КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ η–ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Г.В. Воскресенская[1]

В статье изучается сопоставление элементов конечных групп с помощью некоторого представления параболических форм специального вида, являющихся произведениями эта-функций Дедекинда. Подробно изучается случай циклических групп и метациклических групп с циклическими нормальными делителями порядков 9 и 18.

Введение

Классическая эта-функция Дедекинда привлекает внимание многих современных исследователей и изучается с различных точек зрения во многих статьях последних лет.

Эта-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

Рассмотрим один специальный класс параболических форм.

В статье [1] доказано, что существует ровно 30 параболических форм вида $\prod_{k=1}^{s} \eta^{t_k}(a_k z)$, где $a_k, t_k \in \mathbf{N}$, собственных относительно всех операторов Гекке. Они характеризуются условиями:

$$\sum_{k=1}^{s} t_k a_k = 24, \quad 2|\sum_{k=1}^{s} t_k, \quad a_k|a_s, \quad a_k a_s / a_{s+1-k}, \quad \forall \;\; 1 \leq k \leq s.$$

Две из этих функций имеют полуцелый вес. Авторы называют эти 30 функций мультипликативными $\eta-$ произведениями (название объясняется мультипликативностью коэффициентов разложений в ряд Фурье по степеням q).

С другой стороны, автором настоящей статьи доказано [9], что эти 30 функций и только они являются параболическими формами, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющими нулей на верхней комплексной полуплоскости вне параболических вершин.

---

[1]Воскресенская Галина Валентиновна, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

С элементами конечных групп можно ассоциировать модулярные формы. Это сопоставление осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ - представление конечной группы G унимодулярными матрицами в пространстве V, размерность которого делится на 24. Тогда для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид:

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^{s}(x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in N, t_k \in Z.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^{s}\eta^{t_k}(a_k z).$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса

$$k(g) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} t_k$$

с характером, равным характеру квадратичного поля

$$Q\sqrt{\prod_{k=1}^{s}(ia_k)^{t_k}}.$$

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные $\eta-$ произведения. Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

Автором изучалась проблема нахождения конечных групп, с элементами которых с помощью некоторого представления можно ассоциировать мультипликативные $\eta-$произведения по указанному выше правилу. Рассматривались конечные подгруппы в $SL(5, \mathbf{C})$, группы порядка 24, метациклические группы с нормальными делителями порядков 3,4,5,7,11,22,23 . В настоящей статье эта работа продолжается: рассматриваются метациклические группы с нормальными делителями порядков 9 и 18. Интересной задачей является нахождение некоторой конечной группы или другой алгебраической структуры, с элементами которой по некоторому правилу были бы ассоциированы мультипликативные $\eta-$произведения и только они (идея рассматривать эти функции как единый объект). В настоящее время эта проблема остается нерешенной.

1. Мультипликативные $\eta-$произведения и циклические группы

Предложение 1. *Пусть $Z_n =< g >$ – такая циклическая группа, что функция $\eta_g(z)$, ассоциированная с элементом g с помощью некоторого представления, является мультипликативным $\eta-$ произведением. Тогда $\eta_h(z)$, где $h = g^k, \quad 1 \le k \le n$, также является мультипликативным $\eta-$ произведением.*

Доказательство.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

В табл. 1 приведены все возможности соответствия элементам циклических групп мультипликативных η-произведениий.

Таблица 1

Группа	Параболические формы
Z_{24}	$\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z),$ $\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{23}	$\eta(23z)\eta(z),\ \eta^{24}(z).$
Z_{22}	$\eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{21}	$\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(3z), \eta^{24}(z).$
Z_{20}	$\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z),$ $\eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{18}	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{16}	$\eta(16z)\eta(8z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z),$ $\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_{15}	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z).$
Z_{14}	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_{12}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),$ $\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z).$
Z_{12}	$\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{11}	$\eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_{10}	$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_9	$\eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z).$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),$ $\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_8	$\eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_7	$\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{24}(z).$
Z_6	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),$ $\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_6	$\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_6	$\eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_5	$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{24}(z).$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_4	$\eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$
Z_3	$\eta^8(3z), \eta^{24}(z).$
Z_3	$\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z).$
Z_2	$\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z).$
Z_2	$\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$

Предложение 2. *У любой циклической группы Z_n, $2 \le n \le 23$ существуют такие представления T_1, T_2, $dimT_1 = n_1$, $dimT_2 = n_2$, $n_1 \cdot n_2 = 24$, что параболические формы $\eta_g(z)$, ассоциированные со всеми элементами $g \in Z_n$ с помощью представлений n_2T_1, n_1T_2 и $T_1 \otimes T_2$, по указанному выше правилу являются мультипликативными $\eta-$произведениями.*

Доказательство.
В табл. 2 эти представления указаны явно.

