ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ НИКОДИМА О СХОДИМОСТИ

Т.А. Срибная [1]

Для последовательности неаддитивных функций, заданных на ортомодулярном частично упорядоченном множестве и принимающих значения в произвольном топологическом пространстве, доказан результат, обобщающий классическую теорему Никодима о сходимости

В работах [1-3] известные результаты теории меры (теорема Никодима о равномерной ограниченности, критерий Кафьеро равномерной исчерпываемости, теорема Брукса - Джеветта и теорема Никодима о сходимости) доказаны для аддитивных функций, заданных на ортомодулярном частично упорядоченном множестве, со значениями в равномерной полугруппе.

В данной статье для функций, определенных на ортомодулярном частично упорядоченном множестве, со значениями в произвольном топологическом пространстве, не наделенном никакими алгебраическими операциями, доказан результат, обобщающий классическую теорему Никодима о сходимости [4, С.177]. В качестве следствий получены основные разультаты работы [1], а также обобщение теоремы Никодима о сходимости последовательности многозначных функций, заданных на ортомодулярном частично упорядоченном множестве. Пусть $(L, \leq)$ – частично упорядоченное множество (сокращенно ч.у. множество). Пусть D – непустое подмножество ч.у. множества $(L, \leq)$. Если супремум (соответственно, инфимум) множества D существует в L, то обозначим его через $\vee D$ (соответственно, $\wedge D$). В частных случаях будем писать $\vee\{a, b\} = a \vee b$; $\wedge\{a, b\} = a \wedge b$, $\vee\{a_i,\ i \in I\} = \bigvee\limits_{i \in I} a_i$, где $a, b, a_i \in L,\ I \subset N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Пусть $(L, \leq)$ – ч.у. множество, содержащее наименьший и наибольший элементы, которые обозначим через 0 и 1. Ортодополнением на L называют функцию $'$, действующую из L в L, такую, что для любых $a, b \in L$ справедливо:

1) $(a')' = a$;

2) если $a \leq b$, то $b' \leq a'$;

3) $a \wedge a' = 0$.

Ортомодулярным ч.у. множеством называют ч.у. множество $(L, \leq)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) L содержит наименьший элемент 0 и наибольший элемент 1;

---

[1] Срибная Татьяна Аркадьевна, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

2) на L задано ортодополнение$'$, для которого справедливо:
(i), если $a, b \in L$ и $a \leq b'$, то $a \vee b$ существует в L,
(ii), если $a, b \in L$ и $a \leq b$, то $b = a \vee (a' \wedge b)$.

Ортомодулярной решеткой называется ортомодулярное ч.у. множество, являющееся одновременно решеткой.

Пример 1. Булева алгебра является дистрибутивной ортомодулярной решеткой.

Пример 2. Известно [5], что квантово-механическая система может быть описана заданием трех элементов: ч.у. множества Y, операции ортогонального дополнения на нем и некоторого подмножества вероятностных мер на Y. При этом основное различие между классической и квантовой механикой состоит в том, что Y не является булевой алгеброй. Почти все современные теории квантовой механики основываются на том, что ч.у. множество Y изоморфно частично упорядоченному по включению множеству $L(H)$ всех замкнутых подпространств бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства H. Определим на множестве $L(H)$ ортодополнение, положив для любого $F \in L(H)$: $F' = F^{\perp} = H \ominus F$, где $F^{\perp}$ – ортогональное дополнение подпространства F. Множество $(L(H), \subset, ', \{0\}, H)$ представляет собой ортомодулярную решетку, не удовлетворяющую условию дистрибутивности.

Пример 3. Пусть $(L, \leq, ', 0, 1)$ – ортомодулярное ч.у. множество. Пусть $a \in L \setminus \{0\}$. Положим $[0; a] = \{b \in L;\ b \leq a\}$. Если для любого $b \in [0, a]$ определить операцию дополнения $b^c = b' \wedge a$, то множество $([0; a], \leq, {}^c, 0, a)$ становится ортомодулярным ч.у. множеством.

Пусть L – ортомодулярное ч.у. множество. Говорят, что два элемента a и b из L ортогональны, если $a \leq b'$ (или $b \leq a'$, что эквивалентно).

