МЕХАНИКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕОЛОГИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В.П. Радченко, М.Н. Саушкин[1]

Предложен метод решения краевой задачи о неупругом реологическом деформировании и разрушении толстостенной сферы под действием внутреннего давления. Использованы определяющие соотношения, учитывающие деформации пластичности, ползучести и эффекты рассеянного накопления поврежденности. Для некоторых частных случаев проведено сравнение полученных результатов с классическими решениями. Выполнен детальный анализ задачи оценки кинетики напряженно-деформируемого состояния сферы в разнообразных условиях нагружения. Показано, что при постоянном внутреннем давлении деформация пластичности теряет свойство склереономности и приобретает реономный характер.

Интерес к толстостенной сферической оболочке обусловлен как прикладными инженерными задачами, так и чисто теоретическими потребностями в силу того, что толстостенная сфера наряду с толстостенной трубой является полигоном для отработки различных вариантов реологических определяющих соотношений для материалов.

Задача оценки напряженно-деформируемого состояния сферической толстостенной оболочки с практической стороны обусловлена тем, что она используется в качестве емкостей для хранения жидкостей под высоким давлением, различного рода испытательных камер, конструктивных элементов авиационной и космической техники, защитных элементов атомных реакторов [1, 2]. Естественно, что при проектировании таких элементов конструкций, кроме упругой деформации, необходимо учитывать также пластические деформации и деформацию ползучести.

С теоретической точки зрения задача о деформировании толстостенной сферической оболочки является классической и ее решения в упругой и упругопластической областях хорошо известны, например [3]. Известны также некоторые попытки оценки напряженно-деформируемого состояния сферической оболочки в условиях ползучести. Так, в [4] Л.М.Качанов рассматривает эту задачу с точки зрения теории ползучести Р.Содерберга, а в [5] приведено решение задачи для состояния установившейся ползучести.

Решение задачи для стадии установившейся ползучести в рамках теории малых деформаций получено в [6], для конечных деформаций — в [7]. В работе [8] на основе

[1]Радченко Владимир Павлович, Саушкин Михаил Николаевич, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета

теории старения проведен расчет начальной стадии ползучести для анизотропной толстостенной оболочки. По-видимому, первой работой, в которой ставилась задача о времени разрушения сферической оболочки в условиях неупругого деформирования, является работа [9], где рассмотрена задача вязкого разрушения сосуда под действием внутреннего давления. В работах [10, 11] рассматривается задача о деформировании и времени разрушения толстостенной сферической оболочки из стохастически неоднородного материала на основании теории квазиустановившейся ползучести и кинетических уравнений Ю.Н.Работнова [12], а в [13] проанализировано хрупкое разрушение сферы в условиях ползучести.

Из изложенного выше следует, что задаче оценки кинетики напряженно-деформированного состояния сферы посвящено достаточное количество работ, однако вопрос о разрушении сферической оболочки при наличии трех стадий ползучести с учетом пластических деформаций и фактора рассеянного накопления поврежденности остается открытым и в настоящее время.

Одной из основных причин здесь является незначительное число реологических моделей неупругого деформирования и разрушения, учитывающих пластическую деформацию и деформацию ползучести наряду с процессом рассеянного накопления поврежденности в среде. Поэтому целью настоящей работы являются:
1) выбор реологической модели неупругого деформирования и разрушения материала, учитывающей пластическую деформацию, деформацию ползучести и процессы разупрочнения;
2) решение краевой задачи о неупругом деформировании и разрушении сферической оболочки на основе выбранной реологической модели;
3) подробный анализ решения краевой задачи для разнообразных условий нагружения.

1. Реологическая модель и критерий разрушения материалов при сложном напряженном состоянии

В качестве основной реологической модели в настоящей работе используется модель, предложенная для одноосного напряженного состояния в [14, 15] и обобщенная на случай сложного напряженного состояния в [16]. Основной вариант определяющих соотношений имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + q_{ij} + p_{ij}; \tag{1}$$

$$e_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\delta_{ij}\sigma_{ss}; \tag{2}$$

$$q_{\nu\nu} = \frac{3}{2}\beta^q_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\left(\beta^q_{11} + \beta^q_{22} + \beta^q_{33}\right); \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot\beta^q_{\nu\nu} = 0, \quad \text{при} \quad \left|\frac{3}{2}\sigma_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\sigma^0\right| \le \sigma_{\text{пр}}; \\ \dot\beta^q_{\nu\nu} = \begin{cases} \lambda\left[a(S-\sigma_{\text{пр}})^{n_1-1}\cdot B - \beta^q_{\nu\nu}\right], & [...]\cdot B > 0; \\ 0, \quad [...]\cdot B \le 0, \quad \text{при} \quad \left|\frac{3}{2}\sigma_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\sigma^0\right| > \sigma_{\text{пр}}; \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

