КАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СВЯЗАННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Ю.Н. Радаев[1]

Рассматриваются трехмерные уравнения равновесия упругопластической среды с рассеянными повреждениями при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения. Напряженное состояние может соответствовать как грани, так и ребру поверхности текучести. Распределение повреждений в среде представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга, главные оси которого предполагаются коориентированными главным осям напряжений. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности. Выведены статические и кинематические соотношения связанной задачи вдоль траекторий главных напряжений, которые представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы. При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, найдены такие канонические криволинейные координаты, при преобразовании к которым уравнения равновесия, сформулированные для ребра поверхности текучести, приводятся к трем уравнениям, допускающим при некоторых ограничениях точные интегралы. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения при продвижении вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями. Выделены классы пространственных задач равновесия упругопластических тел, для которых поля напряжений являются расслоенными. Построены канонические координаты плоской задачи и найдены инвариантные отношения, устанавливающие баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений.

1. Основные уравнения модели упругопластического тела с условием пластичности Треска

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви [1]. Пространственная задача теории пластичности при условии текучести Мизеса статически неопределима, и кроме того, соответствующая краевая задача является эллиптической [2], что в принципе не позволяет обобщить методы интегрирования, развитые для плоской задачи [2 - 4]. Напомним, что уравнения плоской задачи принадлежат к гиперболическому типу, что позволяет ввести

[1]Радаев Юрий Николаевич, кафедра механики сплошных сред, Самарский государственный университет

представление о системе скольжения как механизме пластического течения, согласующееся с многочисленными экспериментальными данными по геометрии пластического течения металлов. Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими [13].

Исследованию уравнений осесимметричной и пространственной задачи теории пластичности посвящены работы [5 - 12].

Смысл гипотезы полной пластичности [6], как такого напряженного состояния пластической среды, при котором изображающая напряжения в пространстве главных напряжений точка располагается на ребре призмы Треска, был установлен в [7]. Осесимметричная жесткопластическая задача с использованием гипотезы полной пластичности исследовалась в работе [8], где было доказано, что уравнения статики принадлежат к гиперболическому типу, найдены характеристики и предложен численный метод интегрирования этих уравнений.

В работе [13] показано, что при условии пластичности Треска пространственная задача статически определима, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска. Система уравнений пластического равновесия принадлежит к гиперболическому типу и нормали к характеристическим поверхностям совпадают с нормалями к площадкам максимальных касательных напряжений (площадкам скольжения). Отметим также, что вопросы построения теории идеальной пластичности при условии соответствия напряженного состояния ребру призмы Треска рассматривались в цикле работ [13 - 15].

Ассоциированный закон течения для ребра призмы Треска не фиксирует направление вектора, представляющего приращение тензора пластической деформации [16]. Поэтому появляется дополнительная функция – угол, определяющий положение вектора приращения пластической деформации между нормалями к граням призмы, которой можно воспользоваться для построения согласованного поля скоростей. Именно поэтому на ребре призмы Треска часто можно отыскать решения прикладных задач о течении пластических тел.

Необходимо также отметить то обстоятельство, что решения уравнений статики, полученные в известных работах [5], [8], соответствуют именно ребру призмы Треска, так как условие пластичности Мизеса в сочетании с условием Хаара-Кармана оставляет только те напряженные состояния, которые соответствуют прямым, по которым пересекается цилиндр Мизеса и вписанная в него призма Треска.

Принципиально важным также является тот факт, что соотношения пространственной и осесимметричной задачи вдоль характеристик являются неинтегрируемыми в отличие от случая плоской пластической деформации. Конечные соотношения можно получить, как будет показано ниже, только вдоль линий главных напряжений. Поэтому отличительной чертой предлагаемого подхода является то, что уравнения пространственной задачи исследуются не методом характеристик, а с помощью канонических преобразований, естественно определяемых с помощью сетки линий главных напряжений. Последовательное проведение такого подхода подразумевает представление всех уравнений в криволинейной сетке линий главных напряжений (изостат). Ясно, что изостаты исключительно удобны при анализе статических уравнений, но переформулировка уравнений кинематики в изостатические координаты сопряжена со значительными трудностями.

Связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, вообще не подвергалась анализу с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к интегрированию более сложных, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности, связанных уравнений. Несколько слов необходимо сказать о выборе представления анизотропной поврежденности. Мы использовали модель, предложенную в [17], и ограничились тензором эффективных напряжений построенным как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Это условие соосности, как было установлено в [17], действительно выполняется только в том случае, когда в процессе нагружения влиянием упругой деформации на состояние поврежденности можно пренебречь. Заметим, что достаточно полное изложение современной механики поврежденности может быть найдено в книге [18].

Рассмотрим, следуя [13], уравнения равновесия упругопластического тела, подчиняющегося условию пластичности Треска. Пусть в жесткопластическом теле, материал которого характеризуется константой k – пределом текучести при чистом сдвиге, осуществляется напряженное состояние, соответствующее ребру призмы Треска. Обозначим через σ_{ij} тензор напряжений; l_i, m_i, n_i – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; σ_1, σ_2, σ_3 – соответствующие собственные значения (главные напряжения).

Спектральное разложение тензора напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j. \tag{1.1}$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска для тела без повреждений представляется правильной шестигранной призмой с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Поскольку базис l_i, m_i, n_i предполагается ортонормированным, то

$$\delta_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j. \tag{1.2}$$

Учитывая соотношения (1.1), (1.2) и уравнение ребра призмы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\sigma_{ij} = (\sigma_3 \pm 2k)\delta_{ij} \mp 2k n_i n_j. \tag{1.3}$$

Таким образом, напряжения в неповрежденном жесткопластическом теле определяются скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем n_i.

Традиционное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

после подстановки в него разложения (1.3) может быть представлено в следующей инвариантной форме

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

Следовательно, задача о равновесии жесткопластического тела для ребра призмы Треска статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора n_i), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Вводя обозначение

$$\Sigma = \frac{\sigma_3}{\mp 2k},$$

уравнение (1.4) приведем к виду:

$$\mathrm{grad}\Sigma + \mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

В декартовых координатах уравнение (1.5) эквивалентно системе уравнений:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} + n_k\frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i\frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (i,k=1,2,3). \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.6) принадлежит к гиперболическому типу, так как в каждой точке существует три характеристических направления (нормали к характеристическим поверхностям). Если обозначить через $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ единичные нормали к характеристическим поверхностям в данной точке, то

$$\mathbf{n}^{(1)}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbf{n}^{(2)}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbf{n}^{(3)}\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{1.7}$$

Заметим, что характеристиками являются не только поверхности скольжения, но и поверхности, составленные из интегральных линий векторного поля $\mathbf{n}$.

