ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ СИММЕТРИИ ЛИ

М.И. Тимошин[1]

В данной статье вводится терминология классического группового анализа. Приводится теорема о линеаризации. Даны некоторые примеры интегрируемых случаев уравнения Абеля второго рода.

Введение

Работы Софуса Ли [1,2], посвящённые симметриям дифференциальных уравнений, показали, что многие ранее известные методы аналитического решения дифференциальных уравнений имеют в своей основе групповой подход. Основные идеи классического группового анализа изложены в работах [3-9].

Приведём соответствующую терминологию. Принято говорить, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad (') = d/dx \tag{1}$$

допускает симметрию Φ, если замена переменных $(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(x, y)$ не меняет вида уравнения. Чаще всего, говоря о симметриях обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) подразумевают точечные преобразования $\Phi_\tau : D \to D_*$, зависящие от скалярного параметра τ, которые в координатной форме записываются в виде

$$\bar{x} = f(x, y; \tau), \quad \bar{y} = g(x, y; \tau), \tag{2}$$

где D, D_* – области из R^2, при этом выполняется закон композиции $\Phi_{\tau+s} = \Phi_\tau \Phi_s$. Такие преобразования принято называть однопараметрическими группами.

Выделяют два случая, когда уравнение (1) допускает симметрии (2):

$$(a) \qquad y^{(n)} - F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y}^{(n)} - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n-1)}) = 0,$$

$$(b) \quad y^{(n)} - F(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(n-1)})(\bar{y}^{(n)} - F(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(n-1)})) = 0,$$

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(n-1)}) \neq 0.$$

[1]Тимошин Михаил Иванович, кафедра алгебры Самарского государственного педагогического университета

В первом случае говорят, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования (2). Левая часть при этом называется дифференциальным инвариантом n-го порядка. Второй случай (b) более общий, и именно во втором случае принято говорить о симметрии дифференциального уравнения. Преобразование (2) можно рассматривать как решение задачи Коши для автономной системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{d\tau} = \xi(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{x}(0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{d\tau} = \eta(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{y}(0) = y. \end{cases} \tag{3}$$

Для удобства использования вводится понятие инфинитезимального оператора

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4}$$

Знание оператора (4) полностью определяет группу (2) как решение задачи Коши (3). Дифференциальное уравнение (1) при нахождении симметрий обычно трактуется как некоторая гиперповерхность в пространстве $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, при этом группа определяется на плоскости x, y, а остальные координаты вычисляются по формуле продолжения

$$\eta^{(j)} = \frac{d\eta^{(j-1)}}{dx} - y^{(j)}\frac{d\xi}{dx}. \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{5}$$

Соответствующий оператор, действующий в пространстве n+1 переменной определяется выражением

$$\underset{n}{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^1\frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + \eta^{(n)}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}. \tag{4'}$$

В терминах инфинитезимального оператора критерий инвариантности записывается в виде

$$\underset{n}{X}(y^{(n)} - F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})) = 0 \tag{6}$$

и фактически означает взятие производной по параметру τ. В случае, когда дифференциальное уравнение допускает симметрию, но не является инвариантом, накладывают дополнительное требование

$$\underset{n}{X}(y^{(n)} - F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}))\bigg|_{y^{(n)}=F(x,y,\ldots,y^{(n-1)})} = 0. \tag{7}$$

Знание симметрии позволяет понизить порядок рассматриваемого уравнения. При этом обычно используются либо точечные преобразования (выпрямление координат), либо преобразования, построенные на основе инвариантов. В случае выпрямления координат оператор группы (4) приводится к переносам либо по новой независимой переменной

$$t : X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow X = \frac{\partial}{\partial t},$$

либо по новой зависимой функции

$$u(t) : X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow X = \frac{\partial}{\partial u}.$$

В первом случае новые переменные должны удовлетворять системе $Xu = 0, Xt = 1$, причём уравнение (1) в этих координатах будет иметь вид

$$\frac{d^n u}{dt^n} = G(u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}u}{dt^{(n-1)}}),$$

а во втором случае $Xu = 1, Xt = 0$,

$$\frac{d^n u}{dt^n} = H(t, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}u}{dt^{(n-1)}}).$$

Очевидно, в обоих случаях порядок уравнения понижается на единицу.