Непустое подмножество P множества L называют ортогональным, если оно состоит из попарно ортогональных элементов. Из аксиомы (i) следует, что если P – конечное ортогональное подмножество L, то в L существует $\vee P$.

Ортомодулярное ч.у. множество L называется σ – ортополным, если в L существует супремум любого счетного ортогонального подмножества множества L.

Пусть L – ортомодулярное ч.у. множество, (X, τ) – хаусдорфово топологическое пространство, $x \in X$ – некоторая фиксированная точка, $\mathcal{H}$ – фундаментальная система окрестностей точки $x \in X$.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mu\}$, $\mu : L \to X$ – некоторое семейство функций.Пусть $\mu(0) = x$. Будем говорить, что функции семейства $\mathcal{M} = \{\mu\}$ – равномерно квазитреугольные, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует окрестность $V \in \mathcal{H}$ такая, что для любых ортогональных элементов $a, b \in L$ и для любой функции $\mu \in \mathcal{M}$ справедливо:

если $\mu(a) \in V,\ \mu(b) \in V$, то $\mu(a \vee b) \in U$,

если $\mu(a) \in V,\ \mu(a \vee b) \in V$, то $\mu(b) \in U$.

Пример 4. В работах [1-3] рассматриваются аддитивные функции, заданные на ортомодулярном ч.у. множестве, со значениями в равномерной полугруппе $(S, +, \theta, \mathcal{U})$. Функция $\lambda : L \to S, \lambda(0) = \theta$ называется аддитивной, если для любых ортогональных элементов $a, b \in L$ справедливо $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.

Если $(S, +, \theta, \mathcal{U})$ – равномерная полугруппа, то через $\tau(\mathcal{U})$ обозначим топологию, соответствующую равномерности $\mathcal{U}$. Аддитивные функции семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : L \to S$, рассматриваемые как функции со значениями в топологическом пространстве $(S, \tau(\mathcal{U}))$, являются равномерно квазитреугольными.

Пример 5. Пусть $(G, +, \theta, \tau)$ – топологическая абелева группа. Обозначим через $\mathcal{A}(G)$ семейство всех непустых подмножеств G. Замыкание множества $A \subset G$

обозначим $\overline{A}$. Следуя [6], отображение $\Phi : L \to \mathcal{A}(G)$, $\Phi(0) = \{\theta\}$ будем называть квазиаддитивным, если для любых ортогональных элементов $a, b \in L$ справедливо

$$\overline{\Phi(a \vee b)} \subset \overline{\Phi(a) + \Phi(b)};\ \overline{\Phi(a)} \subset \overline{\Phi(a \vee b) - \Phi(b)}.$$

Если $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $\mu_\alpha : L \to G$, – семейство аддитивных функций, то отображение $\Phi : L \to \mathcal{A}(G)$, $\Phi(a) = \{\mu_\alpha(a),\ \alpha \in J\}$, $a \in L$ является квазиаддитивным.

Обозначим через $\mathcal{U}$ равномерность на $\mathcal{A}(G)$, определяемую семействами

$$\{(A, B) \in \mathcal{A}(G) \times \mathcal{A}(G) : A \subset \overline{B + U},\ B \subset \overline{A + U}\},\quad U \in \mathcal{H},$$

где $\mathcal{H}$ – фундаментальная система окрестностей θ, как базой окружений. Равномерную топологию на $\mathcal{A}(G)$, соответствующую равномерности $\mathcal{U}$, обозначим $\widetilde{\tau}$. Семейство квазиаддитивных соответствий $\Phi : L \to (\mathcal{A}(G), \widetilde{\tau})$ является примером семейства равномерно квазитреугольных соответствий.

Будем говорить, что функции семейства $\mathcal{M} = \{\mu\}$, $\mu : L \to (X, \tau)$

– равномерно исчерпывающие, если для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ соотношение

$$\lim_n \mu(e_n) = x \tag{1}$$

выполняется равномерно относительно $\mu \in \mathcal{M}$;

– равномерно непрерывны сверху в нуле, если для любой убывающей последовательности $\{e_n\} \subset L$ такой, что $\bigwedge\limits_{n \in N} e_n = 0$, соотношение (1) выполняется равномерно относительно $\mu \in \mathcal{M}$.