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.5):

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{0}. \tag{1.8}$$

Любопытно отметить, что уравнения статики плоской пластической деформации (см., например, [4])

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) = 0,\\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) = 0,\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $p = 1/2(\sigma_1+\sigma_2)$, θ – угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению σ_1 к оси x_1, по форме являются двумерным аналогом уравнений (1.6).

Действительно, вводя обозначения $\Sigma = p/(2k)$ и определяя единичное плоское векторное поле $\mathbf{n}$ с помощью соотношений

$$n_1 = \cos\theta,\ n_2 = \sin\theta,$$

систему (1.9) можно представить в форме (1.6).

В дальнейшем особую роль будут играть расслоенные векторные поля $\mathbf{n}$. Векторное поле, определенное в некоторой области пространства, называется расслоенным, если существует семейство поверхностей, заполняющих эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства совпадает с полем $\mathbf{n}$.

Для того чтобы векторное поле $\mathbf{n}$ было расслоенным в некоторой области пространства, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось соотношение

$$\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n}=0. \tag{1.10}$$

Слои векторного поля $\mathbf{n}$ составляются из векторных линий поля $\mathrm{rot}\mathbf{n}$ следующим образом: сначала выбирается поверхность так, чтобы векторы $\mathbf{n}$ касались ее в каждой точке, затем на этой поверхности строится семейство траекторий, ортогональных векторам $\mathbf{n}$, и из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля $\mathrm{rot}\mathbf{n}$, образуя слой векторного поля $\mathbf{n}$.

Для единичного векторного поля $\mathbf{n}$ введем углы ϑ, ψ, определяющие его ориентацию в пространстве:

$$\mathbf{n}=\sin\psi\sin\vartheta\mathbf{i}-\cos\psi\sin\vartheta\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}. \tag{1.11}$$

Тогда условие расслоенности поля напряжений, следующее из (1.10) , можно получить в виде:

$$\begin{gathered}\cos\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+\sin\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}-\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\\ +\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\sin^2\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Заметим, что любое плоское и осесимметричное векторное поле является расслоенным.

Таким образом, для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, которое, кроме того, является расслоенным в некоторой области пространства, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением $\mathbf{n}$ должно удовлетворять уравнениям:

$$\mathrm{rotdiv}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0},\ \ \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n}=0,\ \ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1. \tag{1.13}$$

Векторное уравнение (1.5) имеет инвариантную форму, исключительно удобную для преобразования к криволинейным координатам. Преобразуем его к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3. Ковариантные компоненты векторного поля $\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})$ определяются, как следует ниже (см., например, [19]):

$$(\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}))_l=\frac{1}{\sqrt{g}}g_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}\left(\sqrt{g}n^kn^m\right)+n^rn^s[rs,l], \tag{1.14}$$

где g_{kl} – компоненты метрического тензора, $g=\det g_{ij}$, $[rs,l]=\Gamma_{rs,l}$ – символы Кристоффеля первого рода, через n^m обозначены контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{n}$.

Используя формулу (1.14), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^l}+\frac{1}{\sqrt{g}}g_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}\left(\sqrt{g}n^kn^m\right)+n^rn^s[rs,l]=0. \tag{1.15}$$

Ниже мы воспользуемся последним уравнением для преобразования уравнений пластического равновесия к специальным образом подобранным криволинейным координатам.

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_2\delta_{ij} - (\sigma_2 - \sigma_3)n_i n_j + 2kl_i l_j. \tag{1.16}$$

Уравнения равновесия поэтому получаются в виде (ср. (1.5))

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\Sigma_2 + \mathrm{div}(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \\ + [\mathbf{n}\cdot\mathrm{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)]\,\mathbf{n} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{1.17}$$

где $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$.

Аналогом векторного уравнения (1.8) будет выступать уравнение:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\Sigma_2 + (\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l} + \mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\left[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})\right] + \\ + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Векторное уравнение (1.8) представим также в форме проекций на характерные ориентации, связанные с полем напряжений: проектируя на направление $\mathbf{n}$, находим

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial n} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n} = 0; \tag{1.19}$$

проектируя на любое ортогональное вектору $\mathbf{n}$ направление (задаваемое ортом $\boldsymbol{\tau}$), получим

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = 0. \tag{1.20}$$

Проектируя векторное уравнение (1.18) на главные оси тензора напряжений, находим:

направление $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial\Sigma_3}{\partial n} + \mathbf{n}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}) = 0; \tag{1.21}$$

направление $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial\Sigma_2}{\partial l} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\left\{\mathbf{l}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]\right\} = 0; \tag{1.22}$$

направление $\mathbf{m}$:

$$\frac{\partial\Sigma_2}{\partial m} + \mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\left\{\mathbf{m}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]\right\} = 0. \tag{1.23}$$

Обратимся теперь к соотношениям, связывающим приращения напряжений и деформаций. Известно, что одним из важнейших преимуществ кусочно-линейных условий пластичности (к которым относится и условие пластичности Треска) является возможность для напряженных состояний, соответствующих грани поверхности текучести, выразить приращения главных пластических деформаций $d\varepsilon_i^P$ через полные приращения $d\varepsilon_i'$. Здесь и в дальнейшем штрихом обозначается девиатор тензора второго ранга. Ясно, что принципиально иная ситуация в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру: приращение пластической деформации здесь принципиально определить нельзя ни по величине, ни по направлению.

Искомые соотношения (как для граней, так и для ребер призмы Треска) без труда выводятся с помощью разложения приращения пластической деформации на три части

$$d\varepsilon_{ij}^{P} = d\varepsilon_{ij}^{P(1)} + d\varepsilon_{ij}^{P(2)} + d\varepsilon_{ij}^{P(3)}, \tag{1.24}$$

каждая из которых соответствует одной из трех функций текучести

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k, \end{aligned} \tag{1.25}$$

составляющих условие пластичности Треска, и ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = 0, \ \ f^{(\alpha)} < 0 \text{ или } f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \dfrac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \\ d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = \dfrac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda^{(\alpha)}, \ \ f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \dfrac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad d\lambda^{(\alpha)} > 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Ясно также, что достаточно получить только три соотношения, связывающих приращения главных напряжений и деформаций, поскольку ассоциированный закон течения устанавливает лишь соосность приращения тензора пластических деформаций и тензора напряжений и не дает никаких дополнительных соотношений для определения ориентаций $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ в пространстве.[2]

Опуская детали вывода, приведем итоговые соотношения

$$\begin{aligned} d\sigma_1' = 2G\Delta\Big[&(4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_1' + \\ &+(2\gamma^{(1)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_2' + \\ &+(2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_3'\Big], \\ d\sigma_2' = 2G\Delta\Big[&(2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_1' + \\ &+(4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_2' + \\ &+(2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_3'\Big], \\ d\sigma_3' = 2G\Delta\Big[&(2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_1' + \\ &+(2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_2' + \\ &+(4 - 2\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon_3'\Big], \end{aligned} \tag{1.27}$$

[2] Напомним, что векторы, задающие ориентацию главных осей тензора напряжений, присутствуют в уравнениях равновесия для ребра (1.5) и грани (1.17) и неизбежно появляются в кинематических уравнениях – уравнениях совместности для приращений полной деформации.