Дифференциальные инварианты определяются при решении системы уравнений:

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = \frac{dy'}{\eta^1(x,y,y')} = \dots = \frac{dy^{(n)}}{\eta^{(n)}}. \tag{8}$$

Обычно ограничиваются решением первых двух уравнений и находят величины первых инвариантов $I_0(x,y), I_1(x,y,y')$, поскольку остальные инварианты в случае точечных симметрий могут быть найдены рекуррентно

$$\frac{dI_1}{dI_0} = \frac{I_{1x} + I_{1y}y' + I_{1y'}y''}{I_{0x} + I_{0y}y'} = I_2, \dots, \frac{dI_{n-1}}{dI_0} = I_n, \tag{9}$$

это позволяет выразить уравнение (1) в виде

$$\Omega(I_0, I_1, \frac{dI_1}{dI_0}, \dots, \frac{d^{(n-1)}I_1}{dI_0^{(n-1)}}) = 0,$$

что также позволяет понизить порядок уравнения. Софус Ли показал, что использование вышеприведённой техники для уравнения второго порядка эффективно, когда уравнение (1) допускает по крайней мере два оператора X_1, X_2 вида (4), которые, в свою очередь, удовлетворяют равенству

$$[X_1, X_2] = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \tag{10}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = const, [X_1, X_2] = X_1(X_2) - X_2(X_1)$. В этом случае операторы X_1, X_2 образуют двумерную алгебру Ли, и однопараметрические преобразования (2) могут быть объединены в двухпараметрическую группу. Все двумерные алгебры могут быть сведены преобразованием базисных операторов

$$X_1' = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \qquad X_2' = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2, \qquad \delta \equiv \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0,$$

$(\alpha_i, \beta_j = const)$ к одному из следующих четырёх типов:

$$\begin{array}{lll} I. & [X_1', X_2'] = 0, & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0; \\ II. & [X_1', X_2'] = 0, & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0; \\ III. & [X_1', X_2'] = X_1', & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0; \\ IV. & [X_1', X_2'] = X_1', & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0. \end{array} \tag{11}$$

Приведённые соотношения (11) не меняются под действием невырожденной замены переменных

$$t = t(x,y), \qquad u = u(x,y); \qquad \frac{\partial(t,u)}{\partial(x,y)} \equiv t_x u_y - t_y u_x \neq 0. \tag{12}$$

В случаях I,II операторы коммутируют; и осуществлять выпрямление координат, или выбирать в качестве новых переменных инварианты можно, используя любой из операторов X_1', X_2'. Оставшуюся в этом случае симметрию также используют для понижения порядка, предварительно найдя её представление в новых координатах. В случаях III, IV оператор X_1' является идеалом двумерной алгебры (соответствующая ему однопараметрическая подгруппа называется нормальной) и именно с него необходимо начинать процесс понижения порядка, поскольку в противном случае симметрия будет потеряна.

Наиболее алгоритмичен процесс использования точечных симметрий для интегрирования дифференциальных уравнений порядка не менее второго, так как только в этом случае тождество (7) эквивалентно переопределённой системе линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\xi(x,y), \eta(x,y)$.

1. Линеаризация

В работе [10] показано, что модифицированное уравнение Painleve-Ince

$$y'' + \sigma y y' + \beta y^3 = 0, \tag{13}$$

$\sigma, \beta = const$, допускающее двумерную алгебру

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad [X_1, X_2] = X_1, \tag{14}$$

может быть приведено к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \sigma\frac{du}{dt} + 2\beta u = 0.$$

С точки зрения классического группового анализа линейное ОДУ второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

допускает максимально возможную 8-мерную алгебру Ли. Таким образом, на примере уравнения (13) в работе [10] продемонстрирован способ получения 8-ми симметрий из 2-х. Покажем, как это можно осуществить в случае произвольных двумерных алгебр. Будем называть линеаризацией преобразования ОДУ к линейным ОДУ.

Теорема1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = F(x,y,y')$, допускающее двумерную алгебру Ли (10), конструктивно линеаризуется касательным преобразованием.*

Доказательство. С.Ли показал, что подходящей точечной заменой (12) базисы (11) могут быть выбраны в виде:

$$\begin{array}{lll} I. & X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, & X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}; \\[2ex] II. & X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, & X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial y}; \\[2ex] III. & X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, & X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}; \\[2ex] IV. & X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, & X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}. \end{array} \tag{15}$$

Каждой алгебре операторов (15) соответствует свой тип дифференциального уравнения:

$$I. \qquad y'' = F(y'),$$

$$II. \qquad y'' = F(x),$$

$$III. \qquad y'' = \frac{1}{x}F(y'),$$

$$IV. \qquad y'' = F(x)y'.$$

Очевидно, что дифференциальное уравнение IV типа является линейным, а уравнение II типа приводится к линейному точечной заменой переменных

$$y = \bar{y} + \int \left(\int F(x)dx \right) dx, \qquad x = \bar{x}.$$

Поскольку точечные преобразования (12) не могут изменить количества симметрии ОДУ, то следовательно, если ОДУ второго порядка допускает симметрии типа II, IV, то оно допускает и восьмимерную алгебру. Легко заметить, что дифференциальные уравнения типа I, III линеаризуются использованием преобразования Лежандра:

$$\begin{cases} t = \bar{y}', \\ u = \bar{x}\bar{y}' - \bar{y}, \\ \dfrac{du}{dt} = \bar{x}. \end{cases}$$

При этом из уравнения первого типа получается уравнение второго типа, а из уравнения третьего типа – уравнение четвёртого типа. Теорема доказана.

