

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В.И. Астафьев, А.Н. Крутов¹

В настоящей работе определяется напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения. Определяющие соотношения задаются в виде степенной зависимости. Для этого используется уравнение совместности в напряжениях, в которое вводится функция напряжений Эри, и формулируется двухточечная краевая задача. Получившаяся краевая задача решается с помощью метода пристрелки. Решение приводится для случаев плоского напряженного состояния (ПНС) и плоской деформации (ПД).

Введение

Пусть бесконечная пластина из нелинейно-упругого материала с трещиной длины $2a$, расположенной под углом α к оси x , растягивается на бесконечности напряжениями σ_∞ . Требуется определить напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины для плоского напряженного состояния и плоской деформации.

В данной задаче предполагается одноосное растяжение плоскости с трещиной, наклоненной под углом α к оси x . Задача об одноосном растяжении наклонной трещины статически эквивалентна задаче о совместном растяжении и сдвиге (рис. 1) (тип *I* – трещина нормального отрыва и тип *II* – трещина поперечного сдвига) горизонтальной трещины, т.е. трещины, ортогональной направлению растяжения и параллельной направлению сдвига.

1. Постановка задачи

Для удобства перейдем в полярную систему координат, связанную с вершиной трещины. Для этого в качестве координатных осей введем полярный радиус r и угол φ (рис. 1). В дальнейшем все уравнения будут записываться для полярной системы координат. Уравнения равновесия в полярной системе координат для плоской задачи имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (1)$$

¹ Астафьев Владимир Иванович, Крутов Алексей Николаевич, кафедра механики сплошных сред, Самарский государственный университет

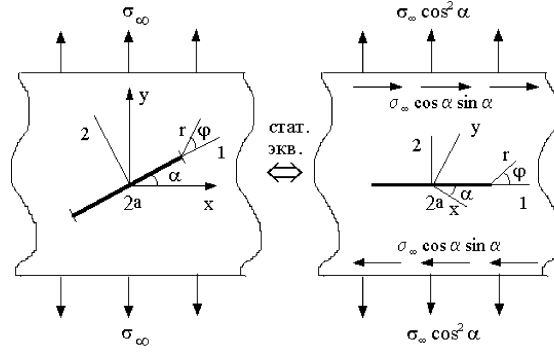


Рис. 1: Статически эквивалентные задачи

Соотношения Коши в полярной системе координат имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}; \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \quad (2)$$

Исключив из соотношений Коши (2) перемещения u_i , можно записать уравнение совместности деформаций [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3)$$

Определяющие соотношения для несжимаемого материала при степенном законе $\varepsilon = B\sigma^n$ имеют вид [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (4)$$

здесь $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений,

$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$ – интенсивность напряжений,

B – константа материала,

n – показатель нелинейности.

Тензор напряжений для несжимаемого материала в случае плоской задачи имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, \varphi) & \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) & 0 \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) & \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_{zz}(r, \varphi) = \begin{cases} 0 & (\text{ПНС}) \\ \frac{1}{2} (\sigma_{rr}(r, \varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi)) & (\text{ПД}) \end{cases}$$

Интенсивность напряжений в этом случае будет определяться как

$$\sigma_e = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + 3\sigma_{r\varphi}^2} & (\text{ПНС}) \\ \sqrt{\frac{3}{4} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 3\sigma_{r\varphi}^2} & (\text{ПД}) \end{cases}$$

Таким образом, согласно уравнению (4), компоненты тензора деформаций определяются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = B\sigma_e^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi} & \frac{3}{2}\sigma_{r\varphi} & 0 \\ \frac{3}{2}\sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \end{pmatrix}, \quad (\text{ПНС}) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{4}B\sigma_e^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} & 2\sigma_{r\varphi} & 0 \\ 2\sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{ПД}) \quad (6)$$

Введем выражения (5)-(6) в уравнение совместности деформаций (3) и перепишем это уравнение в напряжениях:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_{rr} \right) \sigma_e^{n-1} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\left(\sigma_{rr} - \frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi} \right) \sigma_e^{n-1} \right] - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\sigma_{rr} - \frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi} \right) \sigma_e^{n-1} \right] - \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_e^{n-1} \sigma_{r\varphi}) \right] = 0, \quad (\text{ПНС}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \sigma_e^{n-1}] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sigma_e^{n-1}] - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sigma_e^{n-1}] - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_e^{n-1} \sigma_{r\varphi}) \right] = 0. \quad (\text{ПД}) \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, задача в напряжениях для определяющих соотношений (4) будет состоять из уравнений равновесия (1) и условий совместности в напряжениях (7) (ПНС) или (8) (ПД).