где G – упругий модуль сдвига,

$$\gamma^{(1)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0, \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_2| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_2)\mathrm{sgn}(\sigma_1 - \sigma_2) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0, \\ 0, & |\sigma_2 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_2 - d\sigma_3)\mathrm{sgn}(\sigma_2 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(3)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0, \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_3)\mathrm{sgn}(\sigma_1 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\Delta = (4 - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})^{-1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, для нагружений вдоль ребра призмы Треска, которое определяется условием

$$\begin{gathered} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k = 0, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_1 - \sigma_3| - 2k < 0, \\ d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0, \quad d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0, \end{gathered} \tag{1.28}$$

находим

$$d\sigma_1' = 0, \quad d\sigma_2' = 0, \quad d\sigma_3' = 0. \tag{1.29}$$

Для нагружений, соответствующих смещению изображающей напряжения точки вдоль грани призмы

$$\begin{gathered} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k < 0, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k < 0, \\ d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0, \end{gathered} \tag{1.30}$$

получим полные соотношения в форме

$$\begin{gathered} d\sigma_1' = d\sigma_2' = G(d\varepsilon_1' + d\varepsilon_2'), \\ d\sigma_3' = 2G d\varepsilon_3'. \end{gathered} \tag{1.31}$$

К уравнениям равновесия и определяющим уравнениям, очевидно, необходимо присоединить еще кинематические уравнения. В качестве таковых вместо уравнений для скоростей перемещений, традиционно использующихся в теории пластичности, исключительно удобными оказываются уравнения сплошности для приращений полных главных деформаций, сформулированные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения кинематики будут рассмотрены несколько ниже.

2. Канонические инварианты уравнений пластического равновесия

Рассмотрим класс напряженных состояний с расслоенными полями $\mathbf{n}$. Как было отмечено выше, все плоские и осесимметричные пластические поля напряжений заведомо входят в этот класс.

Воспользуемся предположением о расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ и выберем криволинейные координаты ξ^m специальным образом: поверхности $\xi^3 = const$ есть слои поля $\mathbf{n}$, а поверхности $\xi^1 = const$, $\xi^2 = const$ – интегральные поверхности векторного поля $\mathbf{n}$.

При таком выборе криволинейных координат имеем:

$$g_{13} = 0,\ g_{23} = 0,\ n^1 = 0,\ n^2 = 0,$$

что позволяет существенно упростить уравнения (1.15):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2}\left(n^3\right)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} = 0,\\
&\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}\left(n^3\right)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} = 0,\\
&\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2}\left(n^3\right)^2 g_{33}\frac{\partial}{\partial \xi^3}\ln(g_{33}g) + g_{33}\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(n^3\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как

$$\left(n^3\right)^2 = \frac{1}{g_{33}},$$

то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33} + \frac{1}{2}\ln g\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) интегрируются вдоль линий главных напряжений: инвариант $I_{1,2} = \Sigma - \ln\sqrt{g_{33}}$ сохраняет свое значение на каждом из слоев поля $\mathbf{n}$, инвариант $I_3 = \Sigma - \ln\sqrt{g_{33}} + \ln\sqrt{g}$ не изменяется вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$.

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась в работе [20] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в 21 -23]. Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [24]. В этой же работе была установлена связь между преобразованием области пластического течения с помощью координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время А. Пуанкаре [25, 26] (см. также [27]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью производящих функций. Как было показано в [24, 28], уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, обладают важными свойствами инвариантности относительно преобразований Лежандра и Ампера.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (2.2) состоит в возможности разложения детерминанта g на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3) G_2(\xi^1, \xi^2). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) является одновременно и общим интегралом уравнений (1.13): если задаться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$ и выполнялось уравнение (2.3), то векторное поле

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{grad}\xi^3}{|\mathrm{grad}\xi^3|}$$

будет тождественно удовлетворять уравнениям (1.13).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное и плоское векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты r, φ, z, то слоями осесимметричного поля $\mathbf{n}$ будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю $\mathbf{n}$ траекторий, расположенных в плоскости $\varphi = 0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля $\mathbf{n}$.

Система уравнений (2.1) может быть также выведена из известных уравнений Ламе – уравнений равновесия, представленных в ортогональной криволинейной сетке изостат.[3] Изостаты отнюдь не всегда образуют сетку, которая допускает подбор криволинейных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы изостаты совпадали с координатными линиями. Но если такая возможность существует, то уравнения равновесия сводятся к трем соотношениям вдоль изостат:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_{12}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{r_{13}} + \rho F_{<1>} = 0,\\
&\frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{r_{23}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_{21}} + \rho F_{<2>} = 0,\\
&\frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r_{31}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{r_{32}} + \rho F_{<3>} = 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где L_1, L_2, L_3 – натуральные параметры, измеряемые вдоль взаимно ортогональных изостат, $F_{<1>}$, $F_{<2>}$, $F_{<3>}$ – физические компоненты поля массовых сил по отношению к локальному ортонормированному базису, связанному с изостатами,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln\sqrt{g_{33}}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\ln\sqrt{g_{33}},\\
&\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\ln\sqrt{g_{11}}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\ln\sqrt{g_{22}},\\
&\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln\sqrt{g_{22}}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\ln\sqrt{g_{11}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, что $r_{ij} \neq r_{ji}$.

[3] Напомним, что изостатой (или линией главного напряжения) называется кривая, касательная к которой направлена вдоль главной оси тензора напряжений.

Следует отметить, что изостатические сетки, использованные для формулировки уравнений (2.2) и (2.4), различны, поскольку в первом случае $g_{12} \neq 0$, а во втором – недиагональные компоненты метрического тензора равны нулю.