$$p_{ij} = u_{ij} + v_{ij} + w_{ij}; \tag{5}$$

$$\dot{w}_{ij} = c\left(\frac{S}{\sigma^*}\right)^{m_1-1}\frac{1}{\sigma^*}\left(\frac{3}{2}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\sigma^0\right); \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_{ij}(t) &= \sum\limits_k u_{ij}^k(t); \\ \dot{u}_{ij}^k(t) &= \lambda_k\left\{a_k\left(\frac{S}{\sigma^*}\right)^{n_2-1}\frac{1}{\sigma^*}\left[\left(1+\mu_k'\right)\sigma_{ij}-\mu_k'\sigma^0\right]-u_{ij}^k(t)\right\}; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} v_{\nu\nu}(t) &= \sum\limits_k v_{\nu\nu}^k(t); \\ v_{\nu\nu}^k(t) &= \left(1+\mu_k''\right)\beta_{\nu\nu}^k(t)-\mu_k''\left(\beta_{11}^k(t)+\beta_{22}^k(t)+\beta_{33}^k(t)\right); \\ \dot{\beta}_{\nu\nu}^k &= \begin{cases} \lambda_k\left[b_k\left(\frac{S}{\sigma^*}\right)^{n_2-1}\frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*}-\beta_{\nu\nu}^k(t)\right], & [...]\sigma_{\nu\nu}>0; \\ 0, & [...]\sigma_{\nu\nu}\le 0; \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(1+\omega); \tag{9}$$

$$\dot{\omega} = \gamma(E_2)\sigma_{ij}\dot{q}_{ij} + \alpha(S_0)\sigma_{ij}\dot{p}_{ij}. \tag{10}$$

Здесь ε_{ij}, e_{ij}, q_{ij}, p_{ij} — полная, упругая, пластическая деформации и деформация ползучести соответственно; u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести; σ_{ij}, σ_{ij}^0 — соответственно компоненты истинного и номинального тензоров напряжений; E, μ — упругие константы материала; E_2, S, S_0 — соответственно интенсивности тензоров пластической деформации, истинных и номинальных напряжений; λ, a, n_1 — константы модели, описывающие диаграмму мгновенного упругопластического деформирования; $\sigma_{\text{пр}}$ — предел пропорциональности; λ_k, a_k, b_k, c, n_2, m_1, σ^* — константы модели, при помощи которых описываются первая и вторая стадии ползучести материала и ее обратимая после разгрузки часть; μ_k', μ_k'' — коэффициенты Пуассона для обратимой и необратимой компонент деформаций ползучести; β_{ij}^q, β_{ij}^k — соответственно активные пластические и вязкопластические деформации, которые можно было бы наблюдать при отсутствии пуассоновского сужения материала; $\gamma(E_2)$ и $\alpha(S_0)$ задаются степенными аппроксимациями вида

$$\gamma(E_2) = \gamma_1\cdot E_2^{m_2}, \qquad \alpha(S_0) = \alpha_1\cdot S_0^{m_3}, \tag{11}$$

где γ_1, m_2, α_1, m_3 — константы модели, контролирующие процессы разупрочнения материала при пластической деформации и деформации ползучести соответственно; ω — скалярный параметр поврежденности. В формулах (4)—(7) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &B = \left(\left|\tfrac{3}{2}\sigma_{\nu\nu}-\tfrac{1}{2}\sigma^0\right|-\sigma_{\text{пр}}\right)\cdot\operatorname{sign}\left(\tfrac{3}{2}\sigma_{\nu\nu}-\tfrac{1}{2}\sigma^0\right); \\ &\sigma^0 = \sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}. \end{aligned} \tag{12}$$

Расчет пластической q_{ij} и вязкопластической v_{ij} деформаций осуществляется в главных осях, поэтому суммирование по индексу ν в формулах (3), (8), (12) не выполняется. Очевидно, что при записи (1)–(10) использовалась гипотеза соосности напряжений и деформаций. Модель (1)—(12) описывает процесс неупругого деформирования с изотропным разупрочнением. Методика определения всех параметров

модели (1)—(11) представлена в [14, 15]. Она осуществляется на основании одноосных кривых ползучести, полученных при $\sigma_0 = \text{const}$ и доведенных до разрушения, и диаграммы упругопластического деформирования.

Для прогнозирования времени разрушения материала t_* используется критерий разрушения энергетического типа вида [14–16]

$$\Omega(t_*) = \int_0^{t_*} \frac{\sigma_{ij}\, dq_{ij}}{A_*} + \int_0^{t_*} \frac{\sigma_{ij}\, dp_{ij}}{A_*^c(S_0)} = 1, \tag{13}$$

где A_* и $A_*^c(S_0)$ — соответственно критические величины работ разрушения истинного напряжения на пластической деформации и на деформации ползучести. При этом материал находится в неразрушенном состоянии, если $\Omega(t) < 1$, и разрушается при выполнении (13). В общем случае величина $A_*(S_0)$ имеет степенную аппроксимацию вида

$$A_*^c(S_0) = \alpha_A \cdot S_0^{m_A},$$

где α_A, m_A и A_* — константы материала, которые могут быть определены по результатам одноосных испытаний основываясь на методике, изложенной в [14, 15].

