ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ

О.П.Филатов[1]

Для системы функционально–дифференциальных включений (ФДВ) с быстрыми и медленными переменными ставятся три задачи аппроксимации по медленным переменным – сверху, снизу и взаимной.

Показано, что доказательство основной теоремы усреднения для ФДВ основано на свойствах приближенных решений и непрерывной зависимости решений от данных задачи, которые аналогичны соответствующим свойствам для дифференциальных включений.

Введение

Функционально–дифференциальные включения (ФДВ), как модели в теории управления и в задачах с неточно заданной информацией, охватывают, в частности, дифференциальные включения (ДВ) и дифференциальные включения с постоянным или переменным запаздыванием. Такие модели достаточно сложны сами по себе. Если ФДВ содержит разнотемповые переменные, то возможно приближенное исследование соответствующей задачи методами усреднения.

Для ДВ теория усреднения разработана достаточно хорошо [1, 2]. Поэтому возникает естественный вопрос, можно ли распространить на ФДВ основные теоремы усреднения, доказанные для ДВ?

Поскольку речь будет далее идти о ФДВ с быстрыми и медленными переменными, то заметим, что в [3] рассматривалась задача усреднения для ФДВ, содержащего только медленные переменные, хотя анонсировалась система ФДВ с разнотемповыми переменными (см. п.4).

Основная цель данной работы заключается в том, чтобы распространить основные результаты теории усреднения ДВ с быстрыми и медленными переменными [2] на аналогичные системы ФДВ. При этом будет показано, что в естественных классах отображений в основе теорем усреднения лежат свойства приближенных решений и свойства непрерывной зависимости решений от данных задачи. Поэтому достаточно убедиться в справедливости этих свойств для ФДВ и затем воспользоваться общей схемой доказательства из [2] для соответствующих задач.

[1]Филатов Олег Павлович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета

1. Принцип усреднения

Рассмотрим систему ФДВ

$$\begin{array}{ll} \dot{x} \in \mu F(t, x_t, y_t, \mu), & x|_{T_0} = x_0, \\ \dot{y} \in G(t, x_t, y_t, \mu), & y|_{T_0} = y_0, \end{array} \tag{1}$$

где векторы x, y соответственно из евклидовых пространств R^m, R^n; параметр $\mu \in [0, \mu^0], \mu^0 > 0$; отрезок $T_0 = [-a, 0], a \geq 0$. Для произвольной функции $x : [-a, \Delta] \to R^m, \Delta \geq 0$, символ x_t при любом $t \in [0, \Delta]$ обозначает функцию $x_t(s) = x(t + s)$, заданную на отрезке T_0. Пусть C_m– линейное многообразие всех абсолютно непрерывных функций $\varphi : T_0 \to R^m$ с нормой $\|\varphi\|_m = \sup_{s \in T_0} \|\varphi(s)\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^m (а также в любом другом евклидовом пространстве). Отображения F, G в (1) определены на множестве $D = R_+ \times C_m \times C_n \times [0, \mu^0]$ и принимают значения в совокупности непустых компактных выпуклых множеств $Kv(R^m), Kv(R^n)$ из пространств R^m, R^n соответственно. Начальные функции в (1) $x_0 \in C_m, y_0 \in C_n$. Символ $x|_{T_0}$ обозначает сужение функции x на отрезок T_0.

Поскольку теоремы усреднения рассматриваются на отрезке $[-a, 1/\mu], \mu > 0$, то под решением системы ФДВ (1) понимается пара абсолютно непрерывных функций $x, y : [-a, 1/\mu] \to R^m, R^n$, $x|_{T_0} = x_0, y|_{T_0} = y_0$, которые почти всюду удовлетворяют включениям (1).

Далее будем учитывать и возможность частичного усреднения, поэтому задачу (1) по медленным переменным $x \in R^m$ будем аппроксимировать в общем случае неавтономным ФДВ вида

$$\dot{\xi} \in \mu F_0(t, \xi_t), \quad \xi|_{T_0} = x_0, \tag{2}$$

где отображение $F_0 : D_0 \to Kv(R^m), D_0 = R_+ \times C_m$.