Коэффициенты $1/r_{ij}$ в уравнениях (2.4) легко могут быть выражены через кривизны изостат в соответствующих локальных координатных плоскостях. Действительно, преобразуя уравнение равновесия

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}\sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\sigma_3) = \mathbf{0}$$

к виду

$$\mathbf{l}\frac{\partial \sigma_1}{\partial l} + \mathbf{m}\frac{\partial \sigma_2}{\partial m} + \mathbf{n}\frac{\partial \sigma_3}{\partial n} + \sigma_1 [\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] + \sigma_2 [\mathbf{m}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] + \\ + \sigma_3 [\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = \mathbf{0}$$

и учитывая, что

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{l} = \kappa_{32} + \kappa_{23}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{m} = \kappa_{13} + \kappa_{31}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n} = \kappa_{12} + \kappa_{21}, \\ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\kappa_{23}, \quad \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\kappa_{13}, \quad \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\kappa_{12}, \quad \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\kappa_{21}, \end{gathered}$$

где κ_{ij} есть кривизна изостаты с номером i в локальной координатной плоскости, перпендикулярной направлению j, находим

$$\frac{1}{r_{12}} = \kappa_{23}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \kappa_{13}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \kappa_{32}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \kappa_{12}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \kappa_{31}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \kappa_{21}.$$

Для напряженных состояний на ребре призмы Треска с максимальным третьим собственным значением и в случае отсутствия массовых сил уравнения Ламе приобретают весьма простой вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma_1}{dL_1} - \frac{2k}{r_{13}} = 0, \\ &\frac{d\sigma_2}{dL_2} - \frac{2k}{r_{23}} = 0, \\ &\frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{2k}{r_{31}} + \frac{2k}{r_{32}} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Чтобы преобразовать уравнения (2.6) к форме (2.2), достаточно воспользоваться (2.5).

В двумерном случае аналогом уравнений (2.4) являются уравнения Ламе-Максвелла:

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \\ &\frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против хода часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.7) приобретают вид соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \\ \frac{d\sigma_1}{dL_2} + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Заметим также, что двумерные дифференциальные уравнения равновесия вдоль линий наибольших касательных напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{ds_1} - \frac{d(\sigma_1-\sigma_2)}{ds_2} + \frac{2(\sigma_1-\sigma_2)}{R_1} = 0, \\ \frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{ds_2} - \frac{d(\sigma_1-\sigma_2)}{ds_1} - \frac{2(\sigma_1-\sigma_2)}{R_2} = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где s_1, s_2 – натуральные параметры, измеряемые вдоль линий наибольших касательных напряжений, R_1, R_2 – радиусы кривизны, причем считается установленным сформулированное выше правило выбора знаков кривизн.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.9) существенно упрощаются

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{ds_1} + \frac{4k}{R_1} = 0, \\ \frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{ds_2} - \frac{4k}{R_2} = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

и непосредственно приводят к интегралам Генки вдоль линий скольжения.

Обратимся теперь к уравнениям кинематики. Как было подчеркнуто выше, в качестве таковых удобно взять уравнения совместности приращений полных главных деформаций, представленные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения совместности деформаций пригодны при любой определяющей зависимости и в инвариантной форме представляются тензорным уравнением $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$, где тензор второго ранга $\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора полных деформаций (или приращения полных деформаций).

Согласно соотношениям ассоциированного закона течения приращение пластических деформаций есть тензор, соосный тензору напряжений, что оказывается, вообще говоря, неверным для приращения упругих деформаций. Ясно, поэтому, что преобразование уравнений совместности деформаций к главным осям напряжений проще всего осуществляется в том случае, когда упругими деформациями можно пренебречь. Заметим также, что при выводе уравнений совместности мы с самого начала не будем предполагать несжимаемость пластического деформирования, чтобы получить соотношения, пригодные и в случае учета анизотропной поврежденности (влияние анизотропной поврежденности проявляется, в частности, и в том, что пластическое течение становится сжимаемым).

С целью вывода уравнений совместности (сплошности) деформаций рассмотрим сначала инвариантное представление этих уравнений для приращений главных деформаций (приращениями упругих деформаций будем пренебрегать, но откажемся от требования несжимаемости):

$$\nabla\times(\nabla\times(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3))^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1)&=[(\nabla d\varepsilon_1)\times\mathbf{l}]\otimes\mathbf{l}+\\&+\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\Gamma^2_{11}\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}-\Gamma^3_{11}\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\right)-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^2_{12}\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\Gamma^3_{13}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\right\}d\varepsilon_1,\end{aligned}$$

а также два аналогичных выражения

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2)&=[(\nabla d\varepsilon_2)\times\mathbf{m}]\otimes\mathbf{m}+\\&+\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(-\Gamma^1_{22}\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}+\Gamma^3_{22}\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\right)+\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^1_{21}\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}-\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\Gamma^3_{23}\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\right\}d\varepsilon_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3)&=[(\nabla d\varepsilon_3)\times\mathbf{n}]\otimes\mathbf{n}+\\&+\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left(\Gamma^1_{33}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}-\Gamma^2_{33}\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\right)-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^1_{31}\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^2_{32}\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\right\}d\varepsilon_3,\end{aligned}$$

матрицу тензора

$$\mathbf{P}=(\nabla\times(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3))^{\mathrm{T}}$$

в главных осях напряжений можно получить в виде

$$\left\|\begin{matrix}0 & d_3d\varepsilon_1+\dfrac{1}{r_{31}}(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3) & -d_2d\varepsilon_1+\dfrac{1}{r_{21}}(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\\ -d_3d\varepsilon_2+\dfrac{1}{r_{32}}(d\varepsilon_3-d\varepsilon_2) & 0 & d_1d\varepsilon_2+\dfrac{1}{r_{12}}(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\\ d_2d\varepsilon_3+\dfrac{1}{r_{23}}(d\varepsilon_3-d\varepsilon_2) & -d_1d\varepsilon_3+\dfrac{1}{r_{13}}(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3) & 0\end{matrix}\right\|. \tag{2.12}$$

Здесь d_k обозначает производную

$$\frac{d}{dL_k}=\frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\frac{\partial}{\partial\xi^k}. \tag{2.13}$$

(по k не суммировать $(k=1,2,3)$).