Таким образом, построение модели (1)–(12) для описания неупругой деформации при сложном напряженном состоянии и критерия разрушения (13) не требует дополнительных экспериментальных затрат, так как все параметры модели определяются по результатам одноосных испытаний. В частности, в работах [16, 17] приведены константы используемой модели для некоторых материалов.

Следует отметить, что согласно (3)–(4) пластические деформации описываются такими же по структуре уравнениями, как и вязкопластическая компонента v деформации ползучести (8), т.е. пластические деформации также развиваются по времени. При этом величина λ много больше $\max\limits_{\lambda_k}\{\lambda_k\}$, и скорость деформации пластичности на порядок выше скорости деформации ползучести. При таком предположении за то время, когда пластическая деформация при заданном тензоре напряжений достигнет согласно (3)—(4) асимптотического значения, накопленная деформация ползучести за это же время будет пренебрежимо малой по сравнению с пластической деформацией, т.е. $p_{ij}(t)$ много меньше $q_{ij}(t)$. Такой подход к описанию пластических деформаций соответствует эндохронным теориям пластичности [18, 19]. Обоснованность применения такого подхода приведена в [16]. Соотношения (3)–(4) задают вариант теории пластичности без поверхности пластичности. Это позволяет ценой незначительных погрешностей свести задачу упругопластического деформирования к задаче ползучести.

2. Решение краевой задачи о неупругом реологическом деформировании и разрушении толстостенной сферической оболочки

Изложим методику решения краевой задачи для толстостенной сферической оболочки аналогично [17, 20], где решена задача о неупругом деформировании толстостенного цилиндра.

Предположим, что толстостенная сферическая оболочка с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами под действием внутреннего давления $p(t)$ находится в условиях неупругого деформирования. Задача рассматривается в сферических координатах

r, θ, ψ. В силу симметрии задачи деформации сдвига и касательные напряжения равны нулю, и задача решается в главных осях, причем $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\psi$, $\sigma_\theta = \sigma_\psi$.

Полные деформации ε_i $(i = r, \theta, \psi)$ описываются соотношениями (1)–(12).

Уравнение совместности деформаций в силу симметрии задачи записывается в виде

$$r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \varepsilon_\theta = \varepsilon_r. \tag{2.1}$$

Из уравнений (1) и (2.1) имеем соотношение

$$r\frac{\partial e_\theta}{\partial r} + e_\theta - e_r = g(r,t), \tag{2.2}$$

где функция $g(r,t)$ задается следующим образом:

$$g(r,t) = p_r + q_r - p_\theta - q_\theta - r\left(\frac{\partial p_\theta}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{\partial r}\right). \tag{2.3}$$

Из закона Гука (2), записанного в главных осях

$$\begin{cases} e_r &= \dfrac{\sigma_r^0 - 2\mu\sigma_\theta^0}{E}, \\ e_\theta &= \dfrac{(1-\mu)\sigma_\theta^0 - \mu\sigma_r^0}{E}, \\ e_\psi &= e_\theta, \end{cases} \tag{2.4}$$

выражается величина

$$e_\theta - e_r = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0),$$

с учетом которой уравнение (2.2) принимает вид

$$r\frac{\partial e_\theta}{\partial r} + \frac{1+\mu}{E}(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0) = g(r,t). \tag{2.5}$$

Дифференцируя второе уравнение (2.4) и подставляя его в (2.5), получаем

$$r(1-\mu)\frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial r} - r\mu\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + (1+\mu)(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0) = E\cdot g(r,t),$$

из которого с учетом уравнения равновесия

$$r\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + 2\sigma_r^0 = 2\sigma_\theta^0 \tag{2.6}$$

находим дифференциальное уравнение относительно σ_r^0:

$$\frac{\partial^2 \sigma_r^0}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} = \frac{2E}{1-\mu}\frac{g(r,t)}{r^2}. \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.7) с граничными условиями

$$\sigma_r^0\big|_{r=R_1} = -p(t), \qquad \sigma_r^0\big|_{r=R_2} = 0 \tag{2.8}$$

при фиксированном значении времени t записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0(r,t) &= \tfrac{2E}{3(1-\mu)}\int\limits_{R_1}^{r}\tfrac{g(x,t)}{x}\,dx - \tfrac{2E}{3(1-\mu)}\tfrac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{r}x^2 g(x,t)\,dx - p(t) - \\ &- \tfrac{(r^3-R_1^3)R_2^3}{(R_2^3-R_1^3)r^3}\left(\tfrac{2E}{3(1-\mu)}\int\limits_{R_1}^{R_2}\tfrac{g(x,t)}{x}\,dx - \tfrac{2E}{3(1-\mu)}\tfrac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{R_2}x^2 g(x,t)\,dx - p(t)\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) из (2.6) находим выражение для σ_θ^0:

$$\sigma_\theta^0(r,t) = \frac{2E}{3(1-\mu)}\int\limits_{R_1}^{r}\frac{g(x,t)}{x}\,dx + \frac{E}{3(1-\mu)}\frac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{r}x^2 g(x,t)\,dx - p(t) - \\ - \frac{(2r^3+R_1^3)R_2^3}{2(R_2^3-R_1^3)r^3}\left(\frac{2E}{3(1-\mu)}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{g(x,t)}{x}\,dx - \frac{2E}{3(1-\mu)}\frac{1}{r^3}\int\limits_{R_1}^{R_2}x^2 g(x,t)\,dx - p(t)\right). \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9) и (2.10) задают распределение напряжений σ_r^0, σ_θ^0 по радиусу в зависимости от времени. Нетрудно видеть, что при $g(r,t) = 0$ они совпадают с упругим решением для толстостенной сферы [3].

Численная реализация расчета кинетики напряженно-деформируемого состояния во времени и разрушения толстостенной сферической оболочки под действием внутреннего давления p в условиях ползучести осуществлялась по хорошо известному методу "шагами по времени" аналогично [17, 20]. Временной интервал разбивался на малые отрезки времени $[t_i, t_{i+i}]$ с шагом Δt_i, внутри которого внутреннее и внешнее напряженные состояния считались постоянными и соответствующими моменту $t = t_i$. Приращения компонент деформаций в конце отрезка при $t = t_{i+1}$ находились по формулам (1)–(11) по методу Эйлера. При этом интегралы в формулах (2.9) и (2.10) вычислялись по соответствующим квадратурным формулам численного интегрирования при каждом значении времени $t = t_i$, а для производных по радиусу использовались их конечно-разностные аппроксимации. Время до разрушения в соответствии с (13) определялось следующим образом: расчет продолжался до того момента времени $t = t_*$, при котором в какой-либо точке сферы выполнялось условие $\Omega(t_*) = 1$.

В случае упругопластического деформирования расчет происходит также "шагами по времени", как при расчете на ползучесть, но здесь время можно рассматривать как некоторое "внутреннее время", играющее роль параметра нагружения. При этом сначала рассчитывается упругое решение при $t = 0$, а затем строится упругопластическое решение на основании (1)—(4), (9)—(13) по аналогии с деформацией ползучести.

Следует отметить, что во всех формулах (2.1)–(2.10) используются номинальные напряжения, тогда как реологические и упругие деформации рассчитываются в соответствии (1)–(13) по истинным напряжениям.

3. Численное решение краевой задачи и его анализ

В качестве примера выполнено численное исследование неупругого деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки из материала *ЭИ 698* с внутренним $R_1 = 0.20$ *м* и внешним $R_2 = 0.28$ *м* радиусами при действии внутреннего давления p и температуре $T = 700°C$ с учетом деформации ползучести и пластических деформаций. Параметры модели взяты из работы [16] и представлены в табл. 1 и 2. В процессе решения задачи в некоторых частных случаях выполнена проверка адекватности предложенного метода решения.

Таблица 1

Значения параметров модели для описания деформации пластичности материала *ЭИ 698* при $T = 700°C$

$\sigma_{\text{пр}}$, Мпа	$E \cdot 10^5$, МПа	a, МПа^{-n_1}	n_1	γ_1, МПа^{-1}	A_*, МДж/$м^3$	m_2
500.3	1.52	$1.18 \cdot 10^{-7}$	1.995	$3.77 \cdot 10^{-3}$	284.3	0

Таблица 2

Значения параметров модели для описания деформации ползучести материала *ЭИ 698* при $T = 700°C$

σ_*, МПа	k	λ_k, $ч^{-1}$	a_k $\times 10^{-4}$	b_k $\times 10^{-4}$	c $\times 10^{-5}$	n_2	m_1	α_1, МПа^{-1-m_1}	m_3	α_A, МПа^{-1-m_A}	m_A
490.5	1	0.2	2.96	4.44	2.51	2.9	10.96	$9.56 \cdot 10^3$	−2.03	12.2	0

3.1. Упругопластическое деформирование

Рассмотрим сначала процесс упругопластического деформирования. Для этого положим в соотношениях (1)—(11) $p_{ij}(t) = 0$. В результате численного решения краевой задачи установлено, что пластические деформации на внутренней поверхности оболочки возникают при нагрузке $p_0 = 212$ МПа, а при нагрузке $p_* = 440$ МПа вся сфера находится в пластическом состоянии. Разрушение оболочки наступает (выполняется критерий (13) на внутреннем слое оболочки) при давлении $p = 702$ МПа, которое можно считать предельнодопустимым давлением.