Рассмотрим теперь три основные задачи усреднения [2].

Определение 1. *Задача* (2) *аппроксимирует систему* (1) *сверху, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mu_0 > 0$ *такое, что* $\forall \mu \in (0, \mu_0]$ *и любого решения* x, y *системы* (1) *существует решение* ξ *ФДВ* (2) *такое, что*

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \tag{3}$$

Если для произвольного решения ξ *задачи* (2) *существует решение* x, y *системы* (1)*, для которых выполняется неравенство* (3)*, то задача* (2) *аппроксимирует систему* (1) *снизу. Если имеет место одновременно аппроксимация сверху и снизу, то задача* (2) *аппроксимирует систему* (1) *взаимно.*

Теоремы, которые решают указанные задачи, и составляют содержание принципа усреднения для ФДВ.

Для того чтобы формализовать свойства отображений F, G, F_0 из (1), (2) введем классы отображений $L(m, D), L_0(m, D_0)$.

Далее $\beta(A, B) = \inf_{\varepsilon > 0}\{\varepsilon : A \subset [B]^\varepsilon\}$ – полуотклонение множества $A \subset R^m$ от множества $B \subset R^m$, где $[B]^\varepsilon$ – замкнутая ε–окрестность множества B. Расстояние по Хаусдорфу между A и B определяется равенством $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$. Равномерная ограниченность отображения $F : D \to Kv(R^m)$ означает, что существует постоянная $c = c(F)$ такая, что $\beta(F(t, f, g, \mu), \{0\}) \leq c$ почти всюду по t и любых f, g, μ. Краткая запись – $\|F\| < \infty$.

Символ $L(m, D)$ обозначает множество всех отображений

$$F : D \to Kv(R^m),\ (t, f, g, \mu) \to F(t, f, g, \mu),$$

которые удовлетворяют условиям:

1) функция $F(\cdot, f, g, \mu)$ измерима для любых f, g, μ;

2) $\|F\| < \infty$;

3) отображение $F(t, \cdot, \cdot, \mu)$ является липшицевым с общей постоянной $l = l(F)$, то есть $\alpha(F(t, f_1, g_1, \mu), F(t, f_2, g_2, \mu)) \le l(\|f_1 - f_2\|_m + \|g_1 - g_2\|_n)$ почти всюду по t и любых f_1, f_2, g_1, g_2, μ;

4) отображение $F(t, f, g, \cdot)$ равномерно непрерывно в точке $\mu = 0$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mu \in [0, \delta]$ почти всюду по t и любых f, g выполняется неравенство $\alpha(F(t, f, g, \mu), F(t, f, g, 0) \le \varepsilon$.

Отображения F, G из (1) принадлежат классам $L(m, D), L(n, D)$ соответственно. Отображение F_0 из (2) принадлежит классу $L_0(m, D_0)$, который обозначает множество всех функций $F_0 : D_0 \to Kv(R^m),\ (t, f) \to F_0(t, f)$, удовлетворяющих условиям 1) отображение $F(\cdot, f)$ измеримо для любого f; 2) $\|F_0\| < \infty$; 3) отображение $F(t, \cdot)$ является липшицевым с общей постоянной.