Таким образом, уравнения совместности есть

$$\nabla\times\mathbf{P}=\mathbf{0}, \tag{2.14}$$

где компоненты вихря тензора $\mathbf{P}$ в главных осях тензора напряжений представляются в виде (мы опускаем детали вывода),

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{11}=d_2P_{31}-d_3P_{21}+\frac{1}{r_{23}}P_{31}-\frac{1}{r_{32}}P_{21}+\frac{1}{r_{13}}P_{23}-\frac{1}{r_{12}}P_{32},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{12}=d_2P_{32}+\frac{1}{r_{23}}(P_{32}+P_{23})+\frac{1}{r_{12}}P_{31},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{13}=-d_3P_{23}-\frac{1}{r_{32}}(P_{23}+P_{32})-\frac{1}{r_{13}}P_{21},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{21}=-d_1P_{31}-\frac{1}{r_{13}}(P_{31}+P_{13})-\frac{1}{r_{21}}P_{32},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{22}=d_3P_{12}-d_1P_{32}+\frac{1}{r_{31}}P_{12}-\frac{1}{r_{13}}P_{32}+\frac{1}{r_{21}}P_{31}-\frac{1}{r_{23}}P_{13},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{23}=d_3P_{13}+\frac{1}{r_{31}}(P_{13}+P_{31})+\frac{1}{r_{23}}P_{12},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{31}=d_1P_{21}+\frac{1}{r_{12}}(P_{21}+P_{12})+\frac{1}{r_{31}}P_{23},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{32}=-d_2P_{12}-\frac{1}{r_{21}}(P_{12}+P_{21})-\frac{1}{r_{32}}P_{13},$$

$$(\nabla\times\mathbf{P})_{33}=d_1P_{23}-d_2P_{13}+\frac{1}{r_{12}}P_{23}-\frac{1}{r_{21}}P_{13}+\frac{1}{r_{32}}P_{12}-\frac{1}{r_{31}}P_{21}.$$

В случае плоской, возможно сжимаемой, пластической деформации (при пренебрежимо малых упругих деформациях) матрица тензора $\mathbf{P}$ в главных осях напряжений есть

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & -d_2d\varepsilon_1+\dfrac{1}{r_{21}}(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\\ 0 & 0 & +d_1d\varepsilon_2+\dfrac{1}{r_{12}}(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|. \tag{2.15}$$

Уравнение совместности в приращениях полных главных деформаций поэтому получаются как

$$d_1P_{23}-d_2P_{13}+\frac{1}{r_{12}}P_{23}-\frac{1}{r_{21}}P_{13}=0, \tag{2.16}$$

или

$$\begin{gathered} d_2d_2d\varepsilon_1+d_1d_1d\varepsilon_2+(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\left(d_1\frac{1}{r_{12}}-d_2\frac{1}{r_{21}}+\frac{1}{r_{12}^2}-\frac{1}{r_{21}^2}\right)+\\ +\frac{1}{r_{12}}d_1(2d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)+\frac{1}{r_{21}}d_2(2d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)=0. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Учитывая, что $r_{12}=\rho_2$, $r_{21}=-\rho_1$, получим также

$$\begin{gathered} d_2d_2d\varepsilon_1+d_1d_1d\varepsilon_2+(d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)\left(d_1\frac{1}{\rho_2}+d_2\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2^2}-\frac{1}{\rho_1^2}\right)+\\ +\frac{1}{\rho_2}d_1(2d\varepsilon_2-d\varepsilon_1)-\frac{1}{\rho_1}d_2(2d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)=0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Для нагружений жесткопластического тела вдоль грани (1.30) имеем $d\varepsilon_3=0$, $d\varepsilon_1+d\varepsilon_2=0$, следовательно, матрица (2.12) приобретает вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{12} d\varepsilon_1 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{21} d\varepsilon_1 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ \kappa_{31} d\varepsilon_1 & \kappa_{32} d\varepsilon_1 & 0 \end{array} \right\|. \qquad (2.19)$$

В случае плоской пластической несжимаемой деформации при пренебрежимо малых упругих деформациях матрица (2.15) и уравнение совместности деформаций (2.18) соответственно приобретают форму

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \qquad (2.20)$$

$$(d_2 d_2 - d_1 d_1) d\varepsilon_1 - 2\left(d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2\right) d\varepsilon_1 - 3\kappa_2 d_1 d\varepsilon_1 - 3\kappa_1 d_2 d\varepsilon_1 = 0. \qquad (2.21)$$

3. Учет анизотропной поврежденности

Мы по-прежнему будем рассматривать упругопластическое тело, подчиняющееся критерию текучести Треска, но предметом исследования будет являться учет анизотропного распределения поврежденности в основных уравнениях. Ограничимся простейшим вариантом: поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга $\mathbf{D}$, главные оси которого считаются коориентированными главным осям тензора напряжений.

Ключевой принцип, позволяющий сформулировать основные уравнения модели, состоит в использовании тензора эффективных напряжений вместо тензора истинных напряжений во всех определяющих зависимостях.

Сначала будем считать, что эффективные напряжения находятся на ребре призмы Треска и занумеруем главные оси так, чтобы третье главное эффективное напряжение было максимальным (или минимальным), а два других главных эффективных напряжения принимаются равными друг другу:

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} = \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = \frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k, \qquad (3.1)$$

причем главные поврежденности D_1, D_2 также считаются равными (их общее значение обозначим через $\tilde{D}$).

Тензор напряжений тогда представляется в форме (ср. (1.3)):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k\right)(1 - \tilde{D})\delta_{ij} + \left[\left(1 - \frac{1 - \tilde{D}}{1 - D_3}\right)\sigma_3 \mp 2k(1 - \tilde{D})\right] n_i n_j. \qquad (3.2)$$

Уравнение равновесия имеет вид (ср. (1.5)):

$$\begin{gathered} \operatorname{grad}\left[(1 - \tilde{D})\left(-1 + \frac{\Sigma}{1 - D_3}\right)\right] + \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1\right)(1 - \tilde{D})\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n}\left\{\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}\left[\left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1\right)(1 - \tilde{D})\right]\right\} = \mathbf{0}, \end{gathered} \qquad (3.3)$$

где по-прежнему используется обозначение $\Sigma = \sigma_3/(\mp 2k)$.

