
ДИНАМИКА ОБОБЩЕННЫХ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В ВОЛНОВОДАХ КРУГЛОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ ЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ И КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.Л. Дербов, А.И. Быченков ¹

С помощью модификации обобщенного метода моментов построена конечно-мерная динамическая модель, описывающая распространение разъюстированного астигматического гауссова пучка с кручением в аксиально симметричной нелинейной среде. Исследован ряд нетривиальных особенностей динамики пучка в эллиптическом волноводе с параболическим поперечным профилем линейного показателя преломления и керровской нелинейностью. Показана возможность применения обнаруженных явлений для повышения эффективности керровского элемента в лазерах с пассивной синхронизацией мод.

Введение

Моделирование внеосевых пучков в поперечно-неоднородных нелинейных средах является необходимым элементом корректного описания лазеров и оптических волноводов при наличии разъюстировки [1-6]. В нашей работе [7] была получена конечномерная динамическая модель, описывающая распространение обобщенного гауссова пучка в аксиально-симметричной среде с произвольно зависящей от поля восприимчивостью при наличии астигматизма, отклонения от оси и кручения. Динамическими переменными такой модели являются параметры пучка (моменты), зависящие от продольной координаты. Анализ динамики данной модели был проведен для круглого волновода с квадратичной зависимостью линейного показателя преломления от радиальной координаты и керровской нелинейностью [8].

Целью настоящей работы является исследование динамики распространения обобщенных гауссовых пучков в волноводе эллиптического сечения. Как и в [8], линейный показатель преломления квадратично зависит от поперечных координат, а нелинейность является керровской. Для сравнения дается краткий обзор ключевых эффектов в круглом волноводе. Обнаруженные особенности динамики пучков в эллиптическом волноводе представляются перспективными для увеличения эффективности керровской синхронизации мод в лазерах.

¹Дербов Владимир Леонардович, Быченков Алексей Иванович, кафедра теоретической и ядерной физики Саратовского государственного университета

1. Динамическая модель распространения пучка

Распространение пучка будем описывать с помощью скалярного параболического уравнения для комплексной амплитуды электрического поля ψ [9]

$$\hat{H}\psi = [4i \frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 + \chi]\psi = 0, \quad (1)$$

где $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\chi = \chi' + i\chi''$ - комплексная восприимчивость среды, в общем случае зависящая от координат как явно за счет неоднородности среды, так и через поле за счет нелинейности. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде обобщенной гауссовой функции:

$$\psi_0 = A \exp[-(\eta x'^2 + \beta y'^2 + i\xi x''^2 + i\varepsilon y''^2)]. \quad (2)$$

Координаты x', y' и x'', y'' связаны с лабораторными координатами x, y соотношениями

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + x_0; \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0; \quad (3)$$

$$x'' = x \cos \theta + y \sin \theta + x_1; \quad y'' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_1. \quad (4)$$

Из (2), (3), (4) видно, что линии равной интенсивности и равной фазы в плоскости xOy лабораторной системы координат представляют собой кривые второго порядка с центрами в точках $(x_I = -x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi, y_I = -x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)$, $(x_P = -x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, y_P = -x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)$ и главными осями, повернутыми на углы φ и θ соответственно. Для интенсивности такая кривая представляет собой эллипс, а для фазы - эллипс или гиперболу. Параметры η и β суть обратные квадраты размеров пятна интенсивности, а параметры ξ и ε определяют значения кривизны волнового фронта в главных сечениях. Параметры пучка $A, \eta, \beta, \xi, \varepsilon, x_I, y_I, x_P, y_P, \varphi, \theta$ являются функциями продольной координаты z и рассматриваются как динамические переменные приближенной конечномерной модели пучка. При построении модели использовался обобщенный модифицированный метод моментов [10], в котором наилучшее приближенное решение (2) уравнения (1) ищется из условия ортогональности невязки $H\psi_0$ некоторому ортонормированному набору заданных функций (мод). Специфика подхода [10] заключается в использовании гибких гауссовых мод, содержащих те же параметры, что и сама пробная функция. Это позволяет резко уменьшить необходимое число базисных мод. В случае внеосевого пучка их удобно выбрать в виде [1, 2] $|m, n\rangle \equiv |m\rangle_x |n\rangle_y$,

где

$$\begin{aligned} |0\rangle_x &= N_x \exp[-\eta x'^2 - i\xi x''^2] & |1\rangle_x &= x' \sqrt{4\eta} |0\rangle_x; & |2\rangle_x &= \frac{1 - 4\eta x'^2}{\sqrt{2}} |0\rangle_x; \\ |0\rangle_y &= N_y \exp[-\beta y'^2 - i\varepsilon y''^2]; & |1\rangle_y &= y' \sqrt{4\beta} |0\rangle_y; & |2\rangle_y &= \frac{1 - 4\beta y'^2}{\sqrt{2}} |0\rangle_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Скалярное произведение определим как

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi dx dy. \quad (6)$$

Каждое из условий ортогональности $\langle mn|\hat{H}\psi_0\rangle = 0$, где $mn = 00, 01, 10, 11, 20, 02$, дает уравнение, включающее параметры пучка и их производные по продольной координате. Вместо (x_P, y_P) удобно ввести параметры

$$\alpha = \xi((x_P - x_I) \cos \theta + (y_P - y_I) \sin \theta), \quad \gamma = \varepsilon((x_P - x_I) \sin \theta - (y_P - y_I) \cos \theta),$$