2. Основные условия теорем усреднения

Введем порождающее ФДВ

$$\dot{\zeta} \in \{0\} \times G(t_0 + t, \zeta_t, 0), \quad \zeta|_{T_0} = \zeta_0, \tag{4}$$

которое получается из (1) при $\mu = 0$. Здесь $t_0 \in R_+, \zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in C_m \times C_n$ – произвольные начальные данные. Пусть $Z(t_0, \zeta_0)$ – множество всех решений задачи (4), каждое из которых определено в промежутке $[-a, \infty)$ для любых начальных данных. Из множества решений $Z(t_0, \zeta_0)$ выделим подмножество $Z_0(t_0, \zeta_0)$, которое характеризуется тем, что начальная функция $\xi_0 \in C_m$ является постоянной, $\xi_0(s) = const, s \in T_0$. Для любого решения $\zeta \in Z_0(t_0, \zeta_0)$ введем среднее

$$I(t_0, \zeta_0, \zeta, \Delta) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta F(t_0 + t, \zeta_t, 0)\, dt,$$

а также объединение средних

$$J(t_0, \zeta_0, \Delta) = \bigcup_{\zeta \in Z_0(t_0, \zeta_0)} I(t_0, \zeta_0, \zeta, \Delta).$$

Кроме того, для отображения F_0 из (2) рассмотрим среднее

$$I_0(t_0, \xi_0, \Delta) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta F_0(t_0 + t, \xi_0)\, dt,$$

где $\xi_0 = const \in C_m$. Теперь можно сформулировать основные достаточные условия в задачах аппроксимации сверху, снизу и взаимной соответственно

$$\lim_{\Delta \to \infty} \beta(J(t_0, \zeta_0, \Delta), I_0(t_0, \xi_0, \Delta)) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \beta(I_0(t_0, \xi_0, \Delta), J(t_0, \zeta_0, \Delta)) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \alpha(I_0(t_0, \xi_0, \Delta), J(t_0, \zeta_0, \Delta)) = 0, \tag{7}$$

при этом предельные равенства должны выполняться равномерно по начальным данным $t_0 \in R_+, \zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in C_m \times C_n, \xi_0 = const$.

Замечание 1. *Если вместо множества решений $Z_0(t_0, \zeta_0)$ рассматривать все множество решений порождающей задачи, то ничего не изменится, так как предельные равенства* (5)–(7) *не зависят от значений функций времени*

$$F(t_0 + t, \zeta_t, 0), \quad F_0(t_0 + t, \xi_t)$$

на отрезке $[-a, a]$ в силу свойств средних. Тем не менее, практическое вычисление средних удобнее делать вдоль множества решений $Z_0(t_0, \zeta_0)$.

Замечание 2. *Множество $D = R_+ \times C_m \times C_n \times [0, \mu_0]$ можно заменить на $R_+ \times P \times Q \times [0, \mu_0]$, где P – шар из C_m с центром в точке x_0 достаточно большого радиуса, а множество $Q \subset C_n$ должно быть таким, чтобы гарантировать существование всех требуемых решений данной и порождающей задач.*

3. Основная теорема

Согласно трем основным задачам для ФДВ имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть отображения F, G системы* (1) *принадлежат соответственно классам $L(m, D), L(n, D)$, а функция $F_0 \in L_0(m, D_0)$. Тогда при выполнении условий* (5)–(7) *задача* (2) *аппроксимирует задачу (1) соответственно сверху, снизу, взаимно.*

Заметим, что в [3] рассматривалась система ФДВ вида (1), где отображения F, G не зависили от параметра μ, $\dot{x} \in \mu F(t, x_t, y_t)$, $x|_{T_0} = x_0$, $\dot{y} \in G(t, x_t, y_t)$, $y|_{T_0} = y_0$. Затем выделялось частное решение $y = y(t, x_0, y_0, 0)$ по переменным y этой системы при $\mu = 0$, и вместо исходной системы рассматривалась задача о взаимной аппроксимации (в нашей терминологии) для ФДВ $\dot{x} \in \mu F(t, x_t, y(\cdot, x_0, y_0, 0)_t)$, $x|_{T_0} = x_0$, в классе автономных ФДВ $\dot{\xi} \in \mu F_0(\xi_t)$, $\xi|_{T_0} = x_0$. В таком случае свойство Липшица отображения F_0 наследуется от липшицего отображения $F(t, \cdot, y_t)$. В общем случае для задач аппроксимации вида (1) приходится требовать чтобы отображение $F_0(t, \cdot)$ в (2) было липшицевым. Соответствующий контрпример в классе обыкновенных дифференциальных уравнений приведен, например, в [2, с.31].