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление $\mathbf{n}$ и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору $\mathbf{n}$, находим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Sigma}{\partial n}+\left(\frac{\Sigma}{1-\tilde{D}}-\frac{\Sigma}{1-D_3}+1\right)(1-\tilde{D})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})=0,\\ \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(-\frac{\Sigma}{1-D_3}+1\right)(1-\tilde{D})\right]-\left(\frac{\Sigma}{1-\tilde{D}}-\frac{\Sigma}{1-D_3}+1\right)(1-\tilde{D})\boldsymbol{\tau}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]=0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Более простые соотношения получаются в том случае, если поврежденность, соответствующая ориентациям $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, пренебрежимо мала. На основании

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{\sigma_3}{1-D_3}\pm 2k \tag{3.5}$$

получим следующее представление напряжений:

$$\sigma_{ij}=\left(\frac{\sigma_3}{1-D_3}\pm 2k\right)\delta_{ij}+\left[\left(1-\frac{1}{1-D_3}\right)\sigma_3\mp 2k\right]n_in_j \tag{3.6}$$

и уравнение равновесия

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}\frac{\Sigma}{1-D_3}+\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})+\left(1-\frac{1}{1-D_3}\right)\Sigma\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})+\\ +\mathbf{n}\left\{\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}\left[\left(1-\frac{1}{1-D_3}\right)\Sigma\right]\right\}=\mathbf{0},\end{gathered} \tag{3.7}$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление $\mathbf{n}$ и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору $\mathbf{n}$, находим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Sigma}{\partial n}+\left[\left(1-\frac{1}{1-D_3}\right)\Sigma+1\right](\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})=0,\\ \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\Sigma}{1-D_3}+\left[\left(1-\frac{1}{1-D_3}\right)\Sigma+1\right]\boldsymbol{\tau}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]=0.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Наконец, изотропное по ориентациям распределение поврежденности подразумевает соотношение

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3\pm 2k(1-D), \tag{3.9}$$

которое приводит к тензору напряжений вида

$$\sigma_{ij}=(\sigma_3\pm 2k(1-D))\,\delta_{ij}\mp 2k(1-D)n_in_j \tag{3.10}$$

и уравнению равновесия

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}(\Sigma-(1-D))+(1-D)\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})+\\ +\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}(1-D)]=\mathbf{0}.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление $\mathbf{n}$ и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору $\mathbf{n}$, находим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Sigma}{\partial n}+(1-D)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})=0,\\ \frac{\partial}{\partial \tau}(\Sigma-(1-D))+(1-D)\boldsymbol{\tau}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]=0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь основные соотношения для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, уравнение которой в терминах эффективного напряжения имеет вид

$$\frac{\sigma_1}{1-D_1}-\frac{\sigma_2}{1-D_2}=2k. \tag{3.13}$$

Тензор напряжений в этом случае представим в форме:

$$\sigma_{ij}=\sigma_2\delta_{ij}+2k(1-D_1)l_il_j+\left(\frac{1-D_1}{1-D_2}-1\right)\sigma_2l_il_j+(\sigma_3-\sigma_2)n_in_j. \tag{3.14}$$

Уравнение равновесия, следовательно, может быть получено как

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\Sigma_2+(\Sigma_3-\Sigma_2)\left[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}+\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})\right]+\mathbf{n}\left[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\Sigma_3-\Sigma_2)\right]+\\ +\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right]\left[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}+\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l})\right]+\\ +\mathbf{l}\left\{\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right]\right\}=\mathbf{0}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направления $\mathbf{n}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, находим:

$$\frac{\partial\Sigma_3}{\partial n}+(\Sigma_3-\Sigma_2)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})+\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right]\mathbf{n}\cdot\left[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}\right]=0, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial l}+(\Sigma_3-\Sigma_2)\mathbf{l}\cdot\left[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}\right]+\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right](\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l})+\\ +\frac{\partial}{\partial l}\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right]=0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\Sigma_2}{\partial m}+(\Sigma_3-\Sigma_2)\mathbf{m}\cdot\left[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}\right]+\left[(1-D_1)+\frac{D_2-D_1}{1-D_2}\Sigma_2\right]\mathbf{m}\cdot\left[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}\right]=0. \tag{3.18}$$

Из полученных соотношений для грани призмы Треска непосредственно могут быть выведены основные уравнения пластического плоского деформированного состояния, на которое накладывается поле рассеянной поврежденности. Условие пластичности выражается уравнением (3.13).

Опуская детали вывода, приведем уравнение равновесия в случае плоского деформированного состояния

$$\begin{aligned}\omega\left[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}+\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l})\right]+\mathbf{l}\left[\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega\right]+\Sigma_2\left[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}+\mathbf{m}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{m})\right]+\\ +\mathbf{m}\left[\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Sigma_2\right]=\mathbf{0},\end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$\omega=1-D_1+\frac{1-D_1}{1-D_2}\Sigma_2,\quad \Sigma_2=\frac{\sigma_2}{2k}.$$

Ясно, что с помощью этого уравнения, имеющего инвариантную форму, без труда могут быть получены переформулировки для любой нужной координатной системы.

Ясно, что наибольший интерес представляет уравнение (3.19), записанное в криволинейной координатной сетке изостат. С этой целью спроектируем уравнение (3.19) соответственно на главные направления $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\omega}{\partial l} + \omega(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + \Sigma_2\mathbf{l}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = 0,\\ &\frac{\partial\Sigma_2}{\partial m} + \Sigma_2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{m}) + \omega\mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Пользуясь затем геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} &\kappa_1 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{m}, \quad \kappa_2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l},\\ -&\kappa_1 = \mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}], \quad -\kappa_2 = \mathbf{l}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}], \end{aligned} \tag{3.21}$$

где κ_1, κ_2 – кривизны соотвественно первого и второго семейства изостатических траекторий, уравнения (3.20) представим в форме, которая является обобщением уравнений (2.8) на случай пластической среды с рассеянными повреждениями (L_1, L_2 – натуральные параметры вдоль изостатических траекторий):

$$\begin{aligned} &\frac{d\omega}{dL_1} - (\Sigma_2 - \omega)\kappa_2 = 0,\\ &\frac{d\Sigma_2}{dL_2} + (\Sigma_2 - \omega)\kappa_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ясно также, что кривизны изостатических траекторий κ_1, κ_2 выражаются (с учетом сформулированного правила знаков) через радиусы кривизны ρ_1, ρ_2 по формулам:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\rho_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}. \tag{3.23}$$

Отметим также следующие формулы:

$$\frac{1}{\rho_1} = d_2 \ln\frac{d\xi^1}{dL_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -d_1 \ln\frac{d\xi^2}{dL_2}.$$

Нам осталось еще рассмотреть соотношения ассоциированного закона течения для тела с рассеянными повреждениями.