которые определяют средний наклон пучка. Обозначая через $\delta = \varphi - \theta$ угол поворота пятна относительно фазового фронта, а через $I = |\psi_0(x' = 0, y' = 0)|^2 = |A|^2$ - интенсивность в максимуме, окончательно получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров пучка:

$$\frac{dI}{dz} = I \left(\xi + \varepsilon - \frac{\langle 20|\chi''|00\rangle}{2\sqrt{2}} - \frac{\langle 02|\chi''|00\rangle}{2\sqrt{2}} - \frac{\langle 00|\chi''|00\rangle}{2} \right); \quad (7)$$

$$\frac{d\eta}{dz} = \eta[2(\xi \cos^2 \delta + \varepsilon \sin^2 \delta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 20|\chi''|00\rangle]; \quad (8)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \beta[2(\xi \sin^2 \delta + \varepsilon \cos^2 \delta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 02|\chi''|00\rangle]; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dz} = & \xi^2 - \eta^2 \cos^2 \delta - \beta^2 \sin^2 \delta + \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta\langle 20|\chi'|00\rangle \cos^2 \delta + \\ & + \beta\langle 02|\chi'|00\rangle \sin^2 \delta] + \frac{\sqrt{\eta\beta}}{2}\langle 11|\chi'|00\rangle \sin 2\delta; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dz} = & \varepsilon^2 - \eta^2 \sin^2 \delta - \beta^2 \cos^2 \delta + \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta\langle 20|\chi'|00\rangle \sin^2 \delta + \\ & + \beta\langle 02|\chi'|00\rangle \cos^2 \delta] - \frac{\sqrt{\eta\beta}}{2}\langle 11|\chi'|00\rangle \sin 2\delta; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sin 2\delta \frac{\eta + \beta}{2(\eta - \beta)}(\varepsilon - \xi) + \frac{\sqrt{\eta\beta}}{2(\eta - \beta)}\langle 11|\chi''|00\rangle; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} = & \sin 2\delta \frac{\beta^2 - \eta^2}{2(\xi - \varepsilon)} - \frac{\sqrt{\eta\beta}}{2(\xi - \varepsilon)} \cos 2\delta \langle 11|\chi'|00\rangle - \\ & - \frac{\sin 2\delta}{2\sqrt{2}(\xi - \varepsilon)}[\beta\langle 02|\chi'|00\rangle - \eta\langle 20|\chi'|00\rangle]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{dx_I}{dz} = \alpha \cos \theta + \gamma \sin \theta + \frac{\sin \varphi}{4\sqrt{\beta}}\langle 01|\chi''|00\rangle - \frac{\cos \varphi}{4\sqrt{\eta}}\langle 10|\chi''|00\rangle; \quad (14)$$

$$\frac{dy_I}{dz} = \alpha \sin \theta - \gamma \cos \theta - \frac{\cos \varphi}{4\sqrt{\beta}}\langle 01|\chi''|00\rangle - \frac{\sin \varphi}{4\sqrt{\eta}}\langle 10|\chi''|00\rangle; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dz} = & -\gamma \frac{d\theta}{dz} + \frac{\sqrt{\eta}}{4} \cos \delta \langle 10|\chi'|00\rangle - \frac{\sqrt{\beta}}{4} \sin \delta \langle 01|\chi'|00\rangle - \\ & - \frac{\xi}{4\sqrt{\beta}} \sin \delta \langle 01|\chi''|00\rangle + \frac{\xi}{4\sqrt{\eta}} \cos \delta \langle 10|\chi''|00\rangle; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dz} = & \alpha \frac{d\theta}{dz} - \frac{\sqrt{\eta}}{4} \sin \delta \langle 10|\chi'|00\rangle - \frac{\sqrt{\beta}}{4} \cos \delta \langle 01|\chi'|00\rangle - \\ & - \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\beta}} \cos \delta \langle 01|\chi''|00\rangle - \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\eta}} \sin \delta \langle 10|\chi''|00\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Общая характеристика динамики пучка в квадратично-неоднородной среде с керровской нелинейностью

Рассмотрим прозрачную аксиально-симметричную волноводную среду с квадратичным поперечным профилем линейного показателя преломления и нелинейностью керровского типа:

$$\chi = \chi_0(1 - x^2/R_x^2 - y^2/R_y^2) + \chi_{nl}|\psi|^2. \quad (18)$$

Параметры χ_0 , R_x , R_y характеризуют величину и радиусы неоднородности линейного показателя преломления, χ_{nl} - оптическую нелинейность. При $R_x = R_y = R_0$ волновод является круглым, в противном случае - эллиптическим. С учетом (18) имеем

$$\begin{aligned} \langle 01|\chi'|00\rangle &= \frac{\chi_0}{R_y^2\sqrt{\beta}}(x_I \sin \varphi - y_I \cos \varphi); & \langle 10|\chi'|00\rangle &= -\frac{\chi_0}{R_x^2\sqrt{\eta}}(x_I \cos \varphi + y_I \sin \varphi); \\ \langle 11|\chi'|00\rangle &= 0; & \langle 02|\chi'|00\rangle &= \frac{\chi_0}{R_y^2} \frac{1}{2\sqrt{2}\beta} + I \frac{\chi_{nl}}{4\sqrt{2}}; & \langle 20|\chi'|00\rangle &= \frac{\chi_0}{R_x^2} \frac{1}{2\sqrt{2}\eta} + I \frac{\chi_{nl}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Для выяснения консервативности полученной динамической системы найдем дивергенцию вектора фазовой скорости F' , координаты которого суть правые части уравнений (7)-(17):

$$\text{div}(F') = \text{Sp}(J) = 5\varepsilon + 5\xi + \cos 2\delta \left\langle \frac{\eta + \beta}{\eta - \beta}(\varepsilon - \xi) - \frac{\beta^2 - \eta^2}{\xi - \varepsilon} + \frac{\beta - \eta}{8(\varepsilon - \xi)} I \chi_{nl} \right\rangle,$$

где J - матрица Якоби. Расчеты на основании численного решения уравнений (7)-(17) показывают, что усредненное по продольной координате z значение $\text{div}(F')$ равно нулю. Таким образом, объем фазового пространства сохраняется, а следовательно, система консервативна.

Как видно из (7)-(17), при распространении пучка пятно интенсивности может совершать сложное движение, включающее смещение, изменение размеров и вращение вокруг своей оси. Вид этого движения может сильно различаться в зависимости от начальных условий. Для волновода с квадратичным профилем линейной рефракции и керровской нелинейностью рассматриваемая 11-мерная динамическая система фактически сводится к 7-мерной. Это происходит благодаря отщеплению переменных x_I, y_I, α, γ , не входящих явно в правые части уравнений для остальных переменных. Поэтому целесообразно разделить все переменные системы на внешние, характеризующие сдвиг и наклон пучка как целого, и внутренние, описывающие его деформацию и вращение.