Таблица 3

Глубина проникновения h ($м$) зоны пластичности в зависимости от давления p (МПа)

Нагрузка p, МПа	220	240	260	280	300	320	340	380	420	440
h, по модели [3]	0.003	0.009	0.017	0.025	0.036	0.051	—	—	—	—
h, по предложенной модели	0.002	0.008	0.014	0.020	0.026	0.033	0.039	0.054	0.07	0.08

В качестве примера в табл. 3 представлена глубина проникновения пластической деформации $h = r - R_1$ $(R_1 \le r \le R_2)$ в зависимости от величины приложенного внутреннего давления p по предлагаемой методике, т.е. при $R_1 \le r \le R_1 + h$ имеем зону пластичности, а при $R_1 + h < r \le R_2$ — зону упругости материала. На рис. 1 сплошными линиями представлены расчетные эпюры распределения окружного напряжения σ_θ^0 в процессе упругопластического деформирования толстостенной сферической оболочки в зависимости от внутреннего давления p.

Для сравнения результатов расчета по предложенной модели с классическими теориями воспользуемся решением задачи об упругопластическом деформировании сферической оболочки по теории идеальной пластичности, полученном в [3]. Согласно [3] пластические деформации на внутренней поверхности оболочки возникают при внутреннем давлении

$$p_0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)\sigma_s, \tag{3.1}$$

а оболочка полностью переходит в пластическое состояние при давлении

$$p_* = 2\sigma_s \ln\frac{R_2}{R_1}, \tag{3.2}$$

при этом величина p_* для теории идеальной пластичности является предельной величиной (σ_s — предел текучести). Если в формулах (3.1)—(3.2) вместо σ_s использовать $\sigma_{\text{пр}}$, значения которого приведены в табл. 1, то получим $p_0 = 211.98$ МПа, $p_* = 336.67$ МПа. Если в качестве σ_s использовать предел текучести для данного материала, который равен 680 МПа, то получим $p_0 = 288.12$ МПа, $p_* = 457.6$ МПа.

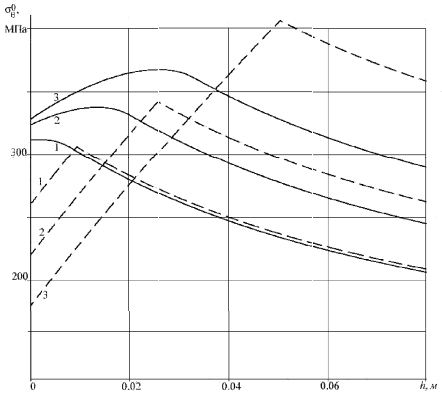

Рис. 1: Эпюры распределения напряжения σ_θ при упругопластическом деформировании в зависимости от $h = r - R_1$ по предложенной модели (сплошные линии) и по модели [3] (пунктирные линии). Цифры: 1 — $p = 240$ МПа; 2 — $p = 280$ МПа; 3 — $p = 320$ МПа

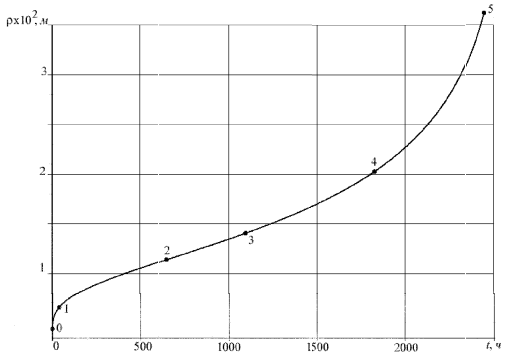

Рис. 2: Изменение радиальных перемещений ρ ($м$) точек внутренней поверхности оболочки в условиях ползучести с течением времени при $p = 250$ МПа. Цифры: 0 — $t = 0$ $ч$; 1 — $t = 40$ $ч$; 2 — $t = 640$ $ч$; 3 — $t = 1090$ $ч$; 4 — $t = 1825$ $ч$; 5 — $t = 2444$ $ч$

Таким образом, предельнодопустимые значения давления p для сферической оболочки, вычисленные по модели (1)—(13) и по модели Л.М.Качанова для упругопластической задачи, различаются в 2 и более раз (в зависимости от того, какую из величин использовать в соотношении (3.2) в качестве σ_s).

В решении [3] при нагрузке $p_0 < p < p_*$ пластическая зона проникает на глубину R_c, которая находится из уравнения

$$\ln \frac{R_c}{R_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{R_c}{R_2}\right)^3 = \frac{p}{2\sigma_s} - \frac{1}{3}. \tag{3.3}$$

Напряжения в зоне пластического деформирования ($R_1 \le r < R_c$) вычисляются согласно [3] по формулам

$$\begin{cases} \sigma_r(r) &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{R_1} - p, \\ \sigma_\theta(r) &= \sigma_s + \sigma_r(r), \end{cases} \tag{3.4}$$

а в зоне упругого деформирования ($R_c \le r \le R_2$) определяются соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_r(r) &= \dfrac{R_c^3 \cdot p_c}{R_2^3 - R_c^3}\left(1 - \dfrac{R_2^3}{r^3}\right), \\ \sigma_\theta(r) &= \dfrac{R_c^3 \cdot p_c}{R_2^3 - R_c^3}\left(1 + \dfrac{R_2^3}{2r^3}\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

где $p_c = -\sigma(R_c)$.

