РАЗЛОЖЕНИЯ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ МНОГОЗНАЧНЫХ МЕР

В.А. Алякин [1]

Получены разложения в смысле Лебега и Хьюитта-Иосиды для индуктивного предела направленности многозначных мер, значениями которых являются содержащие точку нуль компактные выпуклые множества отделимого метризуемого полного локально выпуклого пространства.

Пусть R_i, $i \in (I, \leq)$ – неубывающая направленность колец подмножеств множества T, $R := \cup R_i$. Топология G на кольце R называется *монотонной,* если относительно операции симметрической разности $\triangle$ $(R, \triangle, G)$ является топологической группой, и операция пересечения равномерно непрерывна.

Пусть Γ_i – монотонная топология на кольце R_i такая, что

$$\Gamma_k \cap R_i = \Gamma_i$$

для любого $k \geq i$. Через Γ обозначим *индуктивный предел* направленности (Γ_i) [1, 2], $\Gamma = lim\, ind \Gamma_i$, т.е. класс таких частей A кольца R, что

$$A \cap R_i \in \Gamma_i$$

для любого $i \in I$.

Нам потребуются следующие свойства топологии Γ :

1) Γ является сильнейшей топологией на R, для которой каждая операция вложения $e_i : R_i \longrightarrow R$ непрерывна;

2) отображение $f : R \longrightarrow H$ из (R, Γ) в произвольное топологическое пространство H непрерывно тогда и только тогда, когда каждая композиция $f \diamond e_i$ непрерывна;

3) для любого $i \in I$ выполняется включение

$$\Gamma \cap R_i \subset \Gamma_i.$$

Пусть X – отделимое локально выпуклое пространство с нулем 0, $U(0)$ – система окрестностей нуля, W – равномерность на $A(X)$, определяемая семействами

$$\{(A, B) \in A(X) \times A(X) : A \subset B + U, B \subset A + U\}, U \in U(0),$$

как базой окружений.

[1]Алякин Владимир Алексеевич, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

Пусть $C(X)$ – семейство всех компактных множеств из $A(X)$, $C_0(X)$ – семейство всех выпуклых множеств из $C(X)$, содержащих 0. Замыкание множества $A \subset X$ будем обозначать через $\overline{A}$ или clA.

Ясно, что операция сложения $+$ $(A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\})$ в $C(X)$ равномерно непрерывна, т.е. полугруппа $(C(X), +, W)$ является равномерной полугруппой. Кроме того, в подполугруппе $CV(X)$ полугруппы $C(X)$, состоящей из выпуклых компактных множеств, выполняется закон сокращения (см., например, [3]): если $A, B, C, D \in CV(X)$ и $A + B = C + D$, $A \subset C$, то

$$D \subset B.$$

Функция $M : R \longrightarrow C(X)$ называется *многозначной мерой,* если $M(\emptyset) = \{0\}$ и M аддитивно, т.е.

$$M(A \cup B) = M(A) + M(B)$$

для любых непересекающихся множеств $A, B \in R$.

Отметим, что если $0 \in M(A)$ для любого $A \in R$, то многозначная мера M обладает свойством монотонности:

$$M(A) \subset M(B)$$

для любых множеств $A, B \in R$ таких, что $A \subset B$.

Многозначная мера M называется *исчерпывающей,* если

$$M(E_n) \longrightarrow \{0\}$$

для любой дизъюнктной последовательности множеств $(E_n) \subset R$.

Пусть $F(X)$ $(\{0\} \in F(X))$ – полная подполугруппа полугруппы $(C_0(X), +, W)$ такая, что выполняются следующие свойства:

1) если $A_i \in F(X)$, $i \in I$ и $A_k \subset A_i$ для любого $k \geq i$, то $\cap_{i \in I} A_i \in F(X)$;

2) если $A, A_i \in F(X)$, $A_i \subset A$, $i \in I$ и $A_i \subset A_k$ для любого $k \geq i$, то $cl(\cup_{i \in I} A_i) \in F(X)$.

Заметим, что если пространство X полно и метризуемо, то эти свойства выполняются в самой полугруппе $C_0(X)$.

Пусть $M_i : R_i \longrightarrow F(X)$, $i \in I$ – исчерпывающая многозначная мера, причем

$$M_k|_{R_i} = M_i \tag{1}$$

для любого $k \geq i$. Следуя [2], меру $M : R \longrightarrow F(X)$, $M = \cup M_i$, будем называть *индуктивным пределом направленности мер* (M_i). По определению, если множество $E \in R$ и $E \in R_{i_0}$, то для всех $i \geq i_0$

$$M(E) = M_i(E).$$

Многозначная мера Φ называется *минорантой* многозначной меры M, если $\Phi(A) \subset M(A)$ для любого множества $A \in R$.

Известно [4, 5] (см. также [6, 7, 8]), что если G – монотонная топология на кольце R, то всякая исчерпывающая многозначная мера M, определенная на кольце R, единственным образом может быть представлена в виде суммы двух исчерпывающих мер

$$M = CM + SM,$$

где мера CM G-непрерывна, а мера SM не имеет ненулевых G-непрерывных аддитивных минорант.