Для круглого волновода уравнения (14), (15) легко разрешимы аналитически:

$$\begin{aligned} x_I(z) &= x_I^0 \cos\left(\frac{\sqrt{\chi_0}}{2R_0}z\right) + \frac{2R_0}{\sqrt{\chi_0}}(\alpha_0 \cos \theta_0 + \gamma_0 \sin \theta_0) \sin\left(\frac{\sqrt{\chi_0}}{2R_0}z\right), \\ y_I(z) &= y_I^0 \cos\left(\frac{\sqrt{\chi_0}}{2R_0}z\right) + \frac{2R_0}{\sqrt{\chi_0}}(-\gamma_0 \cos \theta_0 + \alpha_0 \sin \theta_0) \sin\left(\frac{\sqrt{\chi_0}}{2R_0}z\right). \end{aligned}$$

Здесь через $x_I^0, y_I^0, \theta_0, \alpha_0, \gamma_0$ обозначены начальные значения соответствующих переменных. Таким образом, в проекции на плоскость xOy траектория центра пятна

имеет вид эллипса, форма которого однозначно определяется начальными значениями внешних переменных, углом поворота волнового фронта θ_0 и параметрами линейной части восприимчивости среды. Если, в частности, центры пятна и волнового фронта на входе в среду смещены относительно ее оси в одном направлении, то центр пятна гармонически осциллирует в фиксированной плоскости.

В эллиптическом волноводе пучок демонстрирует более сложное поведение. Покажем это, вычислив вторые производные от x_I , y_I :

$$\frac{d^2 x_I}{dz^2} = -\frac{\chi_0}{4R_x^2 R_y^2} [R_x^2 \sin \varphi (x_I \sin \varphi - y_I \cos \varphi) + R_y^2 \cos \varphi (x_I \cos \varphi + y_I \sin \varphi)] ; \quad (19)$$

$$\frac{d^2 y_I}{dz^2} = -\frac{\chi_0}{4R_x^2 R_y^2} [-R_x^2 \cos \varphi (x_I \sin \varphi - y_I \cos \varphi) + R_y^2 \sin \varphi (x_I \cos \varphi + y_I \sin \varphi)] . \quad (20)$$

Видно, что на характер движения центра пятна определяющее влияние оказывает его вращение, описываемое переменной φ . Как было упомянуто выше, при $\delta = 0$ пятно и волновой фронт сохраняют в процессе распространения первоначальную ориентацию. Если для этого случая $\varphi_0 = 0$, то уравнения 20 описывают гармонические осцилляции величин x_I^0 , y_I^0 с частотами $\frac{\chi_0}{4R_x^2}$ и $\frac{\chi_0}{4R_y^2}$ соответственно, а траектория центра пятна приобретает вид фигур Лиссажу. В более общем случае особенности динамики внешних переменных будут описаны ниже.

При начальном условии $\delta = 0$ система допускает еще большее упрощение и становится 5-мерной. Соответствующие решения для φ и θ в этом случае представляют собой константы, что означает распространение пучка с неизменной ориентацией пятна и фазового фронта относительно лабораторной системы координат. Уравнения для α , γ в этом случае также имеют гармонические решения. Их периоды, как и периоды изменения переменных x_I , y_I , в случае круглого волновода совпадают и равны $T = 4\pi R_0 / \sqrt{\chi_0}$.

Для оптически прозрачных сред ($\chi'' = 0$) система (7) - (17) имеет две сохраняющиеся величины. Одной из них является мощность пучка

$$P = \frac{\pi I}{2\sqrt{\eta\beta}}.$$

Это легко увидеть, вычислив производную по z от P :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2(\eta(z)x'^2 + \beta(z)y'^2)] \operatorname{Im}[\chi''] dx' dy'.$$

Эта величина, очевидно, равна нулю при любом z , если $\chi'' = 0$. Теоретически возможен также экзотический случай сохранения мощности при ненулевой χ'' , меняющей знак в плоскости поперечного сечения, то есть когда поглощение в одних точках компенсируется усилением в других. Второй сохраняющейся при распространении пучка величиной является

$$Q = \frac{(\eta - \beta)(\varepsilon - \xi)}{\eta\beta} \sin(\varphi - \theta).$$

3. Сравнение динамики пучка в круглом и эллиптическом волноводах

3.1. Стационарные и периодические режимы

В рамках представленной модели поиск стационарных режимов и анализ их устойчивости удастся провести аналитически. В результате стандартной процедуры находим начальные условия, соответствующие стационарной волноводной моде

$$\delta = 0, \quad \eta_0 = \frac{\chi_{nl} R_x I + \sqrt{64\chi_0 + \chi_{nl}^2 R_x^2 I^2}}{16R_x},$$

$$\beta_0 = \frac{\chi_{nl} R_y I + \sqrt{64\chi_0 + \chi_{nl}^2 R_y^2 I^2}}{16R_y}, \quad \varepsilon = \xi = 0.$$

При этих условиях пятно сохраняет свои размеры и ориентацию, а волновой фронт остается плоским в процессе распространения. Отметим, что внешние переменные x_I , y_I , α , γ сохраняются, если их начальные значения равны нулю, и осциллируют в противном случае. При этом пятно неизменной формы и ориентации совершает по поперечной плоскости поступательное движение.

Неизменность размеров пятна и кривизны волнового фронта достигается также в специфическом для данной системы режиме, когда постоянны не сами углы φ и θ , а их разность δ , от которой исключительно и зависят правые части уравнений для внутренних переменных (7)-(11). Начальные значения переменных должны для этого удовлетворять условиям $\delta = \pi/4$, $\xi = -\varepsilon$, которые автоматически обеспечивают постоянство переменных η , β . Стационарные значения последних ищутся из условий

$$\frac{d\delta}{dz} = 0; \quad \frac{d\xi}{dz} = 0 \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = 0, \quad (21)$$

которые с учетом явного вида правых частей (12), (13), (10), (11) и равенства $|\xi| = |\varepsilon|$ приводят к системе уравнений 6-го порядка относительно η_0 , β_0 . В этом режиме по мере распространения происходит равномерное вращение астигматического пятна неизменного размера со скоростью, равной скорости вращения волнового фронта. Значения переменных I , ε задаются произвольно и определяют собой все остальные начальные условия, то есть фактически параметризуют систему. В пределах физически разумных значений I , ε и характеристик волновода χ_0 , R_x , R_y , χ_{nl} у уравнений для η_0 , β_0 имеется два действительных положительных решения (η_1, β_1) и (η_2, β_2) . В частности, для круглого волновода ($R_x = R_y = R_0$) они являются симметричными, то есть $\eta_1 = \beta_2$, $\eta_2 = \beta_1$.