2. Функция Эри

Для решения системы уравнений (1) и (7) или (1) и (8) часто используется функция напряжений (функция Эри) $\Phi(r, \varphi)$, определяемая следующим образом [1, 2]:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi}. \quad (9)$$

В этом случае напряжения будут удовлетворять уравнениям равновесия (1) тождественно. Подставляя выражения (9) в уравнение совместности (7) или (8), получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для функции Эри:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sigma_e^{n-1} \left(r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \right] - \\ & - \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right) \right) \right] = 0, \quad (\text{ПНС}) \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 \sigma_e = & \left(\Phi''_{\varphi\varphi} \left(\frac{2\Phi'_r}{r^3} + \frac{\Phi''_{\varphi\varphi}}{r^4} - \frac{\Phi''_{rr}}{r^2} \right) + \Phi'_r \left(\frac{\Phi'_r}{r^2} - \frac{\Phi''_{rr}}{r} \right) - \right. \\
 & \left. - 3\Phi''_{r\varphi} \left(\frac{2\Phi'_\varphi}{r^3} - \frac{\Phi''_{r\varphi}}{r^2} \right) + \Phi''_{rr}{}^2 + \frac{3\Phi'^2_\varphi}{r^4} \right)^{1/2}; \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sigma_e^{n-1} \left(r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \right] - \\
 & - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sigma_e^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right) \right) \right] = 0, \quad (\text{ПД})
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sigma_e = & \frac{1}{2} \left(\Phi''_{\varphi\varphi} \left(\frac{6\Phi'_r}{r^3} + \frac{3\Phi''_{\varphi\varphi}}{r^4} - \frac{6\Phi''_{rr}}{r^2} \right) + \Phi'_r \left(\frac{3\Phi'_r}{r^2} - \frac{6\Phi''_{rr}}{r} \right) - \right. \\
 & \left. - 12\Phi''_{r\varphi} \left(\frac{2\Phi'_\varphi}{r^3} - \frac{\Phi''_{r\varphi}}{r^2} \right) + 3\Phi''_{rr}{}^2 + \frac{12\Phi'^2_\varphi}{r^4} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

2.1. Асимптотическое представление при $r \rightarrow 0$

При нахождении напряженного состояния у вершины трещины в механике разрушения широко распространен асимптотический анализ решения при $r \rightarrow 0$ [2, 3]. Используя т.н. «принцип микроскопа» [3], можно показать, что главный член асимптотического разложения решения $\Phi(r, \varphi) = \Phi_0(r, \varphi) + \Phi_1(r, \varphi) + \dots$ при $r \rightarrow 0$ находится путем решения уравнения (10) или (11) в бесконечной плоскости с полубесконечным прямолинейным разрезом (рис. 2).

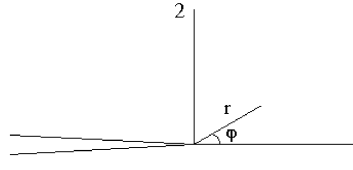


Рис. 2: Полубесконечная трещина

В полярной системе координат для полубесконечной трещины вблизи ее вершины функция Эри имеет следующую асимптотику:

$$\Phi_0(r, \varphi) = K_{HRR} r^\lambda f(\varphi). \tag{12}$$

Здесь K_{HRR} — параметр, определяющий интенсивность изменения функции у вершины трещины, которая определяется лишь при полном решении задачи для области,

изображенной на рис. 1. Такое представление для функции напряжений объясняется видом уравнений (10) или (11), которые для полубесконечной трещины допускают возможность разделения переменных при использовании полярной системы координат. С учетом представления (12) интенсивность напряжений σ_e запишется как

$$\sigma_e = K_{HRR} r^{\lambda-2} \hat{\sigma}_e(\varphi),$$

где $\hat{\sigma}_e(\varphi)$ – безразмерная функция полярного угла, имеющая следующий вид:

$$\hat{\sigma}_e(\varphi) = \sqrt{\lambda^2 f^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 3f'^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \lambda f f'' (3 - \lambda) + f''^2}, \quad (\text{ПНС}) \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_e(\varphi) = \sqrt{\lambda^2 f^2 (\lambda^2 - 4\lambda + 4) + 4f'^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2\lambda f f'' (2 - \lambda) + f''^2}. \quad (\text{ПД}) \quad (14)$$