Если семейство функций $\mathcal{M} = \{\mu\}$ состоит из одной функции, то в первом случае будем говорить, что функция μ - исчерпывающая, а во втором - непрерывна сверху в нуле.

Для любого элемента $a \in L$ положим

$$\widetilde{\mu}(a) = \{\mu(b),\ b \in L,\ b \leq a\}.$$

Всюду в дальнейшем (в лемме 1 и теоремах 1,2) $L - \sigma$ – ортополное ортомодулярное ч.у. множество, X – хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{H}$ – фундаментальная система окрестностей точки $x \in X$.

Лемма 1. *Пусть $\{\mu_n\}$, $\mu_n : L \to X$ – последовательность исчерпывающих функций. Для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любой ортогональной последовательности $\{e_n\}$ из L существует такая ортогональная подпоследовательность $\{e_{k_i}\} \subset \{e_k\}$, что для любого номера m справедливо*

$$\widetilde{\mu}_{k_m}\Big(\bigvee_{i=m+1}^{\infty} e_{k_i}\Big) \subset U.$$

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{H}$, пусть $\{e_n\}$ – ортогональная последовательность из L. Рассмотрим $(M_k)_{k \in N}$- разбиение множества $N = \{1, 2, ...\}$ такое, что каждое множество $M_k, k = 1, 2, ...,$ – бесконечно.

Пусть

$$a_k = \bigvee_{i \in M_k} e_i,\ k \in N.$$

Покажем, что $\{a_k\}$ – ортогональная последовательность из L. Пусть $i \neq j$. По условию $e_k \le e_p{}'$ для любых $k \in M_i$ и $p \in M_j$. Зафиксируем некоторый номер $p \in M_j$, тогда $\bigvee\limits_{k \in M_i} e_k \le e_p{}'$. Так как последнее соотношение справедливо для любого $p \in M_j$, то

$$\bigvee_{k \in M_i} e_k \le \bigwedge_{p \in M_j} e_p{}' = \Big(\bigvee_{p \in M_j} e_p \Big)',$$

что означает ортогональность элементов a_i и a_j.

Так как функция $\mu_1 : L \to X$ – исчерпывающая, то существует номер $k_0 \in N$ такой, что

$$\widetilde{\mu_1}(a_{k_0}) \subset U.$$

Пусть $e_{k_1} \in \{e_i, i \in M_{k_0}\}$, $k_1 > 1$. К ортогональной последовательности $\{e_n^1\} = \{e_i, i \in M_{k_0}\}$ и к функции μ_{k_1} применим предыдущее рассуждение. Получим ортогональную подпоследовательность $\{e_n^2\} \subset \{e_n^1\}$, для которой

$$\widetilde{\mu}_{k_1}\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n^2 \Big) \subset U.$$

Пусть $e_{k_2} \in \{e_n^2\}$, $k_2 > k_1$. Продолжив процесс по индукции, построим подпоследовательность номеров $\{k_m\}$ и элементов $\{e_{k_m}\} \subset L$, для которых

$$\widetilde{\mu}_{k_m}\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n^{m+1} \Big) \subset U$$

и

$$\widetilde{\mu}_{k_m}\Big(\bigvee_{i=m+1}^{\infty} e_{k_i} \Big) \subset U, \ m = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 1. *Пусть $\mu_n : L \to X$, $n \in N$ – последовательность исчерпывающих равномерно квазитреугольных функций. Пусть для любого $a \in L$ существует*

$$\lim_n \mu_n(a) = \mu(a), \tag{2}$$

причем функция μ – исчерпывающая. Тогда функции последовательности $\{\mu_n\}$ являются равномерно исчерпывающими.

Доказательство. Предположим, что функции последовательности $\{\mu_n\}$ не являются равномерно исчерпывающими. Тогда существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$ и ортогональная последовательность $\{a_n\}$ из L такие, что

$$\mu_n(a_n) \notin U, \ n \in N. \tag{3}$$

По условию равномерной квазитреугольности для окрестности $U \in \mathcal{H}$ найдем окрестность $V \in \mathcal{H}$, а для окрестности $V \in \mathcal{H}$ – окрестность $V_1 \in \mathcal{H}$. Пусть $V_2 = V \cap V_1$.