Для выяснения устойчивости найденных режимов вычислим собственные значения λ_i матрицы Якоби системы на соответствующих стационарных решениях. Рассмотрим вначале стационарный волноводный режим без вращения пятна. Для круглого волновода получаем

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\chi_0}/R_0; \quad \lambda_{4,5} = \pm i \left(\frac{I\chi_{nl}\eta}{4} + \frac{\chi_0}{R_0^2} \right)^{1/2}.$$

Для эллиптического волновода ($R_x \neq R_y$)

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm iN_1(f_n, p_m); \quad \lambda_{4,5} = \pm iN_2(f_n, p_m),$$

где N_1 и N_2 - нелинейные функции динамических переменных f_n и параметров среды p_m ; явные выражения этих функций не приводятся здесь из-за громоздкости. При $\chi_{nl} = 0$ эти функции значительно упрощаются и приобретают вид:

$$N_1(f_n, p_m) = \frac{\sqrt{\chi_0}}{R_x}; \quad N_2(f_n, p_m) = \frac{\sqrt{\chi_0}}{R_y}.$$

Для режима равномерного вращения пятна без пульсаций спектр собственных значений матрицы Якоби имеет сходную структуру. Отличие состоит в том, что, как было отмечено выше, в этом случае существуют две ветви решений системы (21). Аналитическое выражение соответствующих собственных значений в этом случае найти не удастся, можно указать лишь структуру спектра. Так, для $R_x = R_y$ имеем:

$$\lambda_{1,2,3} = 0; \quad \lambda_{4,5} = \pm i\Omega(p_m^{lin}); \quad \lambda_{6,7} = \pm iN(f_n, p_m),$$

где N - некоторая нелинейная функция от f_n и p_m , Ω - функция от параметров линейной части восприимчивости p_m^{lin} . На симметричных решениях (η_1, β_1) и (η_2, β_2) собственные значения матрицы Якоби совпадают. В эллиптическом волноводе ($R_x \neq R_y$)

$$\lambda_{1,2,3} = 0; \quad \lambda_{4,5} = \pm iN_3(f_n, p_m); \quad \lambda_{6,7} = \pm iN_4(f_n, p_m).$$

В противоположность круглому волноводу для разных ветвей решения получаются существенно разные собственные значения. В качестве примера на рис.1 показана численно найденная зависимость величины N_3 , определяющей собственные значения $\lambda_{4,5}$, от начального значения кривизны волнового фронта ε для двух решений (η_1, β_1) и (η_2, β_2) системы (21).

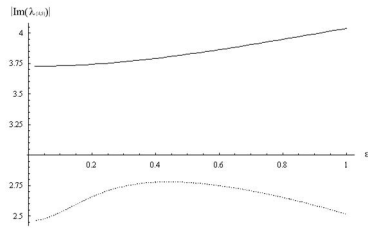


Рис. 1. Зависимость $N_3(\varepsilon_0)$ для двух решений (η_1, β_1) и (η_2, β_2) , отвечающих режиму равномерного вращения пятна без пульсации

Для интерпретации полученных результатов важно напомнить, что появление чисто мнимых собственных значений в теории нелинейных динамических систем отвечает рождению колебательного режима. В случае орбитально устойчивых колебаний мнимая часть собственного значения имеет смысл круговой частоты.

Анализ устойчивости наиболее просто провести в случае круглого волновода без керровской нелинейности ($\chi_{nl} = 0$). В этом случае мультипликаторы периодического решения можно найти без явного вычисления матрицы монодромии Y , сопоставив периоды колебаний фазовых переменных исходной системы (7)-(17) и ее линеаризованного аналога. Эти периоды оказываются равными. Поскольку $y(z + T) = Y(T)y(z)$, где $y(z)$ - решение линеаризованной системы, T - период решения исходной системы, то матрица $Y(T)$ единичная. Мультипликаторы такого периодического решения равны 1, и режим орбитально устойчив.

При удалении начальной точки фазовой траектории от области стационарных решений амплитуда колебаний растет плавно, что подтверждается численными экспериментами. В качестве примера рассмотрим амплитуды осцилляций переменных η и β в круглом волноводе при отклонении от условий, обеспечивающих режим равномерного вращения пятна без пульсации. Использовался следующий базовый набор параметров среды и начальных значений переменных пучка: $\chi_0 = 5$, $R_0 = 1.5$, $\chi_{nl} = 0.06$; $I = 50$, $\eta = 1.56613$, $\beta = 0.21563$, $\varepsilon = -0.6$, $\xi = 0.6$, $x_I = 0.02$, $y_I = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = -0.01$. На рис. 2 показано поведение амплитуд осцилляций переменных η , β при изменении I , δ и ξ , причем варьирование последней из этих величин производилось с соблюдением условия симметрии седловидного волнового фронта $\xi = -\varepsilon$. Видно, что осцилляции пятна плавно нарастают с удалением начальных значений всех выбранных переменных от значений, соответствующих режиму равномерного вращения без пульсации.

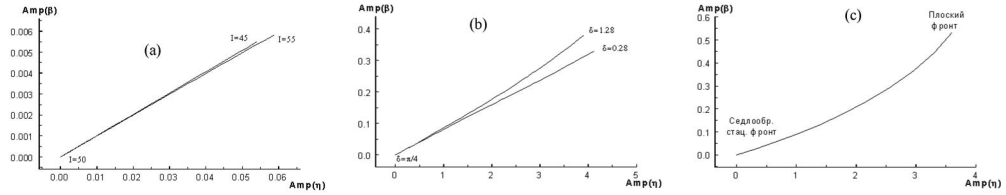


Рис. 2. Малые изменения амплитуд колебаний переменных η и β при отклонении I (a), δ (b) и ξ (c) от значений, соответствующих режиму равномерного вращения без пульсации

Таким образом, Ω и $\sqrt{\chi_0}/R_0$ имеют смысл частот периодических колебаний, реализующихся в случае распространения пучка в линейной среде. Эти частоты, согласно проведенным расчетам, равны. Остальные собственные значения определяются не только параметрами среды, но и стационарными значениями фазовых переменных. Поэтому в оптически нелинейной среде колебания переменных пучка, возникающие при отклонении от состояния равновесия, квазипериодичны. Из явной формулы для $\lambda_{4,5}$ следует, что при рождении колебательного режима из состояния стационарного волноводного распространения частота квазипериодических колебаний складывается из частоты колебаний в линейной среде и малой добавки. То же можно сказать и о режиме распространения пучка с равномерно вращающимся пятном без пульсаций.