На рис. 1 представлены графики распределений номинальных напряжений σ_θ^0 в зависимости от $h = r - R_1$ для упругопластического решения при различных давлениях, вычисленных по реологическим соотношениям (1)–(12) (сплошные линии) и уравнениям (3.3)–(3.5) (пунктирные линии). В вычислениях в качестве предела текучести σ_s использовался предел пропорциональности $\sigma_{\text{пр}}$.

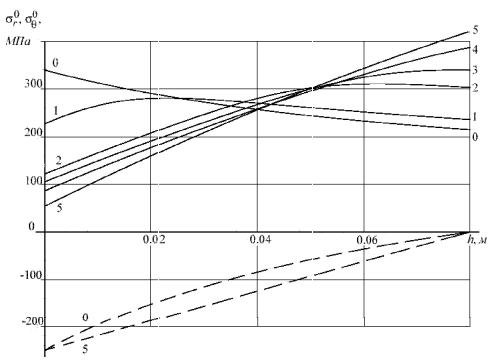

Рис. 3: Распределение номинальных напряжений σ_θ^0 (сплошные линии) и σ_r^0 ($МПа$) (пунктирные линии) по толщине оболочки h ($м$) с течением времени в условиях ползучести. Цифры: 0 — $t = 0$ $ч$; 1 — $t = 40$ $ч$; 2 — $t = 640$ $ч$; 3 — $t = 1090$ $ч$; 4 — $t = 1825$ $ч$; 5 — $t = 2444$ $ч$

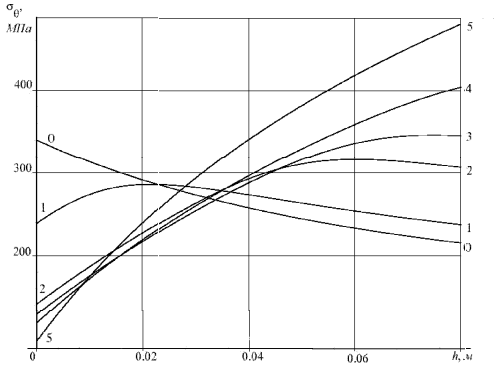

Рис. 4: Распределение истинных напряжений σ_θ ($МПа$) по толщине оболочки h ($м$) с течением времени в условиях ползучести. Цифры: 0 — $t = 0$ $ч$; 1 — $t = 40$ $ч$; 2 — $t = 640$ $ч$; 3 — $t = 1090$ $ч$; 4 — $t = 1825$ $ч$; 5 — $t = 2444$ $ч$

В табл. 3 приведена глубина проникновения зон пластичности, вычисленных по модели [3] и по предложенной модели, когда было положено $\sigma_s = \sigma_{\text{пр}}$.

3.2. Деформирование в условиях ползучести

Рассмотрим теперь кинетику напряженно-деформируемого состояния и накопления поврежденности в толстостенной сфере в процессе чистой ползучести, когда пластические деформации $q_{ij} = 0$. В качестве примера формально рассмотрим ползучесть сферы при $p = 250$ МПа (хотя пластические деформации и наступают при $p \geq 212$ МПа).

На рис. 2 представлена кривая полных радиальных перемещений точек внутренней поверхности при ползучести оболочки. Рис. 3 показывает характер изменения распределения номинальных напряжений σ_θ^0 и σ_r^0 на всем промежутке неупругого деформирования вплоть до разрушения.

На рис. 4 приведены истинные напряжения σ_θ, вычисленные согласно (9).

На рис. 5 представлено изменение скалярного параметра поврежденности ω с течением времени по толщине оболочки $h = r - R_1$. Цифры $0 - 5$ на рисунках 2 – 5 соответствуют моментам времени $t_0 = 0$ $ч$, $t_1 = 40$ $ч$, $t_2 = 640$ $ч$, $t_3 = 1090$ $ч$, $t_4 = 1825$ $ч$, $t_5 = 2444$ $ч$, где t_5 — время разрушения оболочки.

Из рис. 3 и 4 следует, что напряжения σ_θ^0 и σ_θ в начальный момент времени (упругое решение) имеют свои максимальные значения на внутренней поверхности оболочки. С течением времени значения напряжений σ_θ^0 и σ_θ на внутренней поверхности оболочки быстро уменьшаются, а на внешней поверхности увеличиваются. Быстрое возрастание истинных напряжений σ_θ по сравнению с номинальными σ_θ^0 на внешнем слое оболочки в моменты времени, предшествующие разрушению, объясняется эффектом перераспределения номинальных напряжений σ_θ^0 и ростом скалярного параметра поврежденности ω на внешнем слое (см. рис. 5).