Таблица 2

Параболи-ческая форма	T_1	T_2
23 1	1	$\zeta_{23},\ \zeta_{23}^2,\ \zeta_{23}^3,\ \zeta_{23}^4,\ \zeta_{23}^5,\ \zeta_{23}^6,\ \zeta_{23}^7,\ \zeta_{23}^8,\ \zeta_{23}^9,\ \zeta_{23}^{10},\ \zeta_{23}^{11},\ \zeta_{23}^{12},\ \zeta_{23}^{13},\ \zeta_{23}^{14},\ \zeta_{23}^{15},\ \zeta_{23}^{16},\ \zeta_{23}^{17},\ \zeta_{23}^{18},\ \zeta_{23}^{19},\ \zeta_{23}^{20},\ \zeta_{23}^{21},\ \zeta_{23}^{22}, 1, 1$
22 2	$1, -1$	$\zeta_{11},\ \zeta_{11}^2,\ \zeta_{11}^3,\ \zeta_{11}^4,\ \zeta_{11}^5,\ \zeta_{11}^6,\ \zeta_{11}^9,\ \zeta_{11}^7,\ \zeta_{11}^8,\ \zeta_{11}^9,\ \zeta_{11}^{10}, 1,\ 1$
21 3	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1$	$\zeta_7,\ \zeta_7^2,\ \zeta_7^3,\ \zeta_7^4,\ \zeta_7^5,\ \zeta_7^6,\ 1,\ 1$
20 4	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ 1,\ -1$	$\zeta_5,\ \zeta_5^2,\ \zeta_5^3,\ \zeta_5^4,\ 1,\ 1$
18 6	$1, -1$	$\zeta_9,\ \zeta_9^2,\ \zeta_9^4,\ \zeta_9^5,\ \zeta_9^7,\ \zeta_9^8,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ 1$
16 8	1	$\zeta_{16},\ \zeta_{16}^3,\ \zeta_{16}^5,\ \zeta_{16}^7,\ \zeta_{16}^9,\ \zeta_{16}^{11},\ \zeta_{16}^{13},\ \zeta_{16}^{15},\ \zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1,\ \zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1$
12^2	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ 1,\ -1$	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1$
15 5 3 1	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ 1$	$\zeta_5,\ \zeta_5^2,\ \zeta_5^3,\ \zeta_5^4,\ 1,\ 1$
14 7 2 1	$1, 1, -1$	$\zeta_7,\ \zeta_7^2,\ \zeta_7^3,\ \zeta_7^4,\ \zeta_7^5,\ \zeta_7^6,\ 1,\ 1$
12 6 4 2	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ 1$	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1$
$11^2 1^2$	$1, 1$	$\zeta_{11},\ \zeta_{11}^2,\ \zeta_{11}^3,\ \zeta_{11}^4,\ \zeta_{11}^5,\ \zeta_{11}^6,\ \zeta_{11}^7,\ \zeta_{11}^8,\ \zeta_{11}^9,\ \zeta_{11}^{10}, 1,\ 1$
$10^2 2^2$	$1, -1, 1, -1$	$\zeta_5,\ \zeta_5^2,\ \zeta_5^3,\ \zeta_5^4,\ 1,\ 1$
$9^2 3^2$	$1, 1$	$\zeta_9,\ \zeta_9^2,\ \zeta_9^4,\ \zeta_9^5,\ \zeta_9^7,\ \zeta_9^8,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ 1$
$8^2 4^2$	$1, -1$	$\zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1$
6^4	1,1,-1,-1	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2,\ 1$
$8^2 4 2 1^2$	1	$\zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$
$7^3 1^3$	1,1,1	$\zeta_7,\ \zeta_7^2,\ \zeta_7^3,\ \zeta_7^4,\ \zeta_7^5,\ \zeta_7^6,\ 1,\ 1$
$6^3 2^3$	1,1,-1	$\zeta_6,\ \zeta_6^5,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2, -1, -1, 1, 1$
4^6	1,1,1,-1,-1,-1	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1$
$5^4 1^4$	1,1,1,1	$\zeta_5,\ \zeta_5^2,\ \zeta_5^3,\ \zeta_5^4,\ 1,\ 1$
$4^4 2^4$	1,1,-1,-1	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1$
$6^2 3^2 2^2 1^2$	1,1	$\zeta_6,\ \zeta_6^5, \zeta_3,\ \zeta_3^2, -1, -1, 1, 1$
3^8	$\zeta_3,\ \zeta_3^2, 1$	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2, 1, 1, 1, 1$
$4^4 2^2 1^4$	1,1	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$
$3^6 1^6$	$\zeta_3,\ \zeta_3^2, 1$	$\zeta_3,\ \zeta_3^2,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2, 1, 1, 1, 1$
2^{12}	1,1,-1,-1	1,1,1,-1,-1,-1
$2^8 1^8$	1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1
1^{24}	1,1,1,1	1,1,1,1,1,1
8^3	1,1,-1	$\zeta_8,\ \zeta_8^3,\ \zeta_8^5,\ \zeta_8^7,\ \zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1$
24	$\zeta_4,\ \zeta_4^3,\ -1,\ 1$	$\zeta_6,\ \zeta_6^5,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2, -1, 1$