В случае линейной среды спектр колебаний системы, возникающих из режима равномерного вращения пятна без пульсаций, содержит две частоты, причем $\Omega = 2N(\chi_{nl} = 0)$. При одной и той же величине показателя нелинейности χ_{nl} значение функции N отлично от соответствующего собственного значения матрицы Якоби в режиме стационарного волноводного распространения.

3.2. Квазипериодические режимы, нелинейные резонансы, рождение циклов

Как уже было отмечено, при $\chi_{nl} \neq 0$ зависимость собственных значений матрицы Якоби от динамических переменных приводит к возникновению квазипериодических колебаний. Можно интерпретировать это как проявление нелинейной связи динамических переменных, приводящей к их взаимной модуляции, благодаря которой возникают новые частоты, в общем случае не кратные друг другу.

Для визуализации и качественного анализа динамических эффектов будем использовать методы фазовых портретов и отображений Пуанкаре. В большинстве примеров в качестве секущей выбиралась поверхность $I = \text{const}$, поскольку в этом случае получаемые результаты имеют легко интерпретируемый физический смысл.

Рождение квазипериодического режима отвечает превращению периодической орбиты в инвариантный тор, что приводит к трансформации стационарной точки отображения Пуанкаре в некоторую всюду плотно заполненную область (рис. 3, а, б).

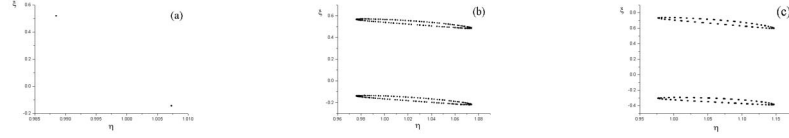


Рис. 3. Изменение сечения Пуанкаре ($I = \text{const}$) в проекции на плоскость (ξ, η) с ростом параметра керровской нелинейности: (а) - периодические колебания при $\chi_{nl} = 0$; (б) - превращение периодической орбиты в инвариантный тор при $\chi_{nl} = 0.03$; (с) - нелинейная синхронизация при $\chi_{nl} = 0.07$

Рассмотрим более детально особенности динамики пучка для круглого и эллиптического волноводов. Расчеты для круглого волновода $R_x = R_y = R_0$ проводились при начальных условиях $I = 50$, $\eta = 0.7$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = -0.4$, $\xi = -0.1$, $x_I = 0.02$, $y_I = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = -0.01$. Параметры волновода брались равными $\chi_0 = 5$, $R_0 = 1.5$, постоянная Керра χ_{nl} варьировалась в пределах от 0 до 0.08.

При начальном условии $\delta(0) = 0$ величина $\delta(z)$ остается равной нулю для любого z , так что $\varphi(z) = \theta(z) = \text{const}$, а значит пятно и волновой фронт сохраняют первоначальную ориентацию. Изменяя значение параметра χ_{nl} в интервале $(0.06, 0.08)$, можно наблюдать ряд нелинейных резонансов, проявляющихся в фазовой синхронизации двух и более переменных. Для пар переменных этот эффект легко фиксируется на соответствующих фазовых портретах. Среди множества примеров этого явления, очевидно, наибольший интерес представляет синхронизация переменных пространственного сдвига $(x_I, y_I, \alpha, \gamma)$ по отношению к внутренним переменным $(\eta, \beta, \varepsilon, \xi)$. Один из подобных примеров показан на рис. 4

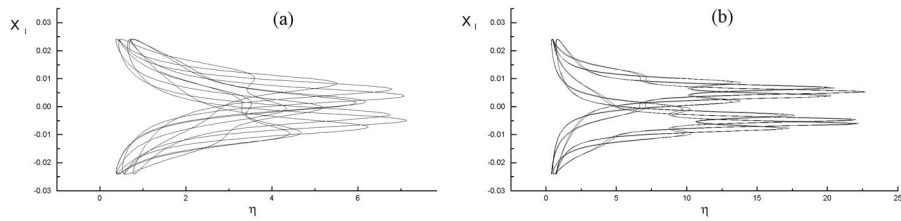


Рис. 4. Синхронизация относительного фазового сдвига внутренней переменной η и внешней x_I при увеличении параметра керровской нелинейности от $\chi_{nl} = 0.03$ (а) до $\chi_{nl} = 0.08$ (б)

Аналогичный эффект наблюдался при различных значениях χ_{nl} для произвольных пар динамических переменных. Благодаря тому, что секущая поверхность Пуанкаре может быть выбрана произвольно, оказывается возможным наблюдение фазовой синхронизации трех и более переменных. Вырождение всюду плотного инвариантного тора в почти замкнутую орбиту проявляется в виде заметного сокращения числа различных точек отображения Пуанкаре (см., например, рис. 3, с).

Наряду с фазовой синхронизацией, наблюдался обратный эффект, когда относительный фазовый сдвиг неупорядоченно покрывает отрезок $[0, 2\pi]$. Такое поведение можно наблюдать в окрестности точки синхронизации, например, для переменных η и x_I (рис. 4,а).

При увеличении χ_{nl} взаимная модуляция переменных (η, ξ) (или (β, ϵ)) приводит к рождению циклов. Это явление может быть легко обнаружено, например, в проекции фазовой траектории на плоскость (η, ξ) (рис. 5,а,б).

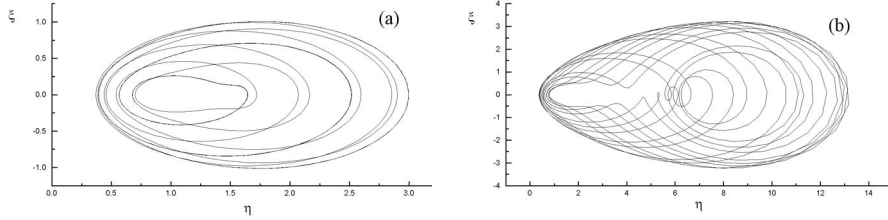


Рис. 5. Рождение циклов в проекции фазовой траектории на плоскость (η, ξ) при изменении χ_{nl} от 0,05 (а) до 0,08 (б)

Для лучшего понимания механизма рождения циклов полезно рассмотреть спектральное представление величины $\eta(z)$ (рис. 6).

