ЗАДАЧИ О НАРУШЕНИИ СИММЕТРИИ ПРИ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА-ХОПФА. I

Б.В. Логинов,[1] М.Ю. Макаров[2]

На основе результатов [10-14] с использованием методов группового анализа рассмотрено построение и исследование уравнения разветвления (УР) Ляпунова-Шмидта с симметрией кристаллографических групп. Целью первой части работы является построение общего вида УР по допускаемой им группе в задачах о нарушении симметрии, второй – определение асимптотики разветвляющихся решений.

Введение

Метод Ляпунова-Шмидта в стационарной теории ветвления решений нелинейных уравнений был модифицирован [1,2] для разыскания периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа введением предложенной А.Пуанкаре замены переменных [3,4]. Дальнейшее развитие этого направления в особенности при использовании групповой симметрии, содержится в работах [5-16]. Теорема о наследовании уравнением разветвления (УР) групповой симметрии нелинейной задачи [17-18] позволила на основе методов группового анализа [19] дать единый подход к построению общего вида УР бифуркации Андронова-Хопфа по допускаемой им группе [10-15]. Здесь этот подход реализуется в приложении к задачам о нарушении симметрии: определяется общий вид УР Ляпунова-Шмидта при бифуркации Андронова-Хопфа и в инвариантных относительно УР подпространствах с соответствующей подгруппой симметрии выписывается асимптотика разветвляющихся решений.

Использованы терминология и обозначения [15,20,21].

1. Уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта

В вещественных банаховых пространствах E_1,E_2 рассматривается уравнение

$$A(\frac{d}{dt}) \equiv A_s \frac{d^s x}{dt^s} + A_{s-1} \frac{d^{s-1} x}{dt^{s-1}} + \cdots + A_1 \frac{dx}{dt} = Bx - R(x, \varepsilon). \tag{1}$$

Здесь $A_k : D_A \subset E_1 \to E_2$,$\bar{D}_A = E_1$,$B : D_B \subset E_1 \to E_2$,$\bar{D}_B = E_1$,$D_A \supset D_B$ – замкнутые линейные операторы, $R(x, \varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемый в некоторой

[1] Логинов Борис Владимирович, кафедра высшей математики Ульяновского технического университета

[2] Макаров Михаил Юрьевич, кафедра прикладной математики Ульяновского государственного университета

окрестности $(0,0) \in E_1 \dot{+} R^1$ нелинейный оператор, $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$. Ставится задача определения периодических решений уравнения (1), обладающих симметрией плоских и пространственных кристаллографических групп (задача о нарушении симметрии), и построения их асимптотики по малому параметру ε. В окрестностях критических точек рождаются периодические решения (1) с симметрией подгрупп группы движений евклидова пространства по пространственным переменным. Рассматривается общий случай [10,12-14,16], когда A-спектр $\sigma_A(B)$ оператора B (обобщенной задачи на собственные значения $(B - A(\lambda))\varphi = 0$) пересекает мнимую ось в конечном числе конечнозначных собственных значений, изолированных от остальных частей $\sigma_A(B)$, лежащих в правой и левой полуплоскостях. Множество чисто мнимых собственных значений разлагается на непересекающиеся подклассы. Каждому подклассу принадлежат все собственные значения $\lambda = \pm i\alpha_r, r = 1, ..., m$, кратности n_r такие, что $\alpha_r = k_r\alpha$, где k_r–натуральные числа, не имеющие нетривиальных общих делителей. Количество подклассов совпадает с количеством различных α. Для каждого α строится своё уравнение разветвления $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$-периодических решений [16], где $\mu = \mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Фредгольмов оператор B с подпространством нулей $N(B) = span\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ и подпространством дефектных функционалов $N^*(B) = span\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ порождает разложение банаховых пространств E_1,E_2 в прямые суммы:

$$E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}, \quad E_2 = E_{2,n} \dot{+} E_{2,\infty-n}, \quad E_1^n = N(B), \quad E_{2,\infty-n} = R(B),$$

$$E_1^n = PE_1, \quad E_{2,n} = QE_2,$$

где $P = \sum\limits_{k=1}^{n} < \cdot, \gamma_k > \varphi_k$, $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} < \cdot, \psi_k > z_k$ – проекционные операторы. Здесь $\{\gamma_j\}_1^n \in E_1^*$,$\{z_j\}_1^n \in E_2$ соответствующие биортогональные системы $< \varphi_i, \gamma_j >= \delta_{ij}$, $< z_j, \psi_k >= \delta_{jk}$.

Определение. *Элементы* $\varphi_k^{(s)}, s = 1, ..., p_k, k = 1, ..., n$ *образуют полный канонический обобщнный жорданов набор (А-жорданов набор* $\equiv$ *ОЖН) фредгольмова оператора* B *относительно оператор-функции* $B - A(\lambda)$*, если*

$$B\varphi_k^{(\sigma)} = \sum_{j=1}^{\sigma-1} A_j \varphi_k^{(\sigma-j)}, \quad < \varphi_k^{(\sigma)}, \gamma_l >= 0, \quad s = 2, ..., p_k,$$

$$D_p = det[< \sum_{j=1}^{p_k} A_j \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \psi_l >] \neq 0, \quad k, l = 1, ..., n.$$

ОЖН $\{\varphi_k^{(s)}\}$ *– биканонический, если ОЖН сопряжнной оператор-функции, отвечающий элементам* $\{\psi_l\}_1^n$*, также канонический, и триканонический, если, кроме того*

$$< \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad < z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\gamma_k^{(l)} = \sum_{\sigma=1}^{p_k+1-l} A_\sigma^* \varphi_k^{(p_k+2-l-\sigma)}, \quad z_k^{(j)} = \sum_{\sigma=1}^{p_k+1-j} A_\sigma \varphi_k^{(p_k+2-j-\sigma)}.$$

Согласно результатам [22,23], ОЖН линейной оператор-функции $B - \lambda A$ всегда может быть выбран триканоническим.

Следуя А.Пуанкаре [3,4], выполним замену переменных $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}$, $x(t) = y(\tau)$. Тогда задача о периодических решениях уравнения (1) сводится к определению 2π-периодических решений уравнения с двумя малыми параметрами μ и ε:

$$\mathcal{B}y = (\mathcal{B}y)(\tau) \equiv By - \sum_{k=1}^{s} \alpha^k A_k \frac{d^k y}{d\tau^k} = \sum_{l=1}^{s} \mu^l \sum_{j=0}^{s-l} C_{l+j}^l \alpha^j A_{l+j} \frac{d^{l+j} y}{d\tau^{l+j}} - \\ - R(y,\varepsilon) \equiv \mathcal{R}(y,\mu,\varepsilon) \equiv (C(\mu,\alpha)y)(\tau) - R(y,\varepsilon). \qquad (2)$$

Согласно предположению о спектре $\sigma_A(B)$ на мнимой оси:

$$N(B - A(i\alpha_r)) = span\{(\overset{r,j}{u}_{11} + i\overset{r,j}{u}_{21}), (\overset{r,j}{u}_{21} - i\overset{r,j}{u}_{11}), j = 1,..,n_r\},$$

$$N(B - A(-i\alpha_r)) = span\{(\overset{r,j}{u}_{11} - i\overset{r,j}{u}_{21}), (\overset{r,j}{u}_{21} + i\overset{r,j}{u}_{11}), j = 1,..,n_r\},$$

$$N^*(B - A(i\alpha_r)) = span\{(-\overset{r,j}{v}_{21} + i\overset{r,j}{v}_{11}), (\overset{r,j}{v}_{11} + i\overset{r,j}{v}_{21}), j = 1,..,n_r\},$$

$$N^*(B - A(-i\alpha_r)) = span\{(-\overset{r,j}{v}_{21} - i\overset{r,j}{v}_{11}), (\overset{r,j}{v}_{11} - i\overset{r,j}{v}_{21}), j = 1,..,n_r\}.$$

Операторы $(\mathcal{B}y)(\tau)$ и $(C(\mu,\alpha)y)(\tau)$ отображают пространство Y 2π-периодических s раз непрерывно дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dot{+} iE_1$ в пространство Z 2π-периодических непрерывных функций со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dot{+} iE_2$, и для $y \in Y, f \in Y^*$ (или $y \in Z, f \in Z^*$)

$$\ll y, f \gg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < y(\tau), f(\tau) > d\tau.$$

Подпространства $N(\mathcal{B})$ и $N^*(\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{B} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ имеют вид

$$N(\mathcal{B}) = span\{\overset{r,j}{\varphi} = \overset{r,j}{\varphi}{}^{(1)} = (\overset{r,j}{u}_{11} + i\overset{r,j}{u}_{21})e^{ik_r\tau}, \overline{\overset{r,j}{\varphi}{}^{(1)}} = (\overset{r,j}{u}_{11} - i\overset{r,j}{u}_{21})e^{-ik_r\tau}\}, \\ j = 1,..,n_r,\ r = 1,..,m, \qquad (3)$$

$$N^*(\mathcal{B}) = span\{\overset{r,j}{\psi} = \overset{r,j}{\psi}{}^{(1)} = (-\overset{r,j}{v}_{21} + i\overset{r,j}{v}_{11})e^{ik_r\tau}, \overline{\overset{r,j}{\psi}{}^{(1)}} = (-\overset{r,j}{v}_{21} - i\overset{r,j}{v}_{11})e^{-ik_r\tau}\}.$$

Проекционные операторы

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{n} [\ll \cdot, \gamma_k \gg \varphi_k + \ll \cdot, \overline{\gamma}_k \gg \overline{\varphi}_k] : Y \to N(\mathcal{B}) = Y^{2n},$$

$$\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^{n} [\ll \cdot, \psi_k \gg z_k + \ll \cdot, \overline{\psi}_k \gg \overline{z}_k] : \\ Z \to span\{z_1, \overline{z}_1, \cdots, z_n, \overline{z}_n\} = Z_{2n}$$

порождают разложения $Y = Y^{2n} \dot{+} Y^{\infty-2n}, Z = Z_{2n} \dot{+} Z_{\infty-2n}$.

Теорема 1[16].*Пусть оператор $\mathcal{B}$ фредгольмов. Тогда в условиях существования биканонического ОЖН УР бифуркации Андронова-Хопфа для уравнения (1) имеет вид*

$$f_{r,j}(\xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) \equiv (i\mu k_r)^{p_{r,j}} \xi_{r,j} + \mathbf{L}^{(r,j)}(\xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) = 0,$$

$$j=1,..,n_r, r=1,..,m, \tag{4}$$
$$\bar f_{r,j}(\xi,\bar\xi,\mu,\varepsilon)\equiv(-i\mu k_r)^{p_{r,j}}\bar\xi_{r,j}+\overline{\mathbf{L}^{(r,j)}(\xi,\bar\xi,\mu,\varepsilon)}=0,$$

где $\nabla_\xi\mathbf{L}^{(r,j)}(0)=0=\nabla_{\bar\xi}\mathbf{L}^{(r,j)}(0)$ *и* $p_{r,j}$ *– длины обобщенных жордановых цепочек элементов* $\overset{r,j}{\varphi}$.

Пусть уравнение (1) (операторы $A_k,k=1,\cdots,s$ B и R) допускает группу G (инвариантно относительно G), т.е. для некоторых ее представлений L_g в E_1 и K_g в E_2 выполнены равенства

$$A_kL_gx=K_gA_kx,\quad BL_gx=K_gBx,\quad R(L_gx,\varepsilon)=K_gR(x,\varepsilon).$$

Расширяя эти представления на пространства $\mathcal{E}_k$, получаем, что уравнение (2) допускает ту же симметрию. Подпространство нулей $N(\mathcal{B})$ и область значений $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ (следовательно, и $N^*(\mathcal{B})$) оператора $\mathcal{B}$ инвариантны относительно L_g и K_g (K_g^*) соответственно. В подпространствах $N(\mathcal{B})$ и $N^*(\mathcal{B})$ индуцируются матричные представления $\mathcal{A}_g$ и $\mathcal{B}_g$:

$$\tilde\xi=\mathcal{A}_g\xi,\quad L_g\varphi_\imath=\mathcal{A}'_g\varphi_\imath=\sum_{\jmath=1}^n\alpha_{\jmath\imath}(g)\varphi_\jmath,\quad K_g^*\psi_k=\mathcal{B}_g\psi_k=\sum_{\jmath=1}^n\beta_{k\jmath}(g)\psi_\jmath.$$

Условие I. *Подпространство* $Y^{\infty-2n}=\mathcal{R}(\mathcal{B})=(I-\mathcal{P})Y$ *инвариантно относительно операторов* L_g.

Условие I равносильно инвариантности подпространства $span\{\gamma_1,\overline{\gamma}_1,...,\gamma_n,\overline{\gamma}_n\}$ относительно операторов L_g^*.

Теорема 2 (о наследовании групповой симметрии). *Пусть фредгольмову оператору* $\mathcal{B}$ *отвечает биканонический ОЖН и выполнено условие I. Тогда УР (4) выведенное на основе сужения оператора* $\mathcal{B}$ *к инвариантному подпространству* $Y^{\infty-2n}$, *допускает группу* G

$$\tilde f(\xi,\overline\xi,\mu,\varepsilon)=\mathcal{B}_gf(\xi,\overline\xi,\mu,\varepsilon)=f(\mathcal{A}_g\xi,\overline{\mathcal{A}_g\xi},\mu,\varepsilon)=f(\tilde\xi,\overline{\tilde\xi},\mu,\varepsilon). \tag{5}$$

Если УР(4) получено на основе леммы Шмидта, и оператор Шмидта $\tilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}+K=\mathcal{B}+\sum_{j=1}^n[\ll\cdot,\gamma_k\gg z_k+\ll\cdot,\overline\gamma_k\gg\overline z_k]$ *допускает группу* G, *то*

$$\tilde f(\xi,\overline\xi,\mu,\varepsilon)=\mathcal{A}_gf(\xi,\overline\xi,\mu,\varepsilon)=f(\mathcal{A}_g\xi,\overline{\mathcal{A}_g\xi},\mu,\varepsilon)=f(\tilde\xi,\overline{\tilde\xi},\mu,\varepsilon). \tag{6}$$

Доказательства выполняются практически дословно с [10-14].

2. Построение общего вида УР по допускаемой группе симметрии

Пусть $0=f(\xi,\bar\xi,\mu,\varepsilon)=\{f_\jmath(\xi,\bar\xi,\mu,\varepsilon)\}_1^n:\Xi^n\to\Xi^n$ – УР бифуркации Андронова-Хопфа, где μ – малая добавка к частоте колебаний и ε – бифуркационный параметр. Далее не указывается зависимость f от малых параметров μ и ε, несущественная для группового анализа. Согласно теореме 2 о наследовании групповой симметрии (5),(6)

$$\mathcal{B}_gf(\xi)=f(\mathcal{A}_g\xi), \tag{7}$$

где $\mathcal{A}_g$ и $\mathcal{B}_g$ – конечномерные представления допускаемой группы в подпространстве нулей $N(\mathcal{B})$ и дефектном подпространстве $N^*(\mathcal{B})$. В силу автономности уравнения (1), т.е. его инвариантности относительно сдвигов по времени t, УР допускает также группу $SO(2) = \mathcal{A}_0(\alpha)$ в каждой паре переменных $\xi_k, \bar{\xi}_k; f_k, \bar{f}_k, k = 1, ..., n$

$$\mathcal{A}_0(\alpha) = \mathcal{B}_0(\alpha) = diag \begin{pmatrix} e^{\imath\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\imath\alpha} \end{pmatrix} \tag{8}$$

с инфинитезимальным оператором

$$X_0 = (\hat{X}_0(\xi), \hat{X}_0(f)), \quad \hat{X}_0(\xi) = \sum_{\jmath=1}^{n}(\xi_\jmath \frac{\partial}{\partial \xi_\jmath} - \bar{\xi}_\jmath \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_\jmath}).$$

Равенство (7) означает, что относительно допускаемой группы преобразований

$$\tilde{\xi} = \mathcal{A}_g \xi, \quad \tilde{f} = \mathcal{B}_g f \tag{9}$$

многообразие $\mathcal{F} : f - f(\xi, \bar{\xi}) = 0, \bar{f} - \bar{f}(\xi, \bar{\xi}) = 0$ в $4n$-мерном пространстве является инвариантным и, следовательно, для построения его общего вида по группе симметрий можно применить методы группового анализа [10-14,19].

Функция $F(\xi, \overline{\xi}, f, \overline{f})$ называется инвариантом $(l+1)$-параметрической группы (8),(9), если она постоянна на G-орбите $(\xi, \overline{\xi}, f, \overline{f})$. Критерием инварианта F являются условия

$$X_\nu F(\xi, \overline{\xi}, f, \overline{f}) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, l, \tag{10}$$

где $X_\nu, \nu = 1, \cdots, l$ – инфинитезимальные операторы группы преобразований (9) гомоморфной группе преобразований пространственных переменных. Число решений системы дифференциальных уравнений (10) определяется рангом $r\ \{(\hat{X}_\nu; \hat{F}_\nu)\} = r_*$ матрицы $M(\hat{X}; \hat{F})$ коэффициентов инфинитезимальных операторов: если $(\xi, \overline{\xi}, f, \overline{f})$-точка общего положения относительно действия группы ($r_* = const$ в некоторой её окрестности), то система (10) имеет $4n - r_*$ функционально независимых решений. Эти решения образуют базис инвариантов группы (8),(9) – полную систему функционально независимых инвариантов.

Пусть $(\hat{X}_\nu(\xi), \hat{X}_\nu(f))_1^l$ – базис алгебры Ли инфинитезимальных хоператоров $(l + 1)$-параметрической группы (8),(9). В предположении, что $\mathcal{F}$ неособое инвариантное многообразие, т.е. ранг $r\{(\hat{X}_\nu; \hat{F}_\nu)_{\nu=0}^l\}$ матрицы $M(\hat{X}; \hat{F})$ на многообразии $\mathcal{F}$ совпадает с её общим рангом $r_*(M)$, $\mathcal{F}$ может быть выражено: $\Phi_s(I_1, ..., I_{4n-r_*}) = 0,\ s = 1, ..., 2n$ через полную систему функционально независимых инвариантов [18,19]

$$I_1(\xi, \bar{\xi}; f, \bar{f}), ..., I_{4n-r_*}(\xi, \bar{\xi}; f, \bar{f}). \tag{11}$$

$\mathcal{F}$ должно быть представлено в виде, разрешенном относительно переменных $f, \bar{f}$, т.е. подлежат определению функции $f_k(\xi, \bar{\xi}), k = 1, ..., n$. Для возможности определения их общего вида должно быть выполнено условие $rank[\frac{D(I)}{D(f, \bar{f})}] = 2n$ независимости системы инвариантов (11) по переменным $f_k, \bar{f}_k$. Достаточным условием этого является равенство $r_*(M(\hat{X}; \hat{F})) = r_*(M(\hat{X}))$ [19, с.250].

В практическом применении изложенной схемы при характерных для бифуркации Андронова-Хопфа высоких размерностях $n = dim N(\mathcal{B})$ аналитического УР возникают технические трудности, связанные с невозможностью деления на некоторые инварианты, зависящие только от ξ. Необходимо привлечение дополнительных мономиальных инвариантов наименьших возможных степеней с последующей факторизацией по связям между инвариантами разложения $f(\xi, \mu, \varepsilon)$ в степенные ряды, позволяющей избежать повторения членов с одинаковыми степенями ξ [15]. Эта факторизация по отношению к выражению внутри скобок далее обозначается символом $[\cdots]^{out}$.

Уравнения системы разветвления выражаются затем через некоторую их часть действием дискретной группы симметрии. Если при действии некоторого её элемента сохраняется номер уравнения, то это приводит к равенству некоторых коэффициентов при одинаковом порядке мономиальных слагаемых в уравнении.

Далее изложенная схема применяется для построения и исследования УР допускающих симметрию кристаллографических групп.

3. УР с симметрией плоских кристаллографических групп

Ограничимся здесь, в основном, случаем $m = 1$.

3.1. Прямоугольная решётка

1^0. Рассматривается построение УР $f(\xi, \bar{\xi}; \mu, \varepsilon) = 0$ при $n_1 = n = 4$ $(m = 1)$ определения периодических по двум пространственным переменным решений нелинейного уравнения с симметрией прямоугольной решётки.

Пусть

$$N(\mathcal{B}) = span\{\varphi_j = v\ \exp(i[< \bar{l}_j, q > +t]), \bar{\varphi}_j, j = \overline{1,4}\},$$

$$N(\mathcal{B}) \ni \varphi = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j \varphi_j + \bar{\xi}_j \bar{\varphi}_j), \quad \bar{l}_1 = m_1 a \bar{e}_1 + m_2 b \bar{e}_2,$$

$$\bar{l}_3 = m_1 a \bar{e}_1 - m_2 b \bar{e}_2, \quad \bar{l}_{2k} = -\bar{l}_{2k-1}, \quad k = 1, 2;\ q = (x, y).$$

Группа симметрии прямоугольника выражается подстановками $p_1 = (12)(34)$, $p_2 = (13)(24)$, $p_3 = (14)(23)$. Общий ранг r_* матрицы инфинитезимальных операторов

$$\begin{pmatrix} -\xi_1, & \bar{\xi}_1, & -\xi_2, & \bar{\xi}_2, & -\xi_3, & \bar{\xi}_3, & -\xi_4, & \bar{\xi}_4 \\ -\xi_1, & \bar{\xi}_1, & \xi_2, & -\bar{\xi}_2, & -\xi_3, & \bar{\xi}_3, & \xi_4, & -\bar{\xi}_4 \\ -\xi_1, & \bar{\xi}_1, & \xi_2, & -\bar{\xi}_2, & \xi_3, & -\bar{\xi}_3, & -\xi_4, & \bar{\xi}_4 \end{pmatrix}$$

равен 3. 13=4n-r_* функционально независимых инвариантов определяются из системы дифференциальных уравнений

$$[\hat{X}_\nu(\xi) + \hat{X}_\nu(f)] I(\xi, f) = 0, \quad \nu = \overline{0,3},$$

где

$$I_k(\xi) = \xi_k \bar{\xi}_k,\ k = \overline{1,4}, \quad I_{j+4} = \frac{f_j}{\xi_j},\ \bar{I}_{j+4} = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\xi}_j},\ j = \overline{1,4}$$

и $I_{13}(\xi) = \xi_1 \xi_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4$. При использовании дополнительного инварианта $I_{14}(\xi) = \overline{I_{13}(\xi)}$ первое уравнение системы разветвления запишется в виде

$$f_1(\xi; \mu, \varepsilon) \equiv \sum_{p,q} a_{pq}(\mu, \varepsilon)(\xi_1 \bar{\xi}_1)^{p_1} ... (\xi_4 \bar{\xi}_4)^{p_4} [\xi_1 (\xi_1 \xi_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4)^{q_1} (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \xi_3 \xi_4)^{q_2}]^{out} =$$

$$= \xi_1 \sum_{p} a_{p0} (\xi_1 \bar{\xi}_1)^{p_1} ... (\xi_4 \bar{\xi}_4)^{p_4} + \sum_{p;k} (\xi_1 \bar{\xi}_1)^{p_1} ... (\xi_4 \bar{\xi}_4)^{p_4} [a_{pk} \xi_1^{k+1} (\xi_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4)^k +$$

$$+b_{pk}\bar{\xi}_1^{k-1}(\bar{\xi}_2\xi_3\xi_4)^k] = 0, \qquad (12)$$

где символом $[...]^{out}$ обозначена факторизация выражения внутри скобки по связи $I_{13}I_{14} = I_9I_{10}I_{11}I_{12}$, осуществляемая отбрасыванием сомножителей I_k, $k = \overline{1,4}$ уже учтенных степенями p. Остальные уравнения системы разветвления определяются из условия симметрии УР относительно группы прямоугольника $f_k(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv p_{k-1}f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0$, $k = 2,3,4$.

2^0. Размерность УР с симметрией группы прямоугольника определяется числом представлений $s_m^2 = |\bar{l}|^2 = m_1^2a^2 + m_2^2b^2$, где $\bar{l}$ – произвольный вектор обратной решётки $\bar{l} = m_1\bar{l}^{(1)} + m_2\bar{l}^{(2)}$, $\bar{l}^{(1)} = a\bar{e}_1$, $\bar{l}^{(2)} = b\bar{e}_2$. Поэтому возможны случаи более высоких вырождений $n > 4$ оператора $\mathcal{B}$. Например, при $a = 1$, $b = 2$ и $s_m = 5$ можно взять два основных значения пары $(m_1, m_2) = (3,2)$ и $(5,0)$, т.е. $N(\mathcal{B}) = 6$. Здесь $N(\mathcal{B}) = span\{\varphi_j = v\,exp(i[<\bar{l}_j, q> + t]), \bar{\varphi}_j, j = \overline{1,6}\}$, $\bar{l}_1 = m_1\bar{e}_1 + 2m_2\bar{e}_2$, $\bar{l}_3 = m_1^{(1)}\bar{e}_1 - 2m_2^{(1)}\bar{e}_2$, $\bar{l}_5 = m_1^{(2)}\bar{e}_1$. Матрица коэффициентов инфинитезимальных операторов в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & \xi_2 & -\bar{\xi}_2 & \xi_3 & -\bar{\xi}_3 & \xi_4 & -\bar{\xi}_4 & \xi_5 & -\bar{\xi}_5 & \xi_6 & -\bar{\xi}_6 \\ 3\xi_1 & -3\bar{\xi}_1 & -3\xi_2 & 3\bar{\xi}_2 & 3\xi_3 & -3\bar{\xi}_3 & -3\xi_4 & 3\bar{\xi}_4 & 5\xi_5 & -5\bar{\xi}_5 & -5\xi_6 & 5\bar{\xi}_6 \\ \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & -\xi_2 & \bar{\xi}_2 & -\xi_3 & \bar{\xi}_3 & \xi_4 & -\bar{\xi}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система базисных инвариантов состоит из 21 инварианта:

$$I_k(\xi) = \xi_k\bar{\xi}_k, \quad k = \overline{1,6}; \quad I_{j+6} = \frac{f_j}{\xi_j},\ \bar{I}_{j+6} = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\xi}_j},\ j = \overline{1,6};$$

$$I_{19}(\xi) = \xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4, \quad I_{21}(\xi) = \xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6, \quad I_{20}(\xi) = \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6.$$

Дополнительные инварианты

$$I_{22}(\xi) = \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_3\xi_4, \quad I_{23}(\xi) = \xi_1\xi_2\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6, \quad I_{24}(\xi) = \bar{\xi}_3\bar{\xi}_4\xi_5\xi_6.$$

Связи между инвариантами:

$$I_{19}I_{22} = I_1I_2I_3I_4, \quad I_{20}I_{23} = I_1I_2I_5I_6, \quad I_{21}I_{24} = I_3I_4I_5I_6$$

(стандартные) и

$$I_{19}I_{20} = I_{24}I_1I_2, \quad I_{19}I_{21} = I_{23}I_3I_4, \quad I_{20}I_{21} = I_{22}I_5I_6,$$

$$I_{22}I_{23} = I_{21}I_1I_2, \quad I_{22}I_{24} = I_{20}I_3I_4, \quad I_{23}I_{24} = I_{19}I_5I_6$$

(нестандартные). Выпишем первое и пятое уравнения системы разветвления

$$f_1(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p,q} a_{pq}^{(1)}(\mu,\varepsilon)(\xi_1\bar{\xi}_1)^{p_1}...(\xi_6\bar{\xi}_6)^{p_6}[\xi_1(\xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4)^{q_1}(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6)^{q_2}\times$$

$$\times(\xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6)^{q_3}]^{out} = 0,$$

$$f_5(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p,q} a_{pq}^{(5)}(\mu,\varepsilon)(\xi_1\bar{\xi}_1)^{p_1}...(\xi_6\bar{\xi}_6)^{p_6}[\xi_5(\xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4)^{q_1}(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_1\xi_5\xi_6)^{q_2}\times$$

$$\times(\xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6)^{q_3}]^{out} = 0,$$

где символ $[...]^{out}$ означает факторизацию по связям между использованными инвариантами. Рассматривая последовательно возможности, имеем следующее:

а) два из q_j равны:
$q_1 = q_2 < q_3$, $q_1 = q_2 > q_3$; $q_1 = q_3 > q_2$, $q_1 = q_3 < q_2$; $q_2 = q_3 < q_1$, $q_2 = q_3 > q_1$;
б) все q_j различны, получаем раскрытие символа $[\ldots]^{out}$, отбрасывая в выражении внутри скобки сомножители вида $\xi_k\bar{\xi}_k$.
Мы не приводим вида возникающего УР ввиду простоты процесса и громоздкости получающегося выражения.

3.2. Треугольная решётка

Базис $N(\mathcal{B})$ выберем в виде

$$\varphi_j = v\ \exp(i[a < \bar{l}_i, q > +t]), \quad \bar{\varphi}_j = \bar{v}\ \exp(-i[a < \bar{l}_i, q > +t]),$$

$$\bar{l}_1 = (1+3k)\bar{e}_1 + \sqrt{3}p\bar{e}_2, \quad \bar{l}_2 = \frac{1}{2}[(3p-3k-1)\bar{e}_1 - \sqrt{3}(3k+p+1)\bar{e}_2],$$

$$\bar{l}_3 = \frac{1}{2}[-(3p+3k+1)\bar{e}_1 + \sqrt{3}(3k-p+1)\bar{e}_2],$$

где целые числа $(1+3k)$ и p имеют одинаковую чётность [6-8]. В частности, при $k = 0$, $p = 1$ (определение нумерации вершин треугольника в обратной решётке) имеет место шестикратное вырождение ($n = 3$) оператора $\mathcal{B}$. Инвариантность нелинейного уравнения относительно группы сдвигов индуцирует матричное представление

$$\mathcal{A}_g\xi = \xi_1 \exp\ i[a(a_1 + \sqrt{3}a_2) + a_0] + \bar{\xi}_1\ \exp\{-i[a(a_1 + \sqrt{3}a_2) + a_0]\} +$$

$$+\xi_2\ \exp\ i[a(a_1 - \sqrt{3}a_2) + a_0] + \bar{\xi}_2\ \exp\{-i[a(a_1 - \sqrt{3}a_2) + a_0]\} +$$

$$+\xi_3\ \exp\ i[a(-a_1) + a_0] + \bar{\xi}_3\ \exp\{-i[a(-a_1) + a_0]\}$$

с матрицей кооэффициентов инфинитезимальных операторов

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & \xi_2 & -\bar{\xi}_2 & \xi_3 & -\bar{\xi}_3 \\ \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & \xi_2 & -\bar{\xi}_2 & -\xi_3 & \bar{\xi}_3 \\ \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & -\xi_2 & \bar{\xi}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дискретная симметрия выражается подстановками группы треугольника

$$p_1 = (123),\ p_2 = (132),\ p_3 = (1)(23),\ p_4 = (13)(2),\ p_5 = (12)(3). \qquad (13)$$

Выпишем систему функционально независимых инвариантов
$I_k(\xi) = \xi_k\bar{\xi}_k$, $k = \overline{1,3}$; $I_{j+3} = \frac{f_j}{\xi_j}$, $\bar{I}_{j+3} = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\xi}_j}$, $j = \overline{1,3}$ и систему разветвления $f_j(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \xi_j u_j(\xi_1\bar{\xi}_1, \xi_2\bar{\xi}_2, \xi_3\bar{\xi}_3; \mu, \varepsilon) = 0$, $j = \overline{1,3}$. Инвариантность её относительно подстановок (13) даёт $u_j \equiv u(\xi;\mu,\varepsilon)$, т.е.

$$f_j(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \xi_j u(\xi_1\bar{\xi}_1, \quad \xi_2\bar{\xi}_2, \xi_3\bar{\xi}_3; \mu, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1,3},$$

где функция $u(\alpha,\beta,\gamma;\mu,\varepsilon)$ инвариантна относительно любых перестановок аргументов α,β,γ.

Из определяющего бифуркацию дисперсионного соотношения

$$N = (1+3k)^2 + 3p^2,$$

где числа $(1+3k)$ и p имеют одинаковую четность, следует возможность более высоких вырождений оператора $\mathcal{B}$; например $n = 6$ при $N = 28$.

3.3. Квадратная решётка

Подпространство $N(\mathcal{B})$ имеет базис вида $\varphi_n = exp\, i[< n, q > +t]$, $\bar{\varphi}_n$, его размерность определяется дисперсионным соотношением $|n|^2 = s^2 = n_1^2 + n_2^2$, т.е.числом представлений целого s^2 в виде суммы двух квадратов. При $n_1 = n_2$ число $r(s^2)$ таких представлений не менее четырёх, если же $n_1 \neq n_2$, то $r(s^2) \geq 8$. Общая формула для $r(s)$ имеется в [24].

$$1^0. \quad \dim N(\mathcal{B}_s) = 4; \quad n_1 = n_2 = n_0, \quad \varphi_1 = \exp i(n_0(x+y)+t),$$

$$\varphi_3 = \exp i(n_0(-x-y)+t), \quad \varphi_5 = \exp i(n_0(-x+y)+t),$$

$$\varphi_7 = \exp i(n_0(x-y)+t).$$

Дискретная группа вращений-отражений квадрата порождается подстановками: $p_1 = (1324)$, $p_2 = (12)(3)(4)$.

Первое уравнение системы разветвления имеет вид (12) с симметриями коэффициентов, определяемыми его инвариантностью относительно подстановки $p_1^2 p_2 = (1)(2)(34)$. Остальные уравнения выписываются на основе действия дискретной группы симметрии

$$f_2(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv p_2 f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0, \quad f_3(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv p_1 f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0,$$

$$f_4(\xi;\mu,\varepsilon) = p_1^3 f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0.$$

Замечание 1.1^0. *Нами рассмотрены в виде иллюстрации общего случая [14] два примера построения УР:* 1^0. $\dim N(\mathcal{B}) = 8, m = 1$, $(n_1, n_2) = 1$, $n_1 \neq n_2$ *и*
2^0. $\dim N(\mathcal{B}) = 16, m = 2$, $(n_{i1}, n_{i2}) = (\pm p, 0), (0, \pm p), i = 1, 2$.

2^0. *Получен общий вид УР с группой симметрии ромбической решетки, соответствующие гидродинамические приложения можно найти в [8].*

3.4. Гексагональная решётка

Пусть базис $N(\mathcal{B})$ состоит из элементов $\varphi_j = v \exp\; i(a < \bar{l}_j, q > +t])$, где

$$\bar{l}_1 = p\bar{e}_1 + \sqrt{3}q\bar{e}_2, \quad \bar{l}_3 = \frac{1}{2}[(p+3q)\bar{e}_1 + \sqrt{3}(-p+q)\bar{e}_2],$$

$$\bar{l}_5 = \frac{1}{2}[(-p+3q)\bar{e}_1 - \sqrt{3}(p+q)\bar{e}_2], \quad \bar{l}_{2k} = -\bar{l}_{2k-1},\ k = \overline{1,3},$$

причём целые числа имеют одинаковую чётность [6-8].

Рассматривается случай шестимерного вырождения оператора $\mathcal{B}$, например при $l = m = 1$ (определение нумерации вершин шестиугольника в обратной решётке). Симметрия решётки влечёт инвариантность УР относительно группы вращений-отражений шестиугольника

$$p_1 = (12)(34)(56),\ p_2 = (12)(35)(46),\ p_3 = (13)(24)(56),\ p_4 = (16)(25)(34),$$

$$p_5 = (145)(236), \quad p_6 = (154)(263), \quad p_7 = (14)(23)(5)(6), \tag{14}$$

$$p_8 = (135246),\ p_9 = (15)(26)(3)(4),\ p_{10} = (164253),\ p_{11} = (1)(2)(36)(45).$$

Выпишем базисные векторные поля соответствующей алгебры Ли в виде матрицы компонент

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & \xi_2 & -\bar{\xi}_2 & \xi_3 & -\bar{\xi}_3 & \xi_4 & -\bar{\xi}_4 & \xi_5 & -\bar{\xi}_5 & \xi_6 & -\bar{\xi}_6 \\ \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & -\xi_2 & \bar{\xi}_2 & 2\xi_3 & -2\bar{\xi}_3 & -2\xi_4 & 2\bar{\xi}_4 & \xi_5 & -\bar{\xi}_5 & -\xi_6 & \bar{\xi}_6 \\ \xi_1 & -\bar{\xi}_1 & -\xi_2 & \bar{\xi}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_5 & \bar{\xi}_5 & \xi_6 & -\bar{\xi}_6 \end{pmatrix}.$$

Базисная система содержит инварианты:

$$I_k(\xi) = \xi_k\bar{\xi}_k, \quad k = \overline{1,6}; \quad I_{j+6} = \frac{f_j}{\xi_j}, \quad \bar{I}_{j+6} = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\xi}_j}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Оставшиеся $2n - r_* - 18 = 21 - 18 = 3$ инварианта следует выбрать в виде мономов наименьшей возможной степени по ξ

$$I_{19} = \xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4, \quad I_{21} = \xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6, \quad I_{23} = \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6, \quad I_{25} = \xi_1\bar{\xi}_2\bar{\xi}_3\xi_4\xi_5\bar{\xi}_6,$$

$$I_{27} = \xi_1\bar{\xi}_2\bar{\xi}_3^2\xi_5^2, \quad I_{29} = \xi_1\bar{\xi}_2\xi_4^2\bar{\xi}_6^2, \quad I_{31} = \xi_1^2\bar{\xi}_3\xi_4\bar{\xi}_6^2, \quad I_{33} = \xi_1^2\xi_3^2\xi_5\bar{\xi}_6,$$

$$I_{35} = \xi_2^2\xi_3\bar{\xi}_4\bar{\xi}_5^2, \quad I_{2k} = \bar{I}_{2k-1}, \quad k = \overline{10,18}.$$

Из соотношений: $I_{20}I_5I_6 = I_{21}I_{23},\ I_{22}I_1I_2 = I_{19}I_{23},\ I_{24}I_3I_4 = I_{19}I_{21},$

$$I_{25}I_1I_6 = I_{23}I_{31},\ I_{26}I_2I_5 = I_{23}I_{35},\ I_{27}I_2I_3I_4 = I_{19}I_{36},\ I_{28}I_2I_4 = I_{20}I_{35}, \tag{15}$$

$$I_{29}I_1I_3 = I_{20}I_{31},\ I_{30}I_1I_3 = I_{19}I_{32},\ I_{33}I_4I_6 = I_{22}I_{31},\ I_{34}I_4I_6 = I_{21}I_{32}$$

выделяют 7 инвариантных мономов

$$I_{19}(\xi),\ I_{21}(\xi),\ I_{23}(\xi),\ I_{31}(\xi),\ I_{32}(\xi),\ I_{35}(\xi),\ I_{36}(\xi), \tag{16}$$

связанных стандартными связями

$$I_{19}I_{21}I_{23} = I_1\ldots I_6,\ I_{31}I_{32} = I_1^2I_3I_4I_6^2,\ I_{35}I_{36} = I_2^2I_3I_4I_5^2 \tag{17}$$

и двумя нестандартными

$$I_{24}I_{32}I_{36} = I_{23}^2I_{24}I_3I_4 = I_{23}I_1\ldots I_6 \Rightarrow I_{19}I_{21}I_{32}I_{36} = I_{23}I_1I_2I_3^2I_4^2I_5I_6, \tag{18}$$

т.к. двойственное соотношение $I_{20}I_{22}I_{31}I_{35} = I_{24}I_1I_2I_3^2I_4^2I_5I_6$ в силу связей (15) даёт $I_{23}^2I_{31}I_{35} = I_1^2I_2^2I_3I_4I_5^2I_6^2$, откуда следует

$$I_{31}I_{35}I_3I_4 = I_{19}^2I_{21}^2. \tag{19}$$

Таким образом, 7 инвариантных мономов (16) связаны тремя стандартными (17) и двумя нестандартными связями (18)(19), которые следует учитывать при раскрытии символа $[\ldots]^{out}$. Поэтому УР запишется в виде

$$f_1(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p,q} a_{pq}^{(1)}(\mu,\varepsilon)(\xi_1\bar{\xi}_1)^{p_1}...(\xi_6\bar{\xi}_6)^{p_6}[\xi_1(\xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4)^{q_1}(\xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6)^{q_2}\times$$

$$\times(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6)^{q_3}(\xi_1^2\bar{\xi}_3\xi_4\bar{\xi}_6^2)^{q_4}(\bar{\xi}_1^2\xi_3\bar{\xi}_4\xi_6^2)^{q_5}(\xi_2^2\xi_3\bar{\xi}_4\bar{\xi}_5^2)^{q_6}(\bar{\xi}_2^2\bar{\xi}_3\xi_4\xi_5^2)^{q_7}]^{out} = 0,$$

$$f_{k+1}(\xi;\mu,\varepsilon) = p_kf_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0,$$

где p_k – группа подстановок (14), приводящая также к соотношениям симметрии между коэффициентами УР.Раскрытие символа $[\ldots]^{out}$ производится последовательным рассмотрением случаев: а) все q_j равны; б) 6 из q_j равны, возможны 7 комбинаций, в каждой из которых 2 случая, когда неравный остальным показатель степени больше или меньше их, с учётом установленных связей (17) – (19) между инвариантами и т.д.

4. УР решений, инвариантных относительно нормальных делителей дискретной группы симметрии

Согласно [21,25], для построения общего вида таких УР следует перейти в подпространствах $N(\mathcal{B})$ к базису $\{e_j\}_1^n$ неприводимых инвариантных подпространств относительно соответствующей группы подстановок. Продемонстрируем общую схему на примере УР с симметрией квадратной решётки (используются методы теории характеров [26])

В принятой нумерации вершин квадрата в обратной решётке группа вращений-отражений квадрата T:

$$p_0 = e, \quad p_1 = (1324), \quad p_2 = (12)(34), \quad p_3 = (1423), \quad p_4 = (14)(23),$$

$$p_5 = (13)(24), \quad p_6 = (12)(3)(4), \quad p_7 = (1)(2)(34)$$

имеет следующие классы сопряжённых элементов:

$$M_1 = \{e\},\ M_2 = \{p_1, p_3\},\ M_3 = \{p_2\},\ M_4 = \{p_4, p_5\},\ M_5 = \{p_6, p_7\}.$$

Ее нормальные делители:

$$N_1 = M_1 + M_3, \quad N_2 = M_1 + M_3 + M_5,$$

$$N_3 = M_1 + M_2 + M_3, \quad N_4 = M_1 + M_3 + M_4.$$

В [27] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *$N(\mathcal{B})$ разлагается в прямую сумму двух одномерных и одного двумерного неприводимых инвариантных подпространств*

$$T = T_1 \dot{+} T_4 \dot{+} T_5, \quad N(\mathcal{B}) = N_1^{(1)} \dot{+} N_4^{(1)} \dot{+} N_5^{(2)}.$$

Базис в $N(\mathcal{B})$, преобразующийся по соответствующим неприводимым представлениям, имеет вид

$$N_1^{(1)}:\ e_1^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \quad N_4^{(1)}:\ e_4^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4,$$

$$N_5^{(2)}: \begin{cases} e_5^{(1)} = a\varphi_1 - a\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4, \\ e_5^{(2)} = b\varphi_1 - b\varphi_2 - c\varphi_3 + c\varphi_4, \end{cases}$$

где

$$a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Выписаны также проекторы $P(N_k) = \frac{1}{|N_k|} \sum\limits_{g \in N_k} \breve{P}_g$, где $\breve{P}_s = C_0^{-1} P_s C_0$, C_0 – матрица транспонированная к полученной в [27]. Эти проекторы определяют координатные гиперплоскости в переменных ζ, в которых ищутся решения, инвариантные относительно соответствующих нормальных делителей:
$P(N_1) = diag\{1, 1, 0, 0\}$, т.е. $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$,
$P(N_2) = diag\{1, 1, 0, 0\}$, т.е. $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$,

$P(N_3) = diag\{1,0,0,0\}$, т.е. $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$,
$P(N_4) = diag\{1,0,0,0\}$, т.е. $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$,

$$\xi = C_0\zeta, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & -a & -b \\ 1 & -1 & 1 & -c \\ 1 & -1 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

Тем самым доказано, что для разыскания N_1-инвариантных решений (инвариантных при отражении относительно центра квадрата) и N_2-инвариантных решений (при отражении относительно центра и диагоналей квадрата) следует принять $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_3 = \xi_4$. Аналогично при разыскании N_3-инвариантных решений (относительно группы вращений квадрата) и N_4-инвариантных решений (при отражении относительно центра квадрата и осей координат) нужно положить $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4$.

5. УР с симметрией простой кубической решетки

Случаи произвольной простой решётки, а также сложных решёток вызывают сложности технического характера. Поэтому здесь рассматривается наиболее простой случай построения 6-мерного УР с симметрией группы октаэдра. Описание действия группы куба при различных размерностях её представления в $N(\mathcal{B})$ (делители $|O_h| = 48$ и некоторые их суммы), таблицу умножения, разложение $N(\mathcal{B})$ на неприводимые инвариантные подпространства можно найти в [15,21,28], где соответствующая групповая симметрия применялась при исследовании задачи о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла.

Итак, $dim\, N(\mathcal{B}_s) = 12$, $\varphi_j = \exp\, i(< l_j, q > +t)$, $q = (x, y, z)$, $\bar{l}_j$ – вектор обратной решетки $l = \sum_{k=1}^{3} m_k l^{(k)}$, $< \bar{l}^{(k)}, a_j >= 2\pi\delta_{ij}$, и рассматривается задача построения общего вида вещественного УР

$$f(\xi; \mu, \varepsilon) = 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_6)$$

по группе

$$\mathcal{A}_g = diag\{\exp i(< \bar{l}_1, q > +t),\ \exp[-i(< \bar{l}_1, q > +t)], \dots$$
$$\dots, \exp i(< l_6, q > +t),\ \exp[-i(< l_6, q > +t)]\},$$

индуированной в $N(\mathcal{B})$ трёхмерными сдвигами $L_\beta u(x, y, z) = u(x + \beta_1, y + \beta_2, z + \beta_3)$, т.е. $\mathcal{A}_g$ представляются вращениями в плоскостях $(2k-1, 2k)$ и подстановками вершин октаэдра

$$C_4^{(1)} \cong (3,5,4,6),\ C_4^{(2)} \cong (1,6,2,5),\ C_4^{(3)} \cong (1,3,2,4), \quad J \cong (12)(34)(56),$$

... ...

Базис алгебры Ли, отвечающий указанным вращениям, имеет вид

$$\hat{X}_0 = (\xi_1, -\bar{\xi}_1, \xi_2, -\bar{\xi}_2, \xi_3, -\bar{\xi}_3, \xi_4, -\bar{\xi}_4, \xi_5, -\bar{\xi}_5, \xi_6, -\bar{\xi}_6),$$

$$\hat{X}_1 = (\xi_1, -\bar{\xi}_1, -\xi_2, \bar{\xi}_2,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ),$$

$$\hat{X}_2 = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ , \xi_3, -\bar{\xi}_3, -\xi_4, \bar{\xi}_4,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ),$$

$$\hat{X}_3 = (\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\xi_5, -\bar{\xi}_5, -\xi_6, \bar{\xi}_6).$$

Базисная система функционально независимых инвариантов выбирается содержащей инварианты:

$$I_k(\xi) = \xi_k\bar{\xi}_k, \quad k = \overline{1,6}; \quad I_{j+6} = \frac{f_j}{\xi_j}, \quad \bar{I}_{j+6} = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\xi}_j}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Оставшиеся $4n - r_* - 18 = 2$ инварианта подбираются в виде мономов наименьшей степени по ξ, в данном случае четвёртой. Такими решениями соответствующей системы дифференциальных уравнений являются $I_{19} = \xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4$, $I_{21} = \xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6$, $I_{23} = \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6$, $\quad I_{2k} = \bar{I}_{2k-1}$, $k = 10, 11, 12$. Соотношения связей

$$I_{19}I_{21} = I_{24}I_3I_4,\ I_{19}I_{23} = I_{22}I_1I_2, \tag{20}$$

$$I_{21}I_{23} = I_{20}I_5I_6,\ I_{19}I_{21}I_{23} = I_1I_2I_3I_4I_5I_6$$

показывают, что искомые два функционально независимых инварианта можно выбрать, например, $\xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4 = I_{19}$, $\ \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6 = I_{23}$. Однако в силу аналитичности УР при использовании только этих инвариантов в нём окажутся пропущенными некоторые мономиальные слагаемые. Если же взять степени всех инвариантов, то возникнут повторяющиеся слагаемые. Поэтому первое уравнение системы разветвления следует записать в виде (I_{20}, I_{22} и I_{24} выражаются через I_{19}, I_{21}, I_{23}): $\quad f_1(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv$

$$\equiv \sum_{p,q} c_{pq}(\mu,\varepsilon)(\xi_1\bar{\xi}_1)^{p_1}...(\xi_6\bar{\xi}_6)^{p_6}[\xi_1(\xi_1\xi_2\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4)^{q_1}(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\xi_5\xi_6)^{q_2}(\xi_3\xi_4\bar{\xi}_5\bar{\xi}_6)^{q_3}]^{out} = 0.$$

При раскрытии символа $[\ldots]^{out}$ возникают возможности: а) все q_j равны; б) два q_j равны, в каждой из трёх комбинаций два случая;
в) все q_j не равны, появится 6 комбинаций.
Отбрасывая в каждом из полученных 13 случаев сомножители вида $\xi_k\bar{\xi}_k$, получаем общий вид первого уравнения системы разветвления. Остальные уравнения получаются действием группы подстановок вершин октаэдра, действие которой дает также равенства между коэффициентами УР:

$$f_3(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv C_4^{(3)} f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0, f_5(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv C_4^{(2)^3} f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = 0,$$
$$f_{2k}(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv J f_{2k-1}(\xi;\mu,\varepsilon) = 0.$$

Замечание 2. 1^0. *Мы не приводим здесь полной расшифровки символа* $[\ldots]^{out}$ *ввиду громоздкости получающегося выражения.*

2^0. *Нами построен также общий вид 16-мерного УР при* $n_s = 8$ *с симметрией группы куба. Случай* $n_s = 12$ *с симметрией кубооктаэдра, а также более высокие вырождения приводят к значительным техническим трудностям.*

Исследования поддержаны программой "Университеты России. Фундаментальные направления" и частично грантовым центром НГУ (N23-98).

Литература

[1] Юдович В.И. Возникновение автоколебаний в жидкости// ПММ. 35(1971). 4. 638-655; J.Appl.Math.Mech. 35(1971).

[2] Юдович В.И. Исследование колебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима// ПММ. 36(1972). 3. 450-459; J. Appl. Math. Mech. 36(1972).

[3] Пуанкаре А. Избранные труды. Т.1. Новые методы небесной механики. М.: Изд-во АН СССР, 1971. 771с.

[4] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

[5] Треногин В.А. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, встречающиеся в синергетике // КДУ-III "Дифференциальные уравнения и их приложения". Руссе. Болгария. 1985. I. С. 421-428.

[6] Моршнева И.В., Юдович В.И. О возникновении циклов из положений равновесия систем с инверсионной и вращательной симметрией// СМЖ. 26(1985).1. С. 124-133.

[7] Треногин В.А. Периодические решения и решения типа перехода в абстрактных уравнениях реакции-диффузии// Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. С. 134-140.

[8] Моршнева И.В. Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и свободная конвекция в жидкости: дис. канд. физ.- мат. наук. Ростов-на-Дону, 1989. 130 с.

[9] Логинов Б.В. Общий подход к исследованию бифуркации рождения цикла в условиях групповой симметрии.// Известия АН УзССР, 1990. 6. С. 16-18.

[10] Loginov B.V. On the determination of branching equation in nonstationary branching by its group symmetry.// "Modern Group Analysis and Problems of Mathematical Modelling". Proc. XI Russian Colloq. Samara University. 7-11 June 1993. P. 112-114.

[11] Логинов Б.В. Об определении уравнения разветвления его группой симметрии.// Доклады РАН. 331(1993). 6. С. 677-680; Russ.Acad.Sci.Dokl.Math. 48 (1994). 1. P 203-205.

[12] Loginov B.V. Bifurcation equation of nonstationary branching with symmetry induced by spatial variables// Uzbek Math. J, 1995. 1. P. 58-67.

[13] Loginov B.V. Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation.// Nonlinear Analysis. TMA.28(1997).12.P.2033-2047.

[14] Loginov B.V.,Trenogin V.A. Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions.// CHAOS. Amer.Inst.Phys. 7(2)(1997). P. 229-238.

[15] Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия// Вестник СамГу, 1998. 2(8). С. 15-70.

[16] Логинов Б.В., Макаров М.Ю. О роли обобщённой жордановой структуры при построении и исследовании уравнения разветвления бифуркации Андронова-Хопфа// Вестник Самарской гос.эк. академии. 1999. 1. С.224-238.

[17] Логинов Б.В., Треногин В.А. Идеи групповой инвариантности в теории ветвления.// V Казахстанская межвузовская конференция по математике и механике. Ч.I. Математика. Алма-Ата, 1974. С. 206-208.

[18] Логинов Б.В.,Треногин В.А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления// ДУ. 11(1975).8. С. 1518-1521.

[19] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. Наука. 1978. 400 С.; Academic Press. NY. 1982.

[20] Вайнберг М.М.,Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М:. Наука, 1969. 524 с.; Noordorf Int. Publ. Leyden, 1974.

[21] Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985. 184 с.

[22] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления.// Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения. Ташкент: Фан, 1978. С. 113-148.

[23] Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней// Известия АН УзССР, 1978. 2. 15-19.

[24] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. 176 с.

[25] Владимиров С.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии// ДУ. 12(1975). 7. С. 1180-1189.

[26] Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: ГИТТЛ, 1958. 356 с.

[27] Логинов Б.В., Гришина С.А. Асимптотика разветвляющихся решений инвариантных отноительно нормальных делителей группы прямоугольника в задачах о поверхностных капиллярно-гравитационных волнах.// Механика и прикладная математика. Ульяновск: УлГТУ, 2000.

[28] Логинов Б.В., Рахматова Х.Р., Юлдашев Н.Н. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографические группы). Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент, 1987. С.183-195.

SYMMETRY BRAKING PROBLEMS AT ANDRONOV-HOPF BIFURCATION.I

B. Loginov[3], M. Makarov[4]

In development of the resultsb [10-14] on the base of group analysis methods it is considered the construction and investigation of Lyapounov-Schmidt branching equation (BEq) at Andronov-Hopf bifurcation with crystallographic groups symmetry. The aim of the first part of this work is the construction of the BEq general form on allowing group symmetry in symmetry braking problems,of the second one is bifurcation solutions asymptotics.

[3]Boris Loginov, dept. of math., Ulyanovsk technical university

[4]Mikhail Makarov, dept. of appl. math., Ulyanovsk state university