Так как функция μ – исчерпывающая, то, согласно лемме 1, существует бесконечное подмножество $M \subset N$ такое, что

$$\widetilde{\mu}\Big(\bigvee_{i \in M} a_i \Big) \subset V_2. \tag{4}$$

Положим $n_1 = minM$. Из соотношения (4) следует

$$\mu(a_{n_1}) \in V_2.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(a_{n_1}) = \mu(a_{n_1}),$$

то существует номер $n_2 > n_1,\ n_2 \in M$, для которого

$$\mu_{n_2}(a_{n_1}) \in V_2.$$

Из соотношения (4) следует, что

$$\mu(a_{n_1}) \in V_2,\ \mu(a_{n_1} \vee a_{n_2}) \in V_2,\ \mu(a_{n_2}) \in V_2.$$

Отсюда и из условия (2) вытекает существование такого номера $n_3 > n_2,\ n_3 \in M$, что

$$\mu_{n_3}(a_{n_1}) \in V_2,\ \mu_{n_3}(a_{n_1} \vee a_{n_2}) \in V_2,\ \mu_{n_3}(a_{n_2}) \in V_2.$$

Продолжив процесс по индукции, построим подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset M$ такую, что

$$\mu_{n_k}(\bigvee_{i\in I} a_{n_i}) \in V_2,\ I \subset \{1, 2, ..., k-1\}.$$

Так как $V_2 \subset V$, то из последнего соотношения и условия (3), в силу выбора окрестности $V \in \mathcal{H}$, следует

$$\mu_{n_k}((\bigvee_{i\in I} a_{n_i}) \vee a_{n_k}) \notin V. \tag{5}$$

Для упрощения дальнейшей записи положим

$$\mu_{n_k} = \nu_k,\ a_{n_k} = e_k.$$

По лемме 1 существует ортогональная подпоследовательность $\{e_{k_m}\} \subset \{e_k\}$ такая, что

$$\widetilde{\nu}_{k_i}\left(\bigvee_{m=i+1}^{\infty} e_{k_m}\right) \subset V_1,\ i \in N.$$

Из (5) следует, что

$$\nu_{k_i}(e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_i}) \notin V,\ i \in N.$$

Из последних двух соотношений получим

$$\nu_{k_i}\left(\bigvee_{m=1}^{\infty} e_{k_m}\right) \notin V_1,\ i \in N. \tag{6}$$

Обозначим

$$e = \bigvee_{m=1}^{\infty} e_{k_m}.$$

Так как $\mu(e) \in V_2$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \nu_{k_i}(e) = \mu(e)$, то существует номер $p \in N$ такой, что для всех $i > p$

$$\nu_{k_i}(e) \in V_2 \subset V_1,$$

что противоречит (6).

Теорема 2. (обобщение теоремы Никодима о сходимости). *Пусть* $\mu_n : L \to X$, $n \in N$ *– последовательность исчерпывающих равномерно квазитреугольных функций. Пусть для любого* $a \in L$ *существует*

$$\lim_n \mu_n(a) = \mu(a),$$

причем функция μ *– исчерпывающая. Если каждая функция* μ_n, $n \in N$ *непрерывна сверху в нуле, то функции последовательности* $\{\mu_n\}$ *равномерно непрерывны сверху в нуле.*

Доказательство. Согласно теореме 1, функции последовательности $\{\mu_n\}$ – равномерно исчерпывающие. Предположим, что они не являются равномерно непрерывными сверху в нуле. Тогда существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$ и убывающая последовательность $\{a_i\}$ из L, $\bigwedge\limits_{i \in N} a_i = 0$ такие, что

$$\mu_i(a_i) \notin U. \tag{7}$$

Для окрестности $U \in \mathcal{H}$ найдем окрестность $V \in \mathcal{H}$ по условию равномерной квазитреугольности последовательности $\{\mu_n\}$.