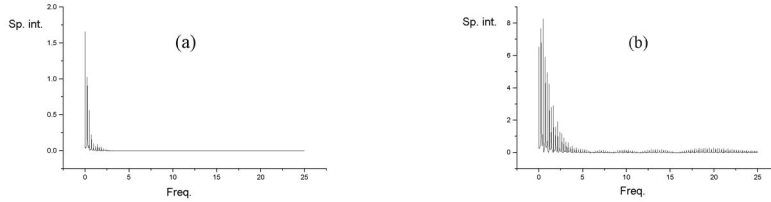


Рис. 6. Спектральное представление переменной $\eta(z)$ при $\chi_{nl}=0.08$ (а) и 0.1(б).

Видно, что рост χ_{nl} приводит к смещению максимума распределения спектральной интенсивности. Качественно этот эффект уже был получен выше, когда были найдены квазичастоты колебаний в нелинейной среде вблизи стационарной точки и показано, что они пропорциональны χ_{nl} . Показанные на рис. 6 результаты свидетельствуют о том, что появление новых циклов связано не только с нелинейным фазовым сдвигом колебаний динамических переменных, но и с генерацией новых частот.

Перейдем к рассмотрению более общего случая, когда пучок имеет ненулевое кручение ($\delta \neq 0$). На первый взгляд, появление дополнительных степеней свободы позволяет ожидать более сложного поведения пучка. В действительности динамика пучка оказывается более простой. Выводы, относящиеся к эффекту фазовой синхронизации при $\delta = 0$, остаются верными и при $\delta \neq 0$. Другие эффекты испытывают качественные изменения. Так, например, сравнение рис. 4,а и рис. 7 показывает, что для пучка с кручением эффект фазового рассогласования исчезает.

Расчеты показывают, что этот вывод сохраняет силу во всем диапазоне физически допустимых значений показателя нелинейной рефракции.

При $\delta \neq 0$ для тех же начальных условий, что и в рассмотренных выше примерах, было установлено также отсутствие генерации новых циклов. Вместо этого наблюдается слабая амплитудная модуляция переменных (рис. 8).

Эффект генерации циклов удалось наблюдать только в том случае, когда начальные значения η и β значительно отличаются друг от друга.

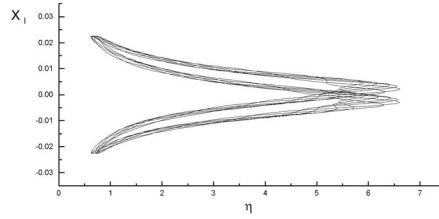


Рис. 7. Фазовый сдвиг между η и ξ) при $\chi_{nl} = 0.08$ для пучка с $\delta \neq 0$

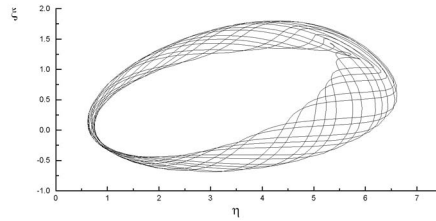


Рис. 8. Типичная проекция фазовой траектории на плоскость (η, ξ) при $\delta \neq 0$. Использовалось $\chi_{nl}=0.08$

Остановимся на особенностях поведения переменной $\delta(z)$, описывающей поворот пятна относительно волнового фронта. В исследованных нами случаях эта величина совершала колебания постоянной амплитуды. Уменьшение начального значения δ , равно как и увеличение параметра керровской нелинейности, приводит к росту этой амплитуды. Сравнивая зависимости $\eta(z)$ и $\beta(z)$ для начальных условий $\delta(0) = 0$ и $\delta(0) \neq 0$, можно заключить, что кручение пучка является синхронизирующим фактором.

Перейдем к анализу особенностей эллиптического волновода ($R_x \neq R_y$). Расчеты показывают, что в этом случае качественные особенности поведения пучка гораздо больше зависят от начальных условий, чем в круглом волноводе. В качестве базового использовался следующий набор начальных значений переменных: $I = 50$, $\eta = 1.1$, $\beta = 1.9$, $\varepsilon = 0.4$, $\xi = 0.1$, $x_I = 0.01$, $y_I = 0.02$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.02$. Анализ проводился при фиксированных параметрах волновода $\chi_0 = 50$ и $R_y = 1.5$ и вариации параметров χ_{nl} и R_x в пределах от 0 до 0.08 и от 1.5 до 3.0, соответственно.

Начнем с исследования динамики пучка без начального кручения ($\delta(0) = 0$). Из исходных уравнений легко видеть, что при этом условии, как и для круглого волновода, волновой фронт и пятно сохраняют первоначальную ориентацию относительно лабораторной системы координат при распространении пучка. Явлений синхронизации внешних и внутренних переменных, а также рождения циклов в физически допустимом диапазоне значений χ_{nl} не наблюдается (см. типичные фазовые портреты на рис. 9).

Это, очевидно, связано с появлением в системе несоизмеримых частот при ненулевой нелинейности. Признаки синхронизации между переменными из группы внутренних обнаруживались лишь на небольших длинах распространения.

По сравнению с круглым волноводом, в эллиптическом волноводе усложняется динамика внешних переменных, определяющих движение пучка в целом. В отсутствие оптической нелинейности, как уже говорилось выше, траектория центра пятна однозначно определяется эллиптичностью волновода и принимает вид фигур Лиссажу (рис. 10).

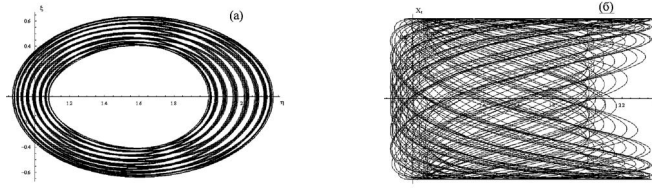


Рис. 9. Типичные фазовые портреты (ξ, η) и (x_I, η) для пучка в эллиптическом волноводе