Эти результаты хорошо согласуются с результатами работ [7, 8], в которых вы-

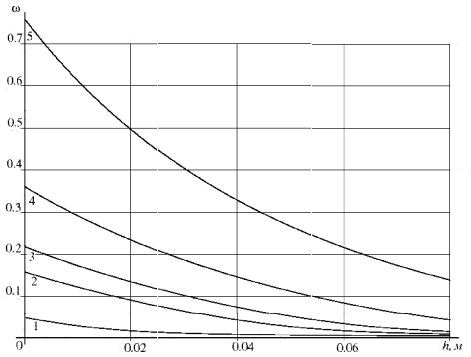

Рис. 5: Изменение скалярного параметра поврежденности ω по толщине оболочки h ($м$) с течением времени в условиях ползучести

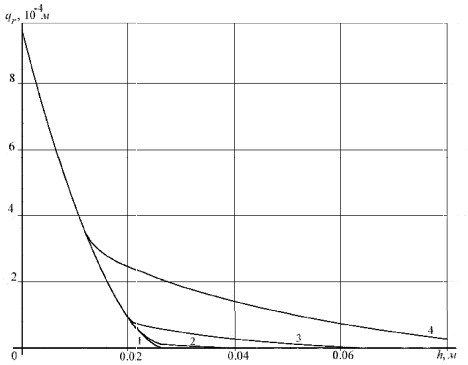

Рис. 6: Развитие пластических деформаций $q_r = -2q_\theta$ по толщине оболочки при нагрузке $p = 300$ МПа. Цифры: 1 — $t = 0$ $ч$; 2 — $t = 250$ $ч$; 3 — $t = 300$ $ч$; 4 — $t = 350$ $ч$

полнен анализ начальной стадии ползучести для изотропной и анизотропной толстостенных сферических оболочек.

Следует отметить тот факт, что в случае, если в модели (1)—(12) положить α_1 равным нулю для всех $t \geq 0$ (скалярный параметр поврежденности $\omega = 0$), то деформирование оболочки будет происходить в пределах первых двух стадий ползучести. При этом при $p(t) = \text{const}$ графики функций $\sigma_r^0(r,t)$ и $\sigma_\theta^0(r,t)$ с течением времени приближаются к асимптотическим положениям, соответствующим стадии установившейся ползучести сферы.

Предельные значения напряжений σ_r^0 и σ_θ^0 (при $t \to +\infty$) для толстостенной сферической оболочки под действием постоянного внутреннего давления p в условиях установившейся ползучести вычисляются по следующим формулам [5]:

$$\begin{cases} \sigma_r(r)^0 &= \dfrac{pR_1^{3\nu}}{R_2^{3\nu} - R_1^{3\nu}} \left[1 - \left(\dfrac{R_2}{r}\right)^{3\nu}\right], \\ \sigma_\theta(r)^0 &= \dfrac{pR_1^{3\nu}}{R_2^{3\nu} - R_1^{3\nu}} \left[1 + \dfrac{3\nu - 2}{2}\left(\dfrac{R_2}{r}\right)^{3\nu}\right], \end{cases} \tag{3.6}$$

здесь ν — показатель ползучести материала, который для модели (1)—(13) равен $1/m_1$.

Таблица 4

Распределение значений напряжений σ_r^0 (МПа) и σ_θ^0 (МПа) по толщине сферической оболочки $h = r - R_1$ от времени при ползучести в пределах первых двух стадий

h, $м$	$t = 2073$ $ч$		$t = 3274$ $ч$		$t = 9280$ $ч$		$t = 11677$ $ч$		Установившаяся ползучесть [5]	
	σ_r^0	σ_θ^0	σ_r^0	σ_θ^0	σ_r^0	σ_θ^0	σ_r^0	σ_θ^0	σ_r	σ_θ
0	-250	141.82	-250	139.58	-250	139.03	-250	139.03	-250	137.78
0.02	-176.23	205.99	-176.69	202.91	-176.81	202.11	-176.81	202.11	-176.83	202.03
0.04	-110.45	263.26	-111.40	259.42	-111.66	258.27	-111.66	258.27	-111.68	258.26
0.06	-51.46	309.58	-52.69	309.58	-53.09	308.76	-53.09	308.76	-53.10	308.82
0.08	0	328.26	0	345.96	0	354.51	0	354.51	0	354.66

В табл. 4 приведены значения напряжений σ_r^0 и σ_θ^0, вычисленные по формулам (3.6) и с помощью модели (1)–(10) при $p = 250$ МПа для различных значений времени. Видно, что на стадии установившейся ползучести (практически для $t \geq 9500$ *ч*) решение по предложенной модели практически не отличается от ассимптотического, рассчитаного по (3.6). Этот результат также свидетельствует об адекватности предложенного численного метода решения краевой задачи.

3.3. Деформирование в условиях ползучести с учетом пластических деформаций

Рассмотрим теперь реологическое деформирование сферической оболочки с учетом деформаций ползучести и пластичности. В качестве примера и для сравнения с результатами пункта 3.2 проанализируем случай при давлении $p = 250$ МПа. Время разрушения оболочки здесь $t_* = 2462$ *ч*, т.е. несколько больше, чем в случае, когда пластическая деформация не учитывается.