4. Основные свойства ФДВ

Покажем, что для ФДВ с правыми частями из введенных классов отображений выполняются те же свойства, которые лежат в основе доказательства принципа усреднения для ДВ [2]. Поскольку эти качества играют фундаментальную роль, то подробно рассмотрим их в нужной нам форме.

Далее под приближенным δ–решением на отрезке $[-a, \Delta]$, $\Delta > 0$, ФДВ

$$\dot{x} \in H(t, x_t), \quad x|_{T_0} = \varphi, \tag{8}$$

где $H \in L_0(m, D_0), \varphi \in C_m$, понимается абсолютно непрерывная функция $x : [-a, \Delta] \to R^m$, $x|_{T_0} = \varphi$, такая, что для некоторой интегрируемой (по Лебегу) функции $\eta \in L_1([0, \Delta])$ выполняются неравенства $\beta(\dot{x}(t), H(t, x_t)) \leq \eta(t), \int_0^\Delta \eta(t)\, dt \leq \Delta\delta$ почти всюду по t. Здесь мы используем более узкое понятие приближенного решения, чем для ДВ в [4, с. 217], так как $H \in L_0(m, D_0)$.

Свойство 1. *Равномерно сходящаяся на отрезке $[-a, \Delta]$ последовательность x^n приближенных δ_n–решений задачи* (8), *$\delta_n \to 0, n \to \infty$ сходится на этом отрезке к некоторому решению задачи* (8).

Доказательство. Отображение $t \to H(t, x_t^n)$ при $t \geq 0$ измеримо для любого приближенного решения x^n. Поэтому по теореме о выборе селектора (однозначной ветви) [5, теорема 2, с. 78] существует интегрируемый селектор $v^n(t) \in H(t, x_t)$ такой, что $\|\dot{x}^n(t) - v^n(t)\| \leq \eta_n(t)$, где функция η_n из определения δ_n–решения. Для любого n определим функцию $y^n(t) = \varphi(0) + \int_0^t v^n(s)\,ds$ на отрезке $[0, \Delta]$, а при $t \in [-a, 0]$ положим ее равной начальной функции φ. Поскольку $\|x^n(t) - y^n(t)\| \leq \delta_n \Delta$, то последовательность функций y^n при $n \to \infty$ равномерно сходится на отрезке $[-a, \Delta]$ к той же абсолютно непрерывной предельной функции x, что и последовательность x^n. Так как отображение $H(t, \cdot)$ является липшицевым, то для заданного $\varepsilon > 0$ при $n \geq n(\varepsilon)$ получим включение $\dot{y}^n(t) = v^n(t) \in [H(t, x_t)]^\varepsilon$. По определению интеграла от многозначного отображения отсюда следует $y^n(t) - \varphi(0) \in \int_0^t [H(s, x_s)]^\varepsilon\,ds \equiv I(t, \varepsilon)$. Множество $I(t, \varepsilon)$ замкнуто, поэтому после перехода к пределу при $n \to \infty$ получим $x(t) - \varphi(0) \in I(t, \varepsilon)$. В таком случае, по определению интеграла, существует интегрируемый селектор $v(s) \in [H(s, x_s)]^\varepsilon$ для которого $x(t) - \varphi(0) = \int_0^t v(s)\,ds$. Отсюда $\dot{x}(t) = v(t) \in co[H(t, x_t)]^\varepsilon = [H(t, x_t)]^\varepsilon$ почти всюду по t. Здесь $co(H)$ обозначает выпуклую оболочку множества H. В силу произвольности ε и замкнутости $H(t, x_t)$ получим окончательно $\dot{x}(t) \in H(t, x_t)$. Свойство 1 доказано.