Наличие начального кручения $\delta(0) \neq 0$ не приводит к качественным изменениям в отношении эффектов синхронизации и рождения циклов. Соответствующие фазовые портреты отличаются от рис. 9 лишь большей сложностью областей, заполняемых фазовой траекторией. Движения центра пятна по осям x и y , как было показано ранее, при $\varphi \neq 0$ становятся связанными и начинают зависеть от динамики внутренних переменных. В зависимости от мощности пучка наблюдались траектории, которые либо были сильно локализованы вблизи оси волновода (захват пучка), либо могли удаляться от нее на расстояния, сравнимые с R_x, R_y . В последнем случае на практике удавалось численно наблюдать начальный участок траектории, имеющий вид расходящейся спирали. В бесконечной среде с квадратичной неоднородностью показателя преломления движение пучка всегда финитное [11]. Однако в реальных волноводах с конечным радиусом градиентной сердцевинки, который должен быть мал по сравнению с R_x, R_y , заметное удаление пятна от оси связано с вытеканием излучения из волновода. В этом смысле квазипериодичность слаболокализованных траекторий является теоретической абстракцией, и в реальном волноводе движение пучка может быть инфинитным. Поэтому режим нелинейного захвата представляет наибольший интерес. При прочих одинаковых условиях с ростом эллиптичности волновода R_x/R_y реализация этого режима достигается при больших интенсивностях. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть волновод почти круглый: $R_x = 1.55$ и $R_y = 1.5$. При увеличении интенсивности проекция траектории центра пятна на поперечную плоскость xOy меняется, как показано на рис. 11.

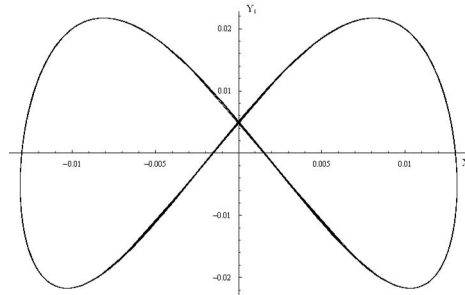


Рис. 10. Траектория движения центра пятна в проекции на поперечную плоскость в линейной среде для случая пучка без кручения при $\frac{R_x}{R_y} = \frac{1}{2}$

Видно, что увеличение начальной интенсивности превращает расходящуюся траекторию (рис. 11,а) в локализованную (рис. 11,б), которая далее стремится к эллиптической (рис. 11,с). При переходе к сильно эллиптическому волноводу с $R_x = 2.0$ и $R_y = 1.5$ ситуация меняется на противоположную - более высокие интенсивности приводят к делокализации траектории пучка (рис. 12).

Указанный эффект может использоваться для ограничения мощности проходящего через эллиптический волновод пучка как сверху, так и снизу. При некоторых

значениях эллиптичности волновода R_x/R_y (около 0.8 для рассматриваемого здесь набора начальных условий и параметров) все траектории становятся локализованными, независимо от начальной интенсивности.

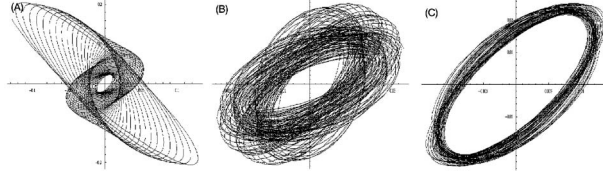


Рис. 11. Траектории центра пятна в почти круглом волноводе с $R_x = 1.55$, $R_y = 1.5$ при трех значениях начальной интенсивности $I(0) = 30(a)$, $50(b)$, $70(c)$

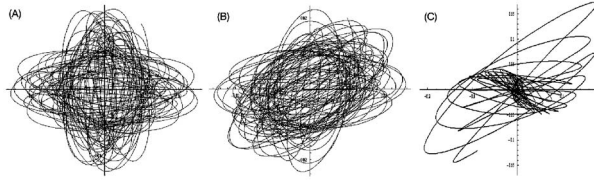


Рис. 12. Движение центра пятна в волноводе с параметрами $R_x = 2.0$, $R_y = 1.5$ при $I_0 = 30(a)$, $50(b)$, $70(c)$

Анализ уравнений (14), (15) показывает, что ключевое влияние на динамику переменных x_I, y_I оказывает характер вращения пятна, то есть зависимость $\varphi(z)$. Этот факт можно использовать для управления движением пятна путем изменения начального угла $\varphi(0)$. Для демонстрации исключим усложняющие дело пульсации размера пятна, интенсивности и кривизны волнового фронта, обеспечив режим равномерного вращения пятна. Соблюдая условие $\delta = \pi/4$, можно варьировать $\varphi(0)$ и за счет этого качественно изменять траекторию пятна, как это, например, показано на рис. 13. Видно, что траектория центра пятна на рис. 13,а никогда не попадает в окрестность оси волновода, а на рис. 13,б - наоборот.

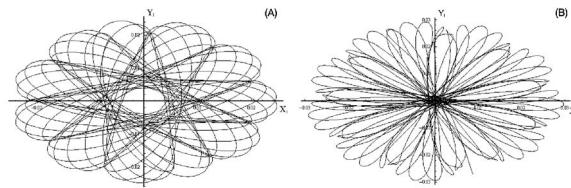


Рис. 13. Траектории центра пятна в режиме равномерного вращения для двух начальных значений $\varphi(0) = \pi/4$ (а) и $\pi/4+1$ (б) при $R_x = 3$, $\eta = 2.52$, $\beta = 1.69$

Описанные эффекты, как будет продемонстрировано ниже, могут быть использованы для повышения эффективности работы керровского элемента в лазерах с синхронизацией мод.

4. Новые возможности повышения эффективности керровской синхронизации мод

Классическая схема керровской синхронизации мод, служащая для генерации ультракоротких световых импульсов (см., например, [12]), строится на том, что за счет нелинейной рефракции размер пятна при высокой интенсивности пучка гораздо меньше, чем при низкой. Подавление генерации слабой составляющей лазерного поля обеспечивает диафрагма, которая располагается так, чтобы разница в поглощении сильной и слабой частей импульса была максимальной. В результате при многократном прохождении длительность импульса уменьшается. В аксиально-симметричных пучках круглого сечения достижимая степень дискриминации слабых полей по сравнению с сильными оказывается порядка константы Керра, т.е. весьма малой. Покажем, что для внеосевых астигматических пучков с кручением можно использовать не только нелинейную фокусировку, но и зависимость скорости вращения пятна от интенсивности (см. рис. 14), что позволяет существенно повысить поглощение слабого пучка по сравнению с сильным на оптимально подобранной диафрагме.