Начнем с соотношений для грани (3.13). Ассоциированный закон течения здесь имеет форму двух соотношений

$$d\varepsilon_1^P = \frac{d\lambda}{1-D_1}, \quad d\varepsilon_2^P = -\frac{d\lambda}{1-D_2}, \quad d\varepsilon_3^P = 0. \tag{3.24}$$

Множитель $d\lambda$ определяется из условия непрерывности

$$d\left(\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_2}{1-D_2}\right) = 0,$$

которое в результате преобразований и с учетом уравнений роста повреждений, которые мы примем в достаточно общей форме,

$$dD_k = F_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon_1^P, \varepsilon_2^P, \varepsilon_3^P, D_1, D_2, D_3)d\gamma \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{3.25}$$

где γ – длина траектории пластического деформирования,

$$\gamma = \int \sqrt{d\varepsilon_j^P d\varepsilon_j^P}, \tag{3.26}$$

приводит к соотношению

$$d\lambda = \frac{(1-D_1)(1-D_2)}{\sqrt{(1-D_1)^2+(1-D_2)^2}} \frac{(1-D_1)d\sigma_2-(1-D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k\left[(1-D_2)F_1+(1-D_1)F_2\right]}.$$

Ясно, что с помощью последнего соотношения уравнения ассоциированного закона течения для грани (3.24) могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} (1-D_1)d\varepsilon_1^P + (1-D_2)d\varepsilon_2^P = 0, \\ d\varepsilon_1^P = \dfrac{1-D_2}{\sqrt{(1-D_1)^2+(1-D_2)^2}} \dfrac{(1-D_1)d\sigma_2-(1-D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k\left[(1-D_2)F_1+(1-D_1)F_2\right]}, \\ d\varepsilon_3^P = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Таким образом, приращения пластической деформации однозначно определены.

Рассмотрим соотношения на ребре. Предположим, что ребро образовано пересечением граней

$$\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k, \qquad \frac{\sigma_2}{1-D_2} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k. \tag{3.28}$$

Приращение полной главной деформации в соответствии с нумерацией функций текучести (1.25) тогда есть

$$d\varepsilon_k^P = d\varepsilon_k^{P(2)} + d\varepsilon_k^{P(3)},$$

где согласно ассоциированному закону течения

$$\begin{cases} (1-D_2)d\varepsilon_2^{P(2)} + (1-D_3)d\varepsilon_3^{P(2)} = 0, \\ d\varepsilon_2^{P(2)} = \dfrac{1-D_3}{\sqrt{(1-D_2)^2+(1-D_3)^2}} \dfrac{(1-D_2)d\sigma_3-(1-D_3)d\sigma_2}{\sigma_3 F_2 - \sigma_2 F_3 + 2k\left[(1-D_3)F_2+(1-D_2)F_3\right]}, \\ d\varepsilon_1^{P(2)} = 0, \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} (1-D_1)d\varepsilon_1^{P(3)} + (1-D_3)d\varepsilon_3^{P(3)} = 0, \\ d\varepsilon_1^{P(3)} = \dfrac{1-D_3}{\sqrt{(1-D_1)^2+(1-D_3)^2}} \dfrac{(1-D_1)d\sigma_3-(1-D_3)d\sigma_1}{\sigma_3 F_1 - \sigma_1 F_3 + 2k\left[(1-D_3)F_1+(1-D_1)F_3\right]}, \\ d\varepsilon_2^{P(3)} = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Соотношения ассоциированного закона течения однозначно определяют все три приращения $d\varepsilon_1^P$, $d\varepsilon_2^P$, $d\varepsilon_3^P$. Действительно,

$$d\varepsilon_1^P = d\varepsilon_1^{P(3)}, \quad d\varepsilon_2^P = d\varepsilon_2^{P(2)}, \quad -d\varepsilon_3^P = \frac{1-D_1}{1-D_3}d\varepsilon_1^{P(3)} + \frac{1-D_2}{1-D_3}d\varepsilon_2^{P(2)},$$

где приращения $d\varepsilon_1^{P(3)}$, $d\varepsilon_2^{P(2)}$ в свою очередь однозначно определены (3.29), (3.30).

В двумерном случае полная система уравнений плоской пластической деформации включает два уравнения равновесия (3.22), условие пластичности (3.13), уравнение совместности (2.18) в формулировке, не исключающей возможной сжимаемости пластического течения, два соотношения ассоциированного закона течения (3.27) и два уравнения (см. (3.25)), определяющих изменение главных поврежденностей D_1, D_2 с возрастанием пластических деформаций. Всего имеется восемь уравнений для определения восьми неизвестных величин: двух главных напряжений σ_1, σ_2, двух приращений $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, двух главных поврежденностей D_1, D_2 и двух уравнений, определяющих преобразование декартовых координат в изостатические координаты. Ясно, что определение напряжений не может быть проведено независимо от поврежденности и поля деформаций. Плоская задача в принципе статически неопределима.

Укажем далее случаи, когда соотношения вдоль изостат точно интегрируются.

4. Инварианты плоской и пространственной связанной (пластичность-поврежденность) задачи

Ниже приводятся инварианты плоской и пространственной связанной задачи, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Все инварианты непосредственно находятся из уравнений равновесия (3.4), (3.8), (3.12) и (3.22), сформулированных в проекциях на главные оси напряжений, при условии (для трехмерных уравнений) расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$.

1. Пространственная задача (ребро (3.1), две различных главных поврежденности). При условии, что Σ, $\tilde{D}$, D_3 не изменяются на слое векторного поля $\mathbf{n}$, величина

$$I = \Sigma - \ln\sqrt{g_{33}} = \Sigma + \ln\frac{d\xi^3}{dL_3} \tag{4.1}$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$ имеем соотношение

$$d_3\Sigma = \Gamma d_3\left(\ln\frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln\frac{d\xi^2}{dL_2}\right), \tag{4.2}$$

где

$$\Gamma = \left(\frac{\Sigma}{1-\tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1-D_3} + 1\right)(1-\tilde{D})$$

2. Пространственная задача (ребро (3.5), одноосная поврежденность). При условии, что Σ, D_3 не изменяются на слое векторного поля $\mathbf{n}$, величина (4.1) является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$ имеем соотношение (4.2), в котором следует считать

$$\Gamma = \Sigma - \frac{\Sigma}{1-D_3} + 1.$$

3. Пространственная задача (ребро (3.9), изотропная поврежденность). При условии, что поврежденность D не изменяется на слое векторного поля $\mathbf{n}$, величина

$$I = \frac{\Sigma}{1-D} + \ln\frac{d\xi^3}{dL_3} \tag{4.3}$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$ имеем соотношение

$$d_3\Sigma = \Gamma d_3\left(\ln\frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln\frac{d\xi^2}{dL_2}\right), \tag{4.4}$$

где

$$\Gamma = 1 - D.$$

4. Плоская пластическая деформация (условие пластичности (3.13), двумерное распределение поврежденности). В случае, когда Σ_2 не изменяется вдоль изостат первого семейства, отношение

$$I_1 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\dfrac{d\xi^2}{dL_2}} \tag{4.5}$$

не изменяется вдоль изостат первого семейства.

