpreted as the mass $\mathbf{M}$, the spin $\mathbf{S}$, the isotopical spin $\mathbf{I}$ and the charge $\mathbf{Q}$. Deduced dependence $\mathbf{S} = a(\mathbf{M}^2)$ (Rejje trajectories) are non-linear in general. Some simple examples are considered.

[5]Serge Talalov, dept. of physics, Togliatty affiliation of Samara state pedagogical university