Пусть $M_i = CM_i + SM_i$ – такое разложение каждой меры M_i, $i \in I$.

Основным результатом работы является следующая теорема, которая является обобщением на случай направленности многозначных мер теоремы о разложении индуктивного предела последовательности неотрицательных вещественных мер, установленной в работе [9].

ТЕОРЕМА 1. Индуктивный предел направленности многозначных мер $M_i : R_i \longrightarrow F(X)$ единственным образом может быть представлен в виде

$$M = CM + SM,$$

где мера $CM : R \longrightarrow F(X)$ Г-непрерывна, а мера $SM : R \longrightarrow F(X)$ не имеет ненулевых Г-непрерывных аддитивных минорант.

При этом для любого множества $E \in R$ значения $CM(E)$ и $SM(E)$ могут быть найдены по формулам:

$$CM(E) = \cap CM_i(E), \ \ SM(E) = \overline{\cup SM_i(E)}.$$

Доказательство. Так как $0 \in M_i(E)$ для любых $i \in I$ и $E \in R_i$, то $CM_i(E) \subset M_i(E)$ и $SM_i(E) \subset M_i(E)$. Далее в силу монотонности сужение $CM_k|_{R_i}$ каждой меры M_k на кольцо R_i непрерывно относительно топологии $\Gamma_k \cap R_i = \Gamma_i$ для любого $k \geq i$. Учитывая, что мера CM_i является наибольшей Γ_i-непрерывной частью меры M_i [4, 5], получаем, что $CM_k|_{R_i} \subset CM_i$. Значит, направленность $CM_i(E)$ является невозрастающей для любого $E \in R$. Положим

$$CM(E) = \cap\{CM_i(E) : i \in I\}, E \in R.$$

Тогда $CM(E) \subset M(E)$ и $CM : R \longrightarrow F(X)$. Пусть $A, B \in R$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда для любого $i \in I$ $M_i(A \cup B) = CM_i(A) + SM_i(B)$. Поскольку направленность $CM_i(E)$ невозрастающая, то в силу свойства 1) класса $F(X)$

$$\cap\{CM_i(A) + CM_i(B)\} = \cap CM_i(A) + CM_i(B),$$

следовательно,

$$CM(A \cup B) = CM(A) + CM(B).$$

Тем самым доказано, что CM – мера.

Определим меру SM. Докажем сначала, что направленность $SM_i(E)$ – неубывающая для любого множества $E \in R$.

Пусть $E \in R_i$ и $i, k \in I$, $\ k \geq i$. Рассмотрим два представления

$$M_i(E) = CM_i(E) + SM_i(E),$$

$$M_k(E) = CM_k(E) + SM_k(E).$$

Из второго равенства в силу (1) следует, что для любого множества $E \in R_i$

$$M_i(E) = CM_k|_{R_i}(E) + SM_k|R_i(E).$$

Так как $CM_k|_{R_i}(E) \subset CM_i(E)$, то

$$CM_i(E) + SM_i(E) \subset CM_k|_{R_i}(E) + SM_k|_{R_i}(E).$$

Тогда в силу закона сокращения

$$SM_i(E) \subset SM_k|_{R_i}(E),$$

что и требовалось. Положим

$$SM(E) = \overline{\cup\{SM_i(E) : i \in I\}}, E \in R.$$

Тогда $SM(E) \subset M(E)$ и $SM : R \longrightarrow F(X)$. Ввиду свойства 2) класса $F(X)$ SM – мера.

Докажем, что для любого множества $E \in R$ справедливо представление

$$M(E) = CM(E) + SM(E),$$

т.е.

$$M(E) = \cap CM_i(E) + \overline{\cup SM_i(E)}. \qquad (2)$$

Пусть $E \in R$. Тогда существует индекс $i_0 \in I$ такой, что $E \in R_i$ и $M(E) = M_i(E)$ при любых $i \geq i_0$. Пусть

$$x \in \cap CM_i(E) + \overline{\cup SM_i(E)}.$$

Для любой окрестности нуля тогда имеем

$$x \in \cap CM_i(E) + \cup SM_i(E) + U.$$

Так как направленность $SM_i(E)$ – неубывающая, найдется индекс $i_1 \in I$ такой, что для любых $i \geq i_1$

$$x \in CM_i(E) + SM_i(E) + U.$$

Тогда

$$x \in M_i(E) + U = M(E) + U$$

при $i \geq i_2$, где $i_2 \in I$ – такой индекс, что $i_2 \geq i_0$ и $i_2 \geq i_1$. Ввиду произвольности U тогда получаем $x \in M(E)$. Тем самым доказано включение $CM(E) + SM(E) \subset M(E)$.