Пример. В качестве примера линеаризуем приведённое выше дифференциальное уравнение (13). Легко заметить, что соответствующая ему алгебра принадлежит к типу III. Приведём операторы (14) к виду (15). При этом новые переменные должны удовлетворять системе уравнений

$$X_1\bar{y} = 1, \qquad X_1\bar{x} = 0, \qquad X_2\bar{x} = \bar{x}, \qquad X_2\bar{y} = \bar{y},$$

разрешая которую находим значения

$$\bar{y} = x + \frac{1}{y}, \bar{x} = \frac{1}{y}.$$

Сделав замену переменных в уравнении (13), придём к уравнению

$$\bar{y}''\bar{x} + (\bar{y}' - 1)(2 - \sigma(\bar{y}' - 1) + \beta(\bar{y}' - 1)^2) = 0.$$

Воспользовавшись преобразованием Лежандра, получим линейное уравнение

$$\frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}(t - 1)(2 - \sigma(t - 1) + \beta(t - 1)^2) = 0.$$

Вопрос о приведении обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами подробно рассматривался в [11]. Теорема 1 позволяет, опираясь на произвольные двумерные алгебры, конструктивно линеаризовывать уравнения второго порядка.

Наличие двумерных алгебр не является необходимым условием линеаризации. В работах [12,13] приведён ряд примеров автономных дифференциальных уравнений, которые также допускают линеаризацию.

Поскольку существование одной симметрии позволяет в случае ОДУ второго порядка перейти к ОДУ первого порядка, допускающих бесконечномерные алгебры, то при этом всегда происходит переход к безразмерным алгебрам. Рассмотрим соответствующую процедуру на примере автономных ОДУ второго порядка

$$y'' = F(y, y'). \tag{16}$$

Уравнение (16) допускает симметрию

$$X = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{17}$$

Пусть u, t – функционально независимые инварианты оператора (17), их можно представить в виде

$$\begin{cases} u = \bar{\varphi}(y, y'), \\ t = \bar{\psi}(y, y'). \end{cases}$$

Разрешив последнюю систему относительно переменных y, y' и проведя дифференцирование, получим

$$y = \psi(t, u), \qquad y' = \varphi(t, u), \qquad y'' = \varphi(t, u)\frac{\varphi_t + \varphi_u \frac{du}{dt}}{\psi_t + \psi_u \frac{du}{dt}}. \tag{18}$$

Воспользовавшись найденными выражениями, приведём (16) к виду

$$\varphi(t, u)\frac{\varphi_t + \varphi_u \frac{du}{dt}}{\psi_t + \psi_u \frac{du}{dt}} = F(\psi, \varphi). \tag{19}$$

Переход от уравнения (16) заменой (18) к уравнению (19) можно разбить на два этапа:

1. Применение к уравнению (16) преобразования вида

$$z = y, \qquad p = y', \qquad \frac{dp}{dz} = \frac{y''}{y'} = \frac{y''}{p} \tag{20}$$

и переход к уравнению

$$p\frac{dp}{dz} = F(z, p). \tag{21}$$

2. Осуществление в уравнении (21) невырожденной точечной замены:

$$z = \psi(t, u), \qquad p = \varphi(t, u), \qquad \frac{dp}{dz} = \frac{\varphi_t + \varphi_u \frac{du}{dt}}{\psi_t + \psi_u \frac{du}{dt}}, \tag{22}$$

которая приводит к уравнению (19).

Преобразование (22) является произвольным точечным преобразованием ОДУ первого порядка в ОДУ первого порядка. Хорошо известно, что любые два ОДУ первого порядка можно локально перевести друг в друга точечной заменой переменных. В частности, за счёт выбора преобразования (22) всегда можно привести уравнение (16) к виду $\frac{du}{dt}$.

В качестве примера рассмотрим вопрос об интегрировании дифференциального уравнения

$$y'' + y' + R(y) = 0, \tag{23}$$

связанного с исследованием уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова. В [12] опубликованы все случаи функций $R(y)$, при которых оно допускает двумерные алгебры. Воспользовавшись преобразованием (20), придём к каноническому уравнению Абеля второго рода

$$p\frac{dp}{dz} + p + R(z) = 0. \tag{24}$$

Построим ОДУ вида (24), исходя из линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} + \frac{(c_1 t + c_2)u + k_1 t + k_2}{c_3 t^2 + c_4 t + c_5} = 0, \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, k_1, k_2 = const),$$

используя в качестве (22) преобразования вида

$$u = \phi(z), \qquad t = f(z)p + s(z).$$

При этом получаем четыре нетривиальных интегрируемых класса уравнения (24) с параметрическим заданием функции $R(z)$

1 : $$c_1 = 1, c_3 \neq 0, c_3 \neq 1$$

$$\begin{cases} R = -(\phi + k_1)^{c_3 - 1}\dfrac{c_3(c_2\phi + k_2)^2 + c_5(\phi + k_1)^2 - c_4(\phi + k_1)(c_2\phi + k_2)}{(2c_3c_2 - c_4)\phi - c_4k_1 + c_2k_1 - k_2 + 2c_3k_2}, \\ z = (\phi + k_1)^{c_3 - 1}\dfrac{c_3k_1c_2 - c_4k_1 + c_4k_1c_3 + c_3k_2 - 2c_3^2k_2 + (2c_2c_3 - 2c_2c_3^2 - c_4 + c_4c_3)\phi}{c_3(c_3 - 1)}, \end{cases}$$

$$f(z) = (\phi + k_1)^{-c_3}, \qquad s(z) = -\frac{\phi c_2 + k_2}{\phi + k_1};$$

2 : $$c_1 = 1, c_3 = 1$$

$$\begin{cases} R = -\dfrac{(c_2^2 - c_4c_2 + c_5)\phi^2 - (c_4k_2 - 2c_5k_1 + c_4c_2k_1 - 2c_2k_2)\phi - c_4k_2k_1 + c_5k_1^2 + k_2^2}{(2c_2 - c_4)\phi - c_4k_1 + c_2k_1 + k_2}, \\ z = (c_4 - 2c_2)\phi + ln(\phi + k_1)(k_1c_2 - k_2), \end{cases}$$

$$f(z) = (\phi + k1)^{-1}, \qquad s(z) = -\frac{\phi c_2 + k_2}{\phi + k_1};$$

3 : $$c_1 = 1, c_3 = 0$$

$$\begin{cases} R = -\dfrac{(c_5 - c_4c_2)\phi + (c_5k_1 - k_2c_4)}{(c_2k_1 - k_2 - c_4k_1) - c_4\phi}, \\ z = c_4 ln(\phi + k_1) + \dfrac{k_1c_2 - k_2}{\phi + k_1}, \end{cases}$$

$$f(z) = 1, \qquad s(z) = -\frac{\phi c_2 + k_2}{\phi + k_1};$$

4 : $$c_1 = 0, k_1 = 1, c_3 \neq 0$$

$$\begin{cases} R = -e^{\phi c_3} \dfrac{c_3 c_2^2 \phi^2 + (2c_3 c_2 k_2 - c_4 c_2)\phi + c_5 - c_4 k_2 + c_3 k_2^2}{2c_3 c_2 \phi + 2c_3 k_2 - c_4 + c_2}, \\ z = -e^{\phi c_3} \dfrac{2c_3 c_2 \phi - c_2 + 2c_3 k_2 - c_4}{c_3}, \end{cases}$$

$$f(z) = e^{-\phi c_3}, \qquad s(z) = -c_2 \phi - k_2.$$

Подбирая величины $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, k_1, k_2$, можно получать различные интегрируемые случаи уравнения (24).

Литература

[1] Lie S. Vorlesungen uber continuierliche Gruppen. Leipzig: Teubner, 1893. 805P.
[2] Lie S. Vorlesungen uber Differential geichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: B.G.Teubner, 1891.
[3] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1966.
[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
[5] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
[6] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
[7] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание. 1989. 47с.
[8] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. М.: Знание. 48с.
[9] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике //Успехи мат. наук. 1992. Т.47. Вып.4. С.83-144.
[10] Abraham-Shrauner B. and Leach P.G. "Hidden Symmetries of Nonlinear Ordinary Differential Equations" // Lectures in Applied Mathematics. V.29. 1993.
[11] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования ОДУ. Саратов: Изд-во СГУ, 1989.
[12] Berkovich L.M., The Method of an Exact Linearization of n-order Ordinary Differential Equations // J.Nonlin. Math.Phys., N 3-4, 341-350 (Kyiv, 1996)
[13] Беркович Л.М. Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация // Доклады Академии наук, 1999, Т.368; Т.5, С.604-608.

LINEARIZATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER ADMITTING SYMMETRIES OF LIE

M. Timoshin[2]

In the given article is enterred terminology of classical group analysis. Presented the theorem about linearizations. Given some examples of integrable events of Abel's equation second sort.

[2]Mihail Timoshin, chair of algebra, Samara state pedagogical university