Было отмечено, что при нагрузке $p = 250$ МПа пластические деформации, которые возникают вблизи внутренней поверхности оболочки в момент времени $t = 0$ (упругопластическое решение), дальше не развиваются. Это связано с тем, что в процессе деформирования в условиях ползучести на внутреннем радиусе происходит уменьшение истинных напряжений σ_θ и их интенсивность недостаточна для дальнейшего развития пластических деформаций и роста пластической зоны внутрь оболочки, другими словами, происходит упругопластическая разгрузка материала.

Другая картина наблюдается при нагрузке $p = 300$ МПа (время разрушения здесь составляет 350 *ч*). В данном случае при $t = 0$ возникают пластические деформации, распределение которых по толщине оболочки $h = r - R_1$ представлено на рисунке 6 кривой 1. Далее в процессе ползучести оболочки за счет роста скалярного параметра поврежденности ω происходит увеличение интенсивности истинных напряжений (см. соотношение (9)). Поэтому, несмотря на то, что здесь давление p не изменяется, происходит увеличение зоны пластических деформаций с течением времени, и к моменту разрушения она распространяется на всю толщину (см. рис. 6). Таким образом, на третьей стадии ползучести сферической оболочки пластическая деформация может развиваться во времени при постоянном внутреннем давлении, т.е. внешне она теряет свойство склерономности и приобретает реономный характер.

Литература

[1] *Джонсон У., Меллор П.* Теория пластичности для инженеров, М.: Машиностроение, 1979. 566с.

[2] *Brockenbrough R.L.* Fatigue Life of Seampless Steel Pressure Vessels // Journal of Pressure Vessel Technology, 1987, No. 3. P. 323–332.

[3] *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности, М.: Наука, 1969. 420с.

[4] *Качанов Л.М.* Механика пластических сред, М.;Л.: ОГИЗ, 1948. 216с.

[5] *Качанов Л.М.* Теория ползучести, М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. 456с.

[6] *Finnie I., Heller W.R.* Creep of Engineering Materials, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1959.

[7] *Bhatnagar N.S., Arya V.K.* Creep of Thick-Walled Spherical Vessels Under Internal Pressure Considering Large Strains // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, 1975. P. 1080.

[8] *Bhatnagar N.S., Kularni Pradnya, Arya V.K.* Primary Creep Analysis of an Anisotropic Thick-Walled Spherical Shell // Journal of Pressure Vessel Technology, 1987, No. 3. P. 347–354.

[9] *Rimrott F.* Versagenzeit beim Krichen // Ing. Arch., B. 27, No. 3, 1959.

[10] *Попов Н.Н.* Длительная прочность стохастически неоднородной сферической оболочки // Надежность и прочность машиностроительных конструкций: Сб. научн. тр. Куйбышев: КПтИ, 1988. С. 55–60.

[11] *Попов Н.Н.* Вязкое разрушение стохастически неоднородной сферической оболочки // Вестн. СамГТУ, Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 6. 1998. С. 35–39.

[12] *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций, М.: Наука. 1966. 752с.

[13] *Половицкий И.Я.* Хрупкое разрушение сферического тела при равномерном растяжении в условиях ползучести // Тр. семин. каф. теор. мех. ПГТУ по поврежденаемости матер. Пермь, 1996. С. 39–47 (Деп. в ВИНИТИ 24.09.96, NN 2856-В96).

[14] *Радченко В.П.* Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // ПМТФ, 1991, No. 4. С. 172-179.

[15] *Радченко В.П., Кичаев Е.К.* Феноменологическая реологическая модель и критерий разрушения металлов при одноосном напряженном состоянии // Проблемы прочности, 1991, No. 11. С. 13–19.

[16] *Радченко В.П.* Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 4. 1996. С. 43–63.

[17] *Радченко В.П., Кубышкина С.Н.* Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 6. 1998. С. 23–34.

[18] *Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ, 1989, No. 1. С. 161–168.

[19] *Мосолов А.Б.* Эндохронная теория пластичности, М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988. 44с.

[20] *Миронова С.Н.* Решение задачи упругопластического деформирования и разрушения толстостенной трубы на основании эндохронной теории ползучести // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 4. 1996. С. 85–92.

MATHEMATICAL MODEL OF RHEOLOGICAL DEFORMATION AND FRACTURE OF THICK-WALLED SPHERICAL SHELL

V. Radchenko, M. Saushkin [2]

The metod for the solution of the boundary value poblem of non-elastic rheological deformation and fracture of thick-walled sphere under internal pressure is represented. The constitutive law taking into account the plastic deformations, creep deformations and damage accumulation is used. The comparesons of the results obtained by the presented method and classical solutions for some particular cases are perfomed. The detailed analysis of the estimation of kinetics of stress-strain state is given. It is shown the plastic deformation is not scleronomous and depends on time.

[2]V.Radchenko, M.Saushkin, dept. of continuum mechanics, Samara state university