Обратно, пусть $x \in M(E)$. Тогда существует индекс $i_0 \in I$ такой, что для любого $i \in I$

$$x \in M_i(E) = CM_i(E) + SM_i(E) \subset CM_i(E) + cl(\cup SM_i(E)).$$

Значит,

$$x \in \cap\{CM_i(E) + SM(E)\} = \cap CM_i(E) + SM(E) = CM(E) + SM(E)$$

и нужное представление доказано.

Г-непрерывность меры CM вытекает из представления $CM = \cup(CM|_{R_i})$ [2] и включений $CM|_{R_i} \subset CM_i$.

Наконец, пусть $N : R \longrightarrow C_0(X)$ – Г-непрерывная многозначная мера такая, что $N(E) \subset SM(E)$ для любого $E \in R$. Тогда

$$N(E) + CM(E) \subset CM(E) + SM(E) = M(E),$$

следовательно, для любого i

$$(N + CM)|_{R_i} \subset M|_{R_i} = M_i.$$

Поскольку мера $(N + CM)|_{R_i}$ Г-непрерывна и является минорантой меры M_i, то ввиду максимальности меры CM_i имеем

$$(N + CM)|_{R_i} \subset CM_i$$

для любого i. Значит, $N + CM \subset CM$, откуда ввиду закона сокращения получаем, что $N = \{0\}$.

Единственность разложения доказывается, следуя работе [7], по той же схеме, что и единственность разложения многозначной меры [5].

Теорема доказана.

Следствие. Пусть X – отделимое полное метризуемое локально выпуклое пространство. Индуктивный предел направленности исчерпывающих многозначных мер $M_i : R_i \longrightarrow C_0(X)$ единственным образом может быть представлен в виде

$$M = CM + SM,$$

где мера $CM : R \longrightarrow C_0(X)$ Г-непрерывна, а мера $SM : R \longrightarrow C_0(X)$ не имеет ненулевых Г-непрерывных аддитивных минорант.

Назовем меру M *частично счетно-аддитивной,* если каждое ее сужение $M|_{R_i}$ счетно аддитивно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – отделимое полное метризуемое локально выпуклое пространство, $M : R \longrightarrow C_0(X)$ – многозначная мера. Если для любого $i \in I$ сужение $M|_{R_i}$ исчерпываемо, то мера M единственным образом может быть представлена в виде

$$M = CM + SM,$$

где мера $CM : R \longrightarrow C_0(X)$ частично счетно-аддитивная, а мера $SM : R \longrightarrow C_0(X)$ не имеет ненулевых частично счетно-аддитивных минорант.

Доказательство. Эта теорема может быть доказана так же, как и теорема 1, если при каждом $i \in I$ рассмотреть разложение меры M_i в смысле Хьюитта-Иосиды [10, теорема III.7.8]:

$$M_i = CM_i + SM_i,$$

где мера CM_i счетно-аддитивна, а мера SM_i не имеет ненулевых счетно-аддитивных минорант [4, 5]. Эту теорему можно также вывести из следствия к теореме 1, рассмотрев на каждом кольце R_i сильнейшую монотонную топологию T_i такую, что каждая убывающая к $\emptyset$ последовательность множеств E_n из R_i сходится к $\emptyset$ в смысле топологии T_i, поскольку непрерывность относительно топологии T_i равносильна счетной аддитивности меры.

Литература

[1] Савельев Л.Я. Индуктивные пределы последовательностей непрерывных мер // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. N5. С. 1060-1063.

[2] Недогибченко Г.В., Савельев Л.Я. Индуктивные пределы направленностей непрерывных мер // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. Новосибирск. 1982. С. 168-179.

[3] Drewnowski L. Additive and countable additive correspondences // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1976. V.19. N1(Ser. 1). P. 25-54.

[4] Алякин В.А. О разложении многозначных функций множества // Функциональный анализ. Ульяновск. 1981. Вып. 17. С. 3-9.

[5] Алякин В.А. Некоторые вопросы теории многозначных и полугрупповых мер // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов. 1982. С.114.

[6] Drewnowski L. Decompositions of set functions // Stud. Math. (PRL). 1973. V. 48. N1. P. 23-48.

[7] Traynor T. The Lebesgue decomposition for group-valued functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 220. P. 307-319.

[8] Weber H. Topological Boolean rings. Decompositions of finitely additive set functions // Pacif. J. Math. 1984. V.110. N2. P. 471-495.

[9] Алякин В.А. Разложение в смысле Лебега меры, являющейся индуктивным пределом последовательности мер // Редакция Сибирского матем. ж. Новосибирск. 1983. N818-83 Деп.

[10] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // М: Иностр. лит. 1962. С. 896.

DECOMPOSITIONS OF INDUCTIVE LIMITS OF SET-VALUED MEASURES

V. Alyakin[2]

In this note the well-known Lebesgue and Hewitt-Iosida decompositions for inductive limits of set-valued measures are established, whose values are nonempty compact convex sets in a complete metrizable locally convex vector space.

[2]Vladimir Alyakin, dept. of mathematics Samara state university