В случае, когда ω не изменяется вдоль изостат второго семейства отношение

$$I_2 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\dfrac{d\xi^1}{dL_1}} \tag{4.6}$$

не изменяется вдоль изостат второго семейства.

И в первом, и во втором случаях ξ^1, ξ^2 есть аналоги канонических переменных, введенных в [28] посредством преобразования

$$x_1 = x_1(\xi^1, \xi^2), \quad x_2 = x_2(\xi^1, \xi^2)$$

области пластического течения, не изменяющего площади любого элемента пластической зоны.

Общие соотношения вдоль линий главных напряжений для первых из трех перечисленных выше случаев имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d_3\Sigma + \Gamma(d_1\vartheta_{12} + d_2\vartheta_{21}) = 0, \\ d_1(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{31} = 0, \\ d_2(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{32} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Здесь ϑ_{ik} – угол между касательной к проекции изостаты с номером i на плоскость, нормальную изостате с номером k, и фиксированным направлением в этой плоскости.

Для напряженного состояния, соответствующего грани (3.13), общие соотношения вдоль линий главных напряжений есть

$$\begin{cases} d_3\Sigma_3 + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(d_1\vartheta_{12} + d_2\vartheta_{21}) - \Gamma d_1\vartheta_{12} = 0, \\ d_1(\Gamma + \Sigma_2) - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3\vartheta_{32} + \Gamma(d_3\vartheta_{32} + d_2\vartheta_{23}) = 0, \\ d_2\Sigma_2 - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3\vartheta_{31} - \Gamma d_1\vartheta_{13} = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$\Gamma = 1 - D_1 + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2}\Sigma_2.$$

Литература

[1] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23.

[2] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.

[3] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.

[4] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608с.

[5] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С.80-101.

[6] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С.41-56.

[7] Ишлинский А.Ю. Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел//Изв. АН СССР. ОТН. 1945. N.3. С.250-260.

[8] Ишлинский А.Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля//Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С.201-224.

[9] Thomas T.Y. On the characteristic surfaces of the von Mises plasticty equations//J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. N. 3. P. 343-357.

[10] Thomas T.Y. Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity//J. Rat. Mech. Anal. 1953. V.2. N.2. P.339-381.

[11] Craggs J.W. Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1945. V.7. N.1. P.35-31.

[12] Ericksen J.L. Singular surfaces in plasticity//J. Math. Physics. 1955. V.34. N.1. P.74-79.

[13] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред//Прикл. матем. и механика. 1958. Т.22. Вып. 1. С.90-96.

[14] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях//Докл. АН СССР. 1959. Т.124, N.3. С.546-549.

[15] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232с.

[16] Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 78с.

[17] Мураками С., Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. N.4. С.93-110.

[18] Krajcinovic D. Damage Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1996. 762p.

[19] Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374с.

[20] Jenne W. Raumliche Spannungsverteilungen in festen Korpern bei plastischer Deformation//ZAMM. 1928. Bd. 8. H.1. S.18-44.

[21] Schield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry//Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V.A233. N.1193. P.267-287.

[22] Lippman H. Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation//J. Mech. Phys. Solids. 1962. V.10. N.2. P.111-122.

[23] Lippman H. Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow//J. Mech. Phys. Solids. 1965. V.13. N.1. P.29-39.

[24] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. N.1. С.86-94.

[25] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 3//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т.2. М.: Наука, 1972. С.9-445.

[26] Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т.2. М.: Наука, 1972. С.775-807.

[27] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472с.

[28] Радаев Ю.Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. N.6. С.69-75.

ON THE CANONICAL PRINCIPAL LINE INVARIANTS OF THE PLASTICITY-DAMAGE COUPLED EQUATIONS

Y. Radayev[4]

A general analysis of three-dimensional static and kinematic equations of the strain-damage coupled model for ductile deformation processes is presented in an attempt to find approaches for analytic study of the damage effect on the plastic flow. The damage is represented by a symmetric second-rank damage tensor, known from a number of our previous discussions devoted to description of anisotropic damage state. The modified by anisotropic damage effect Tresca yielding criterion, associated flow and damage rules are used to formulate the strain-damage coupled constitutive equations, thus allowing to take account of effect of anisotropic damage on the plastic flow and vice versa. The separate analysis for the loading paths going along the facets and edges the Tresca prism is given.

In the present study the elastic strains are assumed not significantly affect a damage state that, as it is shown, implies the principal axes of damage are being co-oriented while loading to those of the Cauchy stress tensor. The principal axes of stresses are chosen as a local frame for representing the static, kinematic and constitutive equations. It is expedient for stress and damage analysis, but requires much effort to convert the kinematic equations. The closed system of equations represented in the local principal frame needed for formulation of the strain-damage coupled model is obtained. The relations along the principal stress-damage lines are derived for the following discriminated cases: 1) three-dimensional elastic-plastic state of deformation and damage, and loading paths on the Tresca prism facet; 2) three-dimensional elastic-plastic state of deformation and damage, and loading paths going along the Tresca prism edge; 3) axially-symmetric state of elastic-plastic deformation and damage; 4) plane state of elastic-plastic deformation and damage. All the situations when these relations can be integrated along the stress-damage principal lines are then determined.

The analysis in the principal local frame is extremely effective for the paths going along the Tresca prism edges and for the plane state due to invariants (in the form of ratios involving principal damages, stresses and curvatures of the principal lines) along the principal stress-damage lines can be obtained. The invariants establish a balance of principal stresses, damages and the internal geometry parameters of the principal lines inside a damaged media. The principal line invariants provide also a new technique for the analysis of the coupled equations by canonical transformations of the plastic flow zone. A canonical transformation has an intrinsic invariant – the volume (or area in the two dimensions) of a spatial (or plane) element, which value is not affected by the transformation – thus being applicable and usable in many fields of mechanics.

The canonical transformation can be determined by its generating function that affords a new formulation of the strain-damage coupled problem. In the plane and axial symmetric case non-linear equations for generating functions of the canonical transformations are derived. Those are proved be the invariants of the Legendre (plane problem) and Ampere (axially-symmetric problem) transformations.

[4]Yuri Radayev, departament of continuum mechanics, Samara state university