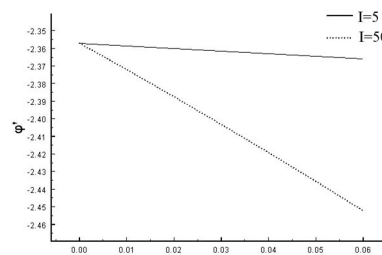


Рис. 14. Зависимость скорости изменения угла φ в режиме равномерного вращения пятна от значения постоянной Керра для двух различных мощностей пучка

Для численного исследования положим $I(0) = 5$ для слабого пучка и $I(0) = 50$ для сильного. Остальные начальные значения переменных и параметры среды примем совпадающими. В качестве выходной диафрагмы используем прямоугольное отверстие, размеры которого совпадают с размерами осей эллиптического пятна интенсивного пучка. Отверстие располагается так, чтобы обеспечить максимальное пропускание сильного пучка, при этом его потери составляют около 8% от полной мощности. Слабый пучок испытывает большое поглощение в двух случаях: 1) когда размеры его пятна из-за нелинейной фокусировки больше, чем у сильного; 2) когда у обоих пучков пятна имеют вид сильно вытянутых эллипсов, большие оси которых перпендикулярны друг другу.

Механизм первого типа не отличается от классической аксиально-симметричной схемы, его эффективность пропорциональна константе Керра. Остановимся более подробно на механизме второго типа. Для нахождения соответствующего положения диафрагмы построим вспомогательную функцию $f(z) = |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)|(\eta_1 - \eta_2)(\beta_1 - \beta_2)$. Большая дискриминация слабого пучка достигается при максимальных по модулю отрицательных значениях $f(z)$. Ввиду многомерности задачи, такой критерий лишь приблизительно указывает наиболее эффективные положения диафрагмы на оси z , причем в отсутствие смещения пучка относительно оси волновода. Численный анализ показывает, что интересующее нас расположение пятен достигается на достаточно длинных дистанциях, составляющих около 10-15 дифракционных длин.

Действительно, если принять среднюю скорость вращения пятна равной ее постоянному значению в режиме равномерного вращения без пульсаций (рис. 14), то ее зависимость от постоянной Керра линейна. Большие длины распространения делают данную методику трудно реализуемой экспериментально.

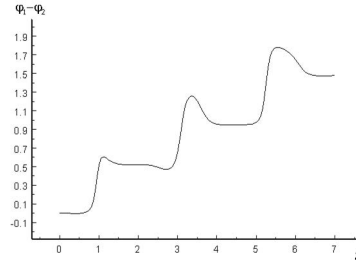


Рис. 15. ($I(0) = 5$) и сильного ($I(0) = 50$) пучков. Начальные условия $\eta = 1.1$, $\beta = 1.9$, $\varepsilon = 0.4$, $\xi = 0.1$, $x_I = 0.02$, $y_I = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = -0.01$, $\varphi = 0.7$, $\theta = 0$. Параметры волноводной среды $\chi_0 = 50$, $R_x = 3.0$, $R_y = 1.5$ и $\chi_{nl} = 0.06$

Усиления эффекта можно добиться путем использования особенностей движения пятна в эллиптическом волноводе. Так, например, при условиях, указанных в подписи к рис. 15, удастся наблюдать 30% поглощение слабого пучка при 8% поглощении сильного на расстояниях всего в 2-3 дифракционных длины. Для практической реализации важен также продольный по оси z размер области, в которой дискриминация слабого пучка диафрагмой остается значительной. В эллиптическом волноводе, как видно из рис. 15, протяженность этих областей составляет порядка 0,3 дифракционной длины. Это примерно в 5 раз больше, чем в круглом волноводе.

Авторы благодарны Л.А. Мельникову и Е.А. Романовой за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Casperson L.W. Gaussian light beams in inhomogeneous media // Appl. Opt. 1973. V.12. N.10. P.2434-2441.
- [2] Casperson L.W. Beam modes in nonlinear lens-like medium and cavities // JOSA. 1976. V.66. N.12. P.1373-1379.
- [3] Кукушкин В.Г. Разъюстированный лазерный резонатор с неоднородными оптическими элементами // Квантовая электроника. 1987. Т.14. N.2. С.381-383.
- [4] Бекшаев А.Я., Гримблатов В.М. Разъюстированный оптический резонатор с линзоподобной средой // Квантовая электроника. 1980. Т.7. N.6. С.1168-1179.
- [5] Бойцов В.Ф., Владимиров А.Г. Свойства кольцевого оптического резонатора с разъюстированной пространственно неоднородной средой // Оптика и спектроскопия. 1981. Т.51. N.4. С.708-713.
- [6] Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Аппроксимация возмущений оптического пучка в условиях теплового самовоздействия // Квантовая электроника. 1995. Т.22. N.2. С.187-192.
- [7] Мельников Л.А., Дербов В.Л., Быченков А.И. Моделирование внеосевых гауссовых пучков с астигматизмом и кручением в нелинейной волноводной среде // Оптика и спектроскопия, 1998. Т.85. N.1. С.100-105.
- [8] Melnikov L.A., Derbov V.L., and Bychenkov A.I. Dynamics of a misaligned astigmatic twisted Gaussian beam in a Kerr-nonlinear parabolic waveguide // Phys. Rev. 1999. V.60. N.6. P.7490-7496.

- [9] Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.:Наука,1979.
- [10] Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. Новый метод расчета самовоздействия и его применение к анализу сдвига резонансов насыщенного поглощения в гауссовых пучках // Квантовая электроника. 1987. Т.14. N.12. С.2529-2539.
- [11] Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512с.
- [12] French P.M.W. The generation of ultra-short laser pulses // Repts. Progr. Phys. 1995. V.58. N.2. P.169-262.

DYNAMICS OF GENERALIZED GAUSSIAN BEAMS IN CIRCULAR AND ELLIPTIC WAVEGUIDES WITH QUADRATIC PROFILE OF LINEAR REFRACTION AND KERR NONLINEARITY

V. Derbov, A. Bychenkov²

Using the modified generalized method of moments the equation of motion are derived for the parameters of a misaligned astigmatic twisted Gaussian beam in an axially symmetric nonlinear medium. These equations present the beam propagation as a finite-dimensional dynamical problem, the propagation distance playing the role of time. Nontrivial features of beam dynamics are revealed in circular and elliptic waveguides with parabolic profile of linear refraction index and Kerr nonlinearity. Application of dynamical effects in elliptic waveguides are proposed for high-efficiency mode-locking devices.

²Vladimir Derbov, Alexei Bychenkov, chair of theoretical and nuclear physics, Saratov state university