Для ДВ аналогичное свойство используется для доказательства теорем существования решений [4, лемма 2, с.217], [6, теорема 1, с.60-61]. Для ФДВ также имеет место подобная ситуация.

Свойство 2. *Задача* (8) *имеет решение, определенное в промежутке* $[-a, \infty)$.

Доказательство этого свойства проводится на основании свойства 1 и теоремы Арцела сначала для конечного отрезка $[-a, \Delta], \Delta > 0$, аналогично [6, теорема 1, сс. 60-61]. Затем решение продолжается на отрезок $[-a, 2\Delta]$ и т.д.

Следующее свойство характеризует непрерывную зависимость решений ФДВ от данных задачи, при этом l – постоянная Липшица отображения $H(t, \cdot)$.

Свойство 3. *Пусть для абсолютно непрерывной функции* $y : [-a, \Delta] \to R^m$ *выполняется неравенство* $\beta(\dot{y}(t), H(t, y_t)) \leq \eta(t)$, *где* $\eta \in L_1([0, \Delta]), y|_{T_0} = \psi$. *Тогда существует решение* x *задачи* (8) *такое, что* $\|x(t) - y(t)\| \leq r(t)$, *где* $r(t)$ *– решение задачи Коши* $\dot{r} = lr + \eta(t),\ r(0) = \|\varphi(0) - \psi(0)\|$, *то есть* $r(t) = \|\varphi(0) - \psi(0)\| \exp(lt) + \int_0^t \eta(s) \exp(l(t-s))\,ds$.

Для ДВ это свойство в более общей форме доказано в [7]. Доказательство для ФДВ при условии $r(0) = 0$ приведено, например, в [3] и легко обобщается на случай $r(0) > 0$. Обычно функция y из свойства 3 является решением ФДВ $\dot{y} \in G(t, y_t), y|_{T_0} = \psi$. Поэтому если $\beta(G(t, y_t), H(t, y_t)) \leq \eta(t)$, то по свойству 3 можно аппроксимировать решение y некоторым решением задачи (8) с указанной погрешностью.

5. Доказательство теоремы

Анализ доказательств теорем усреднения для ДВ с быстрыми и медленными переменными [2, с.35–53] показывает, что свойства 1–3, аналогичные свойствам решений ДВ, позволяют почти дословно перенести доказательства, полученные для ДВ, на задачи усреднения для ФДВ. Так как соответствующие выкладки для ДВ подробно изложены в [2], то нет смысла повторять достаточно громоздкие доказательства в краткой статье. Теорема доказана.

6. Построение усредненных ФДВ

Для задач аппроксимации сверху или взаимной построение отображения F_0 из (2) основано на вычислении усредненной опорной функции и проводится точно так же, как и для ДВ [2, глава 3].

Литература

[1] Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. Киев–Одесса: Лыбидь. 1992. 188с.

[2] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. Изд–тво Московского университета. 1998. 160 с.

[3] T. Janiak, E.Łuczak–Kumorek. Method of averaging for the system of functional–differential inclusions//Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions. 1996. 16. Pp. 137–151.

[4] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление //Труды Математ. инст. АН СССР. 1985. Т.169. С.194–252.

[5] Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. Часть 1.М.: Изд–во МГУ, 1979. 89 с.

[6] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М:Наука. 1985. 223 с.

[7] Plis A. On trajactories of orientor fields//Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. 1965. v. 13. N 8. P. 571-573.

THE FUNCTIONAL–DIFFERENTIAL INCLUSIONS AND AND THE AVERAGING PRINCIPLE

O. Filatov[2]

It is considered the three approximation problems for functional–differential inclusions with a rapid and slow variables: above, below and simultaneously.

It is showed that the proof of the averaging theorem for functional–differential inclusions is based on the properties of the approximate solutions and of the continuous dependence solutions of the date of the problem. These properties are by anology with differential inclusions.

[2]Oleg Filatov, dept. of mathematics and mechanics, Samara state university