Параболическую форму $\prod_{k=1}^{s} \eta^{t_k}(a_k z)$ мы в этой таблице обозначим символом $\prod_{k=1}^{s} a_k^{t_k}$ (этот символ называется формой Фрейма - Frame-shape). При обозначении представлений в таблице вместо $diag(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ мы будем писать $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Первообразный корень степени n из 1 обозначается ζ_n. В первом столбце таблицы приводится параболическая форма, соответствующая представлению $T_1 \otimes T_2$. Везде, где это возможно, в качестве T_1 и T_2 указывались неединичные представления.

2. Мультипликативные $\eta-$произведения и метациклические группы

Метациклической группой называется конечная группа, имеющая циклический нормальный делитель, фактор-группа по которому также циклическая.

Генетический код метациклической группы :

$$< a, b : a^m = e, \quad b^s = e, b^{-1}ab = a^r > .$$

В силу предложения 1 при исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Искомые группы указываются с точностью до изоморфизма. Так как искомое представление является точным, то по виду параболической формы можно понять порядок соответствующего ей элемента группы. Поэтому мы будем приводить только списки параболических форм, указывая элементы только в том случае, когда элементам группы равных порядков соответствуют различные формы.

Если некоторая допустимая группа является подгруппой другой допустимой группы, то можно привести подробное рассмотрение только для большей группы.

Мы рассматриваем случаи, когда подгруппы $< a >$ и $< b >$ не имеют тривиального пересечения. Основной результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $G-$такая метациклическая группа с генетическим кодом:*

$$< a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r >, \quad m = 9, 18,$$

что с каждым элементом этой группы с помощью некоторого точного представления ассоциируется мультипликативное $\eta-$ произведение, то для s, r возможны (с точностью до изоморфизма) лишь указанные в таблице значения:

m	9	9	9	18
s	2	3	4	2
r	8	4	8	17

Доказательство.

Диэдральные группы D_9 и D_{18} подробно рассматривались автором в статье [8].

Рассмотрим метациклическую группу с генетическим кодом

$$< a, b : a^9 = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^4 > .$$

Это группа 27 порядка, у нее 11 классов сопряженных элементов.

Выпишем все ее неприводимые представления :

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = {\zeta_3}^k, \quad k = \overline{1,3},$$

$$T_k(a) = \zeta_3, \quad T_k(b) = {\zeta_3}^k, \quad k = \overline{4,6},$$

$$T_k(a)=\zeta_3{}^2,\quad T_k(b)=\zeta_3{}^k,\quad k=\overline{7,9},$$

$$T_{10}(a)=\begin{pmatrix}\zeta_9 & 0 & 0\\ 0 & \zeta_9{}^4 & 0\\ 0 & 0 & \zeta_9{}^7\end{pmatrix},\quad T_{10}(b)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$T_{11}(a)=\begin{pmatrix}\zeta_9{}^2 & 0 & 0\\ 0 & \zeta_9{}^8 & 0\\ 0 & 0 & \zeta_9{}^5\end{pmatrix},\quad T_{11}(b)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Искомым точным представлением является прямая сумма представлений, в которую представления $T_4,\ T_5,\ T_7,\ T_8,\ T_{10},\ T_{11}$ входят с кратностью 2, единичное представление входит с кратностью 4, а остальные неприводимые представления не входят .

Элементам группы порядка 9 соответствует модулярная форма $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$, элементам b и b^2 соответствует модулярная форма $\eta^8(3z)$, остальным элементам порядка 3 сответствует $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, единичному элементу группы соответствует $\eta^{24}(z)$.