Аналогичным образом можно представить и все компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K_{HRR} r^{\lambda-2} (\lambda f + f'') = K_{HRR} r^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{rr}(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K_{HRR} r^{\lambda-2} (\lambda(\lambda - 1)f) = K_{HRR} r^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} &= K_{HRR} r^{\lambda-2} (1 - \lambda)f' = K_{HRR} r^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{r\varphi}(\varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Значение параметра λ может быть найдено из условия независимости от контура интегрирования J-интеграла, имеющего следующий вид для определяющих соотношений (4), [2, 3]:

$$J = \oint \left(B \frac{n}{n+1} \sigma_e^{n+1} \cos \varphi - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds. \quad (16)$$

Для того чтобы интеграл (16) не зависел от контура при $r \rightarrow 0$, необходимо положить

$$\lambda = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Параметр K_{HRR} обычно представляется в виде $K_{HRR} = \left(\frac{J}{BI_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}$, где I_n – безразмерная константа, определяемая по формуле:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{n}{n+1} \hat{\sigma}_e^{n+1} \cos \varphi - \sin \varphi \left[\hat{\sigma}_{rr} \left(\hat{u}_{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{\sigma}_{r\varphi} \left(\hat{u}_r + \frac{\partial \hat{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \right] - \cos \varphi [n(\lambda - 2) + 1] (\hat{\sigma}_{rr} \hat{u}_r + \hat{\sigma}_{r\varphi} \hat{u}_{\varphi}) \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Уравнения совместности (10) - (11) можно переписать в рамках представления (12). Благодаря разделению переменных (12) и степенной зависимости $\Phi_0(r, \varphi)$ от r , эта переменная исчезнет из уравнений совместности. В результате из (10) или (11) получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $f(\varphi)$ [4, 6]:

$$\begin{aligned} &n(\lambda - 2) \hat{\sigma}_e^{n-1} \times \\ &\times \left[f'' \left(-\frac{1}{2} \lambda n + n - \frac{3}{2} \right) + \lambda f \left(n(\lambda^2 + 3) + \frac{1}{2} \lambda (-7n + 3) - 3 \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\hat{\sigma}_e^{n-1} \left(f'' + \lambda f \left(-\frac{1}{2} \lambda + \frac{3}{2} \right) \right) \right] - \\ &- 3((\lambda - 2)(n - 1) + \lambda - 1) \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{\sigma}_e^{n-1} f'(1 - \lambda)) = 0, \quad (\text{ПНС}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & n(\lambda - 2)\hat{\sigma}_e^{n-1} [f''(-\lambda n + 2n - 2) + \lambda f((\lambda - 2)(\lambda n - 2n + 2))] + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\hat{\sigma}_e^{n-1} (f'' - \lambda f(\lambda + 2))] - \\
 & - 4((\lambda - 2)(n - 1) + \lambda - 1) \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{\sigma}_e^{n-1} f'(1 - \lambda)) = 0. \quad (\text{ПД})
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, получено уравнение для определения функции $f(\varphi)$. Нетрудно видеть, что это нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. К этому уравнению необходимо добавить четыре граничных условия, чтобы определить функцию f с точностью до неопределенного множителя K_{HRR} .

2.2. Граничные условия

В случае плоской задачи линейной механики разрушения ($n=1$) напряженное состояние вблизи вершины трещины традиционно представляется в виде суперпозиции решений для двух стандартных видов трещин – трещин нормального отрыва (тип *I*) и трещин поперечного сдвига (тип *II*). На рис. 3 показаны эти два типа трещин.

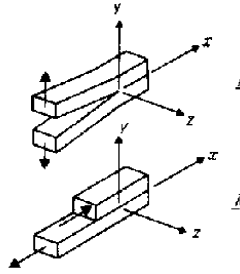


Рис. 3: Стандартные типы трещин I и II

Для обоих типов трещин должны выполняться условия свободных поверхностей на берегах трещин: $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$ при $\varphi = \pi$, откуда из (15) следует, что

$$f(\pi) = f'(\pi) = 0. \tag{19}$$

Кроме того, для этих типов трещин должны выполняться присущие им условия симметрии. Так, в случае трещины нормального отрыва функция u_φ – нечетная, а u_r – четная относительно оси x . В случае же трещины поперечного сдвига, наоборот, функция u_r – четная, а u_φ – нечетная. Отсюда получают дополнительные условия на функцию f :

$$f'(0) = f'''(0) = 0, \quad (\text{тип } I) \tag{20}$$

$$f(0) = f''(0) = 0. \quad (\text{тип } II) \tag{21}$$

Таким образом, для уравнений (17), (18) при граничных условиях (19), (20) или (19),(21) получаются двухточечные краевые задачи по определению функции Эри для трещин типа *I* и типа *II*. Данные задачи можно решить с помощью метода пристрелки, сводя краевые задачи с помощью двух дополнительных граничных условий при $\varphi = 0$ к задачам Коши, и решать последние с помощью метода Рунге-Кутты,

подбирая при этом значения дополнительных граничных условий таким образом, чтобы выполнялось граничное условие (19) при $\varphi = \pi$.

В частности, при решении краевой задачи (17), (19), (20) или (18), (19), (20) при $\varphi = 0$ можно задать следующие условия:

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'''(0) = 0, & (\text{условия симметрии}) \\ f(0) &= c_1, \\ f''(0) &= c_2. \end{aligned}$$

Учитывая, что краевая задача (17),(19),(20) фактически является задачей на собственные значения, а $\lambda = \frac{2n+1}{n+1}$ является собственным числом, соответствующим физическому смыслу исходной краевой задачи, константу c_1 можно определить из некоторого дополнительного условия нормировки на собственную функцию $f(\varphi)$. Традиционно в таких задачах условие нормировки ставится в виде $\max_{\varphi} \sigma_e(\varphi) = 1$, т.е. константа c_1 определяется из условия

$$\max_{\varphi} [\lambda^2 f^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 3f'^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \lambda f f''(3 - \lambda) + f''^2] = 1, \quad (\text{ПНС})$$

$$\max_{\varphi} \left[\frac{3}{4} (\lambda^2 f^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) + 4f'^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2\lambda f f''(2 - \lambda) + f''^2) \right] = 1. \quad (\text{ПД})$$

Число c_2 необходимо подобрать таким образом, чтобы при $\varphi = \pi$ обращалась в нуль функция f , т.е. выполнялось граничное условие $f(\pi) = 0$. Второе граничное условие $f'(\pi) = 0$ будет выполняться автоматически в силу условия симметрии задачи.

Для краевой задачи (17), (19), (21) или (18), (19), (21) при $\varphi = 0$ можно использовать следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} f(0) &= f''(0) = 0, & (\text{условия симметрии}) \\ f'(0) &= c_1, \\ f'''(0) &= c_2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом константа c_1 подбирается из условия нормировки, а константа c_2 — из условия равенства нулю производной функции f при $\varphi = \pi$, т.е. $f'(\pi) = 0$. В этой задаче граничное условие $f(\pi) = 0$ будет выполняться автоматически в силу выбранного условия симметрии.

В результате использования метода пристрелки можно получить численные решения задач для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига. Обозначим эти решения через Φ_I и Φ_{II} :

$$\Phi_I = K_I r^\lambda f_I(\varphi); \quad \Phi_{II} = K_{II} r^\lambda f_{II}(\varphi),$$

где

$K_I = K_{HRR}$ для трещины нормального отрыва (тип I),

$K_{II} = K_{HRR}$ для трещины поперечного сдвига (тип II).

В линейном случае ($n = 1$) напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины можно представить в виде суперпозиции I и II форм, т.е. записать, что

$$\Phi = [K_I f_I(\varphi) + K_{II} f_{II}(\varphi)] r^\lambda = K_I r^\lambda (f_I(\varphi) + \chi f_{II}(\varphi)) = K_I r^\lambda g(\varphi),$$

здесь $K_I = K \cos^2 \alpha$, $K_{II} = K \sin \alpha \cos \alpha$, $K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ [3], т.е.

$$\chi = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{K \sin \alpha \cos \alpha}{K \cos^2 \alpha} = \tan \alpha.$$

Однако в нелинейном случае ($n > 1$) метод суперпозиции уже не проходит и решение задачи для наклонной трещины необходимо проводить самостоятельно при каждом значении угла наклона трещины α . В этом случае для использования метода пристрелки необходимо задать некоторые условия в точке $\varphi = 0$:

$$f(0) = f_0; \quad f'(0) = f_1; \quad f''(0) = f_2; \quad f'''(0) = f_3$$

с тем, чтобы выполнялось условие нормировки $\max_{\varphi} \sigma_e(\varphi) = 1$ и одновременно удовлетворялись оба граничных условия (19). В силу статической эквивалентности задачи об одноосном растяжении наклонной трещины и задачи о совместном растяжении и сдвиге горизонтальной трещины (рис. 1) можно сделать предположение, что при $\varphi = 0$ напряжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}|_{\varphi=0} &= K_{HRR} r^{\lambda-2} c \sin \alpha \\ \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} &= K_{HRR} r^{\lambda-2} c \cos \alpha, \end{aligned}$$

откуда в силу соотношений (15) получается:

$$f(0) = \frac{c \cos \alpha}{\lambda(\lambda - 1)}; \quad f'(0) = \frac{c \sin \alpha}{1 - \lambda}; \quad f''(0) = c_1; \quad f'''(0) = c_2.$$

Пусть из условия нормировки $\max_{\varphi} \sigma_e(\varphi) = 1$ получится, что $f(0) = c_0$. Тогда граничные условия для наклонной трещины можно записать в виде

$$f(0) = c_0; \quad f'(0) = -\lambda c_0 \operatorname{tg} \alpha; \quad f''(0) = c_1; \quad f'''(0) = c_2. \quad (22)$$

Следовательно, с помощью метода пристрелки необходимо подобрать два параметра c_1 и c_2 таким образом, чтобы на правом конце отрезка $[0, \pi]$ выполнялись граничные условия (19).

3. Метод решения

Для решения задачи введем следующие обозначения: $f_1 = f(\pi)$, $f_2 = f'(\pi)$, при этом $f_1 = f_1(c_1, c_2)$, $f_2 = f_2(c_1, c_2)$. В результате получается, что для выполнения граничных условий (19) необходимо найти значения c_1 и c_2 из решения системы двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(c_1, c_2) = 0, \\ f_2(c_1, c_2) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Следует отметить, что функции $f_1(c_1, c_2)$ и $f_2(c_1, c_2)$ не заданы в аналитическом виде, а находятся численно путем решения задачи Коши при различных значениях c_1 и c_2 . Систему нелинейных уравнений (23) можно решать многими способами. Один из них - метод Ньютона, отличающийся своей простотой и достаточно быстрой сходимостью при удачном выборе начального приближения. Метод Ньютона - это итерационный метод решения системы нелинейных алгебраических уравнений $f_i(x_j) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Метод сводится на каждой итерации к решению следующей системы линейных уравнений [7]:

$$\sum_{j=1}^m (x_j - x_j^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} + f_i(x^k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где x_j^k – решение данной системы на k -й итерации, $k = 1, 2, \dots$. Как видно из общей формулы метода Ньютона, для его реализации необходимо знать производные функций $\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}$. Так как в нашем случае аналитический вид функций f_1 и f_2 неизвестен,

то производные $\frac{\partial f_1}{\partial c_1}, \frac{\partial f_1}{\partial c_2}, \frac{\partial f_2}{\partial c_1}, \frac{\partial f_2}{\partial c_2}$ можно вычислить только численно.

Перепишем общую формулу метода Ньютона для данной конкретной задачи (23) в виде

$$\begin{cases} f_{1,1}^k c_1^{k+1} + f_{1,2}^k c_2^{k+1} = f_{1,1}^k c_1^k + f_{1,2}^k c_2^k - f_1^k, \\ f_{2,1}^k c_1^{k+1} + f_{2,2}^k c_2^{k+1} = f_{2,1}^k c_1^k + f_{2,2}^k c_2^k - f_2^k, \end{cases}$$

здесь

c_i^k – значение параметра c_i на k -м шаге, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots$;

$f_{i,j}^k$ – значение производной от функции f_i по переменной c_j , вычисленное на k -м шаге, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots$.

Для численного вычисления производных можно использовать правую разностную схему:

$$\begin{cases} f_{1,1}^k = (f_1(c_1^k + \delta, c_2^k) - f_1(c_1^k, c_2^k)) / \delta, \\ f_{1,2}^k = (f_1(c_1^k, c_2^k + \delta) - f_1(c_1^k, c_2^k)) / \delta, \\ f_{2,1}^k = (f_2(c_1^k + \delta, c_2^k) - f_2(c_1^k, c_2^k)) / \delta, \\ f_{2,2}^k = (f_2(c_1^k, c_2^k + \delta) - f_2(c_1^k, c_2^k)) / \delta, \end{cases}$$

где δ – малое число.

Таким образом, для нахождения следующего приближения (c_1^{k+1}, c_2^{k+1}) параметров c_1 и c_2 необходимо будет трижды проинтегрировать задачу Коши методом Рунге-Кутты – для значений параметров (c_1^k, c_2^k) , $(c_1^k + \delta, c_2^k)$ и $(c_1^k, c_2^k + \delta)$.

Безусловно, можно использовать более точные разностные схемы для вычисления производных, например центральную, но в этом случае придется на каждой итерации запускать метод Рунге-Кутты уже 5 раз, что увеличит время вычислений почти вдвое, не сказавшись принципиально на конечном результате.

Таким образом, с помощью численной реализации метода Ньютона определяются значения параметров c_1 и c_2 , к которым сходится итерационный метод Ньютона, и по найденным значениям (c_1, c_2) находится численное решение для функции $f(\varphi)$.

Для полного анализа напряженного состояния у вершины наклонной трещины кроме компонент тензора напряжений σ_{ij} необходимо знать также величину интенсивности напряжений σ_e , максимального главного напряжения σ_{max} , а также среднего давления σ_0 . Величина интенсивности напряжений определяется по формулам (13)-(14). Главное напряжение σ_{max} – это максимальное из трех собственных значений тензора напряжений. Среднее давление σ_0 – первый инвариант тензора напряжений.

Предложенный алгоритм нахождения напряженного состояния вблизи вершины наклонной трещины был протестирован на корректность и точность путем сравнения с известными аналитическими или численными результатами. Так, в случае $n = 1$ существуют аналитические выражения для компонент тензора напряжений как для трещины нормального отрыва, так и для поперечного сдвига [8]. При $n > 1$ известен точный результат для случая ПД при $n = \infty$ и $\alpha = 0$, а в работе [2] приведены численные результаты для случая ПД при $n = 3$ и $\alpha = 0$. Тестирование показало, что для случая $n = 1$ величина относительной погрешности не превышает

10^{-6} . Поскольку при численном решении условие $n = \infty$ не может быть реализовано, вышеописанный алгоритм использовался для случая ПД при $n = 15$. Вычисления показали, что при $n = 15$ соответствующие компоненты тензора напряжений приближаются к своим предельным значениям при $n = \infty$. Результаты вычислений для случая ПД при $n = 3$ и $\alpha = 0$ также практически совпали с численными результатами [2].

4. Результаты вычислений

В данной части работы приведены результаты вычислений $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$, $\hat{\sigma}_e$, $\hat{\sigma}_{max}$ и $\hat{\sigma}_0$ для различных углов наклона трещины и различных значений показателя нелинейности n .

4.1. Результаты вычислений для ПНС, $n=3$ (рис. 4-7)

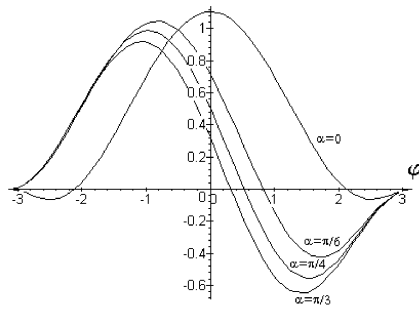


Рис. 4: Распределение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ для ПНС, $n=3$

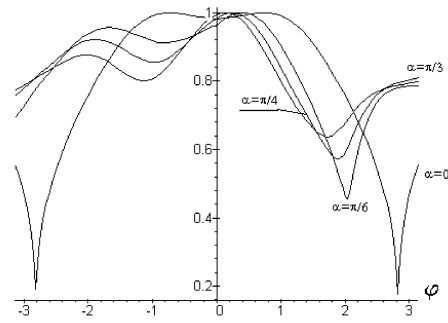


Рис. 5: Распределение $\hat{\sigma}_e$ для ПНС, $n=3$

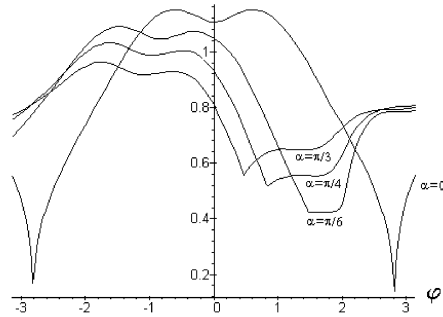


Рис. 6: Распределение $\hat{\sigma}_{max}$ для ПНС, $n=3$

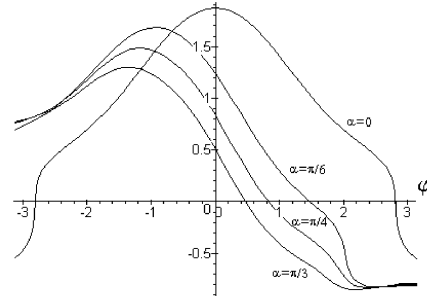
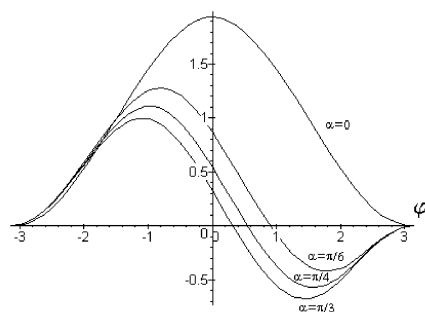
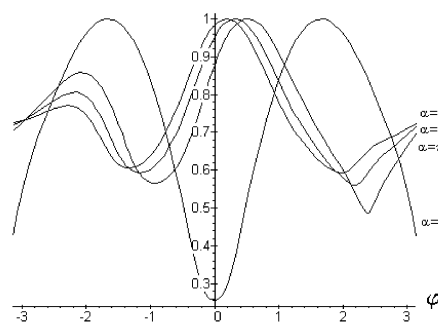
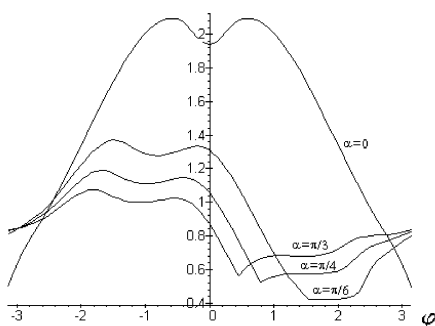
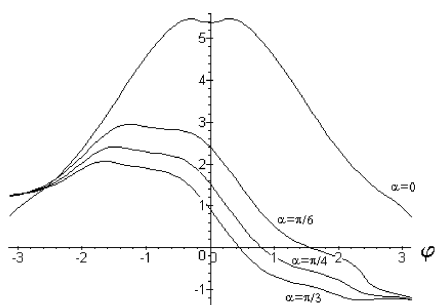
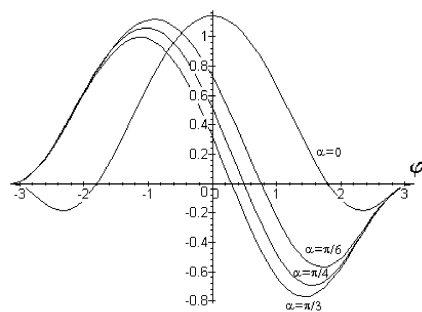
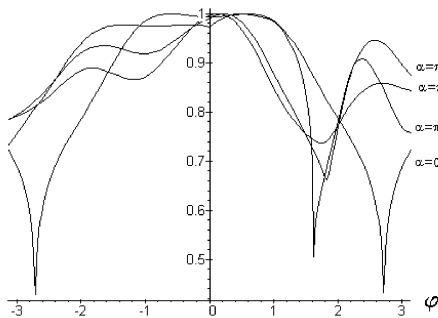


Рис. 7: Распределение $\hat{\sigma}_0$ для ПНС, $n=3$

4.2. Результаты вычислений для ПД, $n=3$ (рис. 8-11)

Рис. 8: Распределение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ для ПД, $n=3$ Рис. 9: Распределение $\hat{\sigma}_e$ для ПД, $n=3$ Рис. 10: Распределение $\hat{\sigma}_{max}$ для ПД, $n=3$ Рис. 11: Распределение $\hat{\sigma}_0$ для ПД, $n=3$

4.3. Результаты вычислений для ПНС, $n=7$ (рис. 12-15)

Рис. 12: Распределение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ для ПНС, $n=7$ Рис. 13: Распределение $\hat{\sigma}_e$ для ПНС, $n=7$

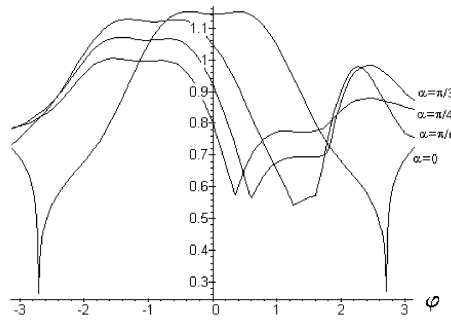


Рис. 14: Распределение $\hat{\sigma}_{max}$ для ПНС, $n=7$

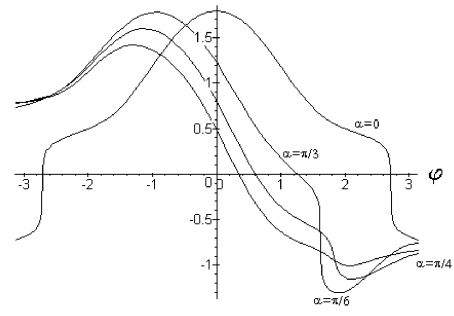


Рис. 15: Распределение $\hat{\sigma}_0$ для ПНС, $n=7$

4.4. Результаты вычислений для ПД, $n=7$ (рис. 16-19)

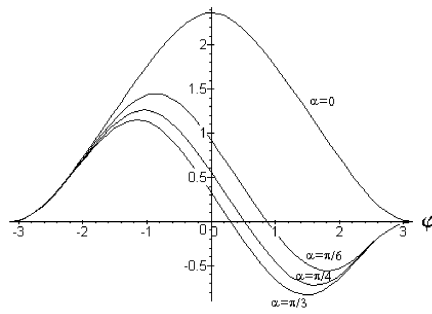


Рис. 16: Распределение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ для ПД, $n=7$

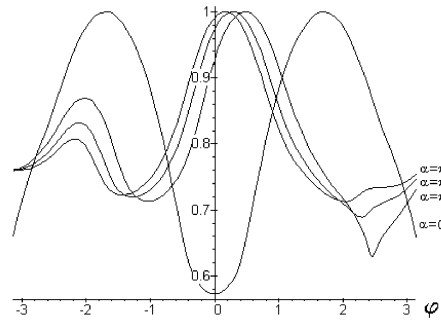


Рис. 17: Распределение $\hat{\sigma}_e$ для ПД, $n=7$

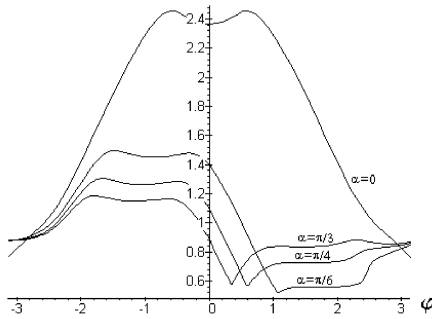


Рис. 18: Распределение $\hat{\sigma}_{max}$ для ПД, $n=7$

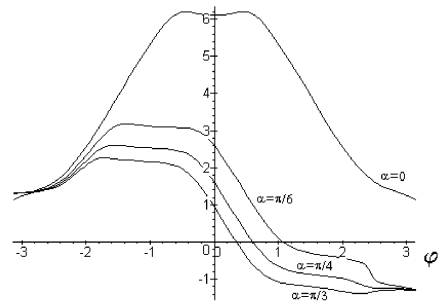


Рис. 19: Распределение $\hat{\sigma}_0$ для ПД, $n=7$

4.5. Результаты вычислений для ПНС, $n=13$ (рис. 20-23)

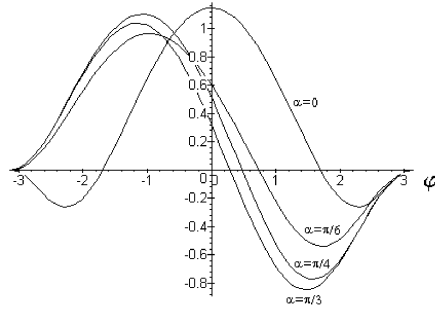


Рис. 20: Распределение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ для ПНС, $n=13$

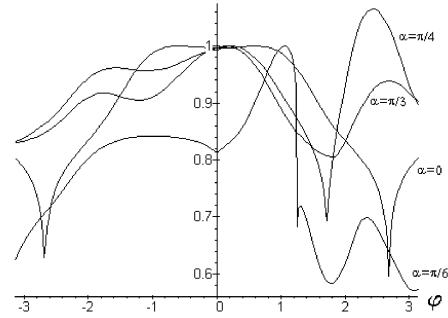


Рис. 21: Распределение $\hat{\sigma}_e$ для ПНС, $n=13$