Пусть $k_1 = 1$. Так как функция μ_{k_1} непрерывна сверху в нуле, то существует номер k_2, $k_2 > k_1$ такой, что

$$\mu_{k_1}(a_{k_2}) \in V.$$

Так как функция μ_{k_2} непрерывна сверху в нуле, то существует номер k_3, $k_3 > k_2$ такой, что

$$\mu_{k_2}(a_{k_3}) \in V.$$

Продолжив процесс по индукции, построим подпоследовательность номеров $\{k_i\}$ такую, что

$$\mu_{k_i}(a_{k_{i+1}}) \in V, \ i = 1, 2, ... \tag{8}$$

Так как $a_{k_{i+1}} \le a_{k_i}$, то, согласно аксиоме (ii),

$$a_{k_i} = a_{k_{i+1}} \vee ({a_{k_{i+1}}}' \wedge a_{k_i}). \tag{9}$$

Обозначим

$$b_i = {a_{k_{i+1}}}' \wedge a_{k_i},$$

ясно, что $b_i \in L$, $i \in N$.

Покажем, что последовательность $\{b_i\}$ ортогональна. Пусть для определенности $j < i$, тогда $a_{k_i} \le a_{k_{j+1}}$. Отсюда следует

$$b_i = a_{k_i} \wedge {a_{k_{i+1}}}' \le a_{k_i} \le a_{k_{j+1}} \le {a_{k_j}}' \vee a_{k_{j+1}} = {b_j}',$$

что означает попарную ортогональность элементов последовательности $\{b_i\}$.

Из (7), (8) и (9) получим

$$\mu_{k_i}(b_i) \notin V, \ i \in N,$$

что противоречит условию равномерной исчерпываемости функций последовательности $\{\mu_n\}$.

Из теорем 1 и 2 в качестве следствий могут быть получены основные результаты работы [1].

В следствиях 1 и 2 так же как и в работе [1], символом $sa(L, S)$ будем обозначать множество всех исчерпывающих аддитивных функций, заданных на σ -ортополном ортомодулярном ч.у. множестве $(L, \leq, ', 0, 1)$, со значениями в равномерной полугруппе $(S, +, \theta, \mathcal{U})$.

Следствие 1. *Если* $\{\lambda_i\}_{i=0,1,2,...}$ *– последовательность из* $sa(L, S)$ *такая, что для любого* $a \in L$ $\lim_{i\to\infty} \lambda_i(a) = \lambda_0(a)$, *то функции последовательности* $\{\lambda_i, i = 1, 2, ...\}$ *равномерно исчерпывающие.*

Следствие 2. *Если* $\{\lambda_i\}_{i=0,1,2,...}$ *– последовательность из* $sa(L, S)$ *такая, что для любого* $a \in L$ $\lim_{i\to\infty} \lambda_i(a) = \lambda_0(a)$*; причем каждая функция* λ_i, $i = 1, 2, ...$, *непрерывна сверху в нуле, то функции последовательности* $\{\lambda_i, i = 1, 2, ...\}$ *равномерно непрерывны сверху в нуле.*

Следствие 3. *Теоремы 1 и 2 справедливы также для последовательности квазиаддитивных соответствий, заданных на* σ *-ортополном ортомодулярном ч.у. множестве* L *и принимающих значения в классе всех непустых подмножеств топологической абелевой группы* $(G, +, \theta, \tau)$.

Отметим, что для последовательности аддитивных соответствий, заданных на квази - σ – кольце и принимающих значения в классе всех непустых подмножеств топологической абелевой группы, обобщение теоремы Никодима о сходимости доказано в работе [7].

Литература

[1] Morales P. A non - commutative version of the Brooks - Jewett theorem// Proc. of First Winter Sch. Measure Theory. 1988. 10-15. P.88-92.

[2] Licia P., Traynor T. Non commutative groupvalued measures on an orthomodular poset// Math. Japonica, 1994, 40, No 2, P.309-315.

[3] Morales P., Maria J. L. A Non - Commutative Version of the Nikodym Boundedness Theorem// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1994, XLII, P.505-517.

[4] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962. 895с.

[5] Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965. 221с.

[6] Drewnowski L. Additive and conntable additive correspondences// Rocz. Pol. tow. mat. 1976. V.19. No 1 (Ser. I). P.25-54.

[7] Precupanu A.M. On certain Nikodym tyre theorems for multimeasures// An st. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, S.I. Mat. 1989. V.35. P.93-100.

A GENERALIZATION OF NIKODYM CONVERGENCE THEOREM

T. Sribnaya[2]

In this paper a version of the Nikodym Theorem on the convergence of sequences of nonadditive set functions defined on an orthomodular poset and widh values in a topological space is proved.

[2]Tat'yana Sribnaya, dept. of math., Samara state university