Рассмотрим метациклическую группу с генетическим кодом

$$< a,b : a^9=e, b^4=e, b^{-1}ab=a^8 > .$$

Это группа 36 порядка, у нее 12 классов сопряженных элементов.

Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений этой группы, причем те двумерные представления, в которых b переходит в элемент третьего порядка, входят с кратностью 2, а остальные с кратностью 1.

Элементам группы порядка 18 соответствует модулярная форма $\eta(18z)\eta(6z)$, элементам порядка 9 соответствует модулярная форма $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$, элементам порядка 6 соответствует модулярная форма $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, элементам порядка 3 соответствует $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементам порядка 4 соответствует $\eta^6(4z)$, элементам порядка 2 соответствует $\eta^{12}(2z)$, единичному элементу группы соответствует $\eta^{24}(z)$.

Рассмотрим теперь оставшиеся значения для s и r при m=9 или m=18 такие, что элементы этих групп имеют допустимые порядки, но для самих групп не существует представлений искомого типа. Это значения:

m=9, r=4, s=9, 18;
m=9, r=8, s=6, 12, 18;
m=18, r=7, s=3, 6, 18;
m=18, r=17, s=4, 12, 18.

Мы указываем только неизоморфные группы.

Отсутствие искомого представления доказывается на основе анализа таблицы неприводимых представлений группы, причем не обязательно рассматривать представления для всех элементов группы.

Приведем доказательство для группы

$$< a,b : a^{18}=e, b^4=e, b^{-1}ab=a^{17} > .$$

Пусть $T-$искомое представление. Так как среди собственных значений оператора $T(a^2b^2)$ имеются первообразные корни степени 18 из 1, то в искомое представление прямым слагаемым обязательно входит представление, переводящее элемент a в элемент 18 порядка, а элемент b - в элемент 4 порядка. Без ограничения общности можно считать, что искомое представление содержит представление:

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{18} & 0 \\ 0 & \zeta_{18}^{-1} \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще два неприводимых представления этой группы:

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{18}^8 & 0 \\ 0 & \zeta_{18}^{-8} \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{18} & 0 \\ 0 & \zeta_{18}^{-1} \end{pmatrix}, \quad T_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$T_1(a^4b^2) = T_2(a^4b^2) = \begin{pmatrix} \zeta_{18}^{13} & 0 \\ 0 & \zeta_{18}^{5} \end{pmatrix},$$

то в искомое представление не входит T_2.

Так как $T_1(a) = T_3(a)$, то в искомое представление не входит T_3.

Так как собственные значения операторов $T_2(ab^2) = T_3(ab^2)$ равны $(\zeta_{18}, \zeta_{18}^{-1})$, то, исключив их, видим, что оператору $T(ab^2)$ не может соответствовать параболическая форма $\eta(18z)\eta(6z)$, следовательно, эта группа не имеет точного представления искомого типа.

Следовательно, группа $< a, b : a^{18} = e, b^{12} = e, b^{-1}ab = a^{17} >$ также не имеет искомого представления, так как рассмотренная группа в ней содержится.

Для других групп доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

Литература

[1] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of $\eta-$functions// Contemp.Math. 1985. V.45. P.89-98.

[2] Mason G. Finite groups and Hecke operators// Math.Ann. 1989. B.282. P.381-409.

[3] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms// Contemp.Math. 1985. V.45. P.223-244.

[4] Koike M. Mathieu group M_{24} and modular forms // Nagoya Math. J. 1985. V.99. P.147-157.

[5] Коксетер К.С.М.,Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука. 1980.

[6] Воскресенская Г.В. Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5, \mathbf{C})$// Функцион.анализ и его прил. 1995. Т.29(2). С.71-73.

[7] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24// Матем. заметки. 1996. Т.60(2). С.292-294.

[8] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и представления групп диэдра// Матем. заметки. 1998. Т.63(1). С.130 -133.

[9] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations// Journal de Theor. des Nombr. de Bordeaux. 1999. V.11. P.247-262.

[10] Воскресенская Г.В. Метациклические группы и модулярные формы// Матем. заметки. 2000. Т.67(2). С.163-173.

FINITE GROUPS AND MULTIPLICATIVE $\eta-$PRODUCTS

G. Voskresenskaya[2]

In this article the author studies the correspondence between elements of finite groups and the cusp forms from one special class which are the products of Dedekind $\jmath-$ functions. The case of cyclic groups and metacyclic groups with normal cyclic subgroups of order 9 and 18 are considered in details.

[2] Galina Voskresenskaya, dept. of algebra and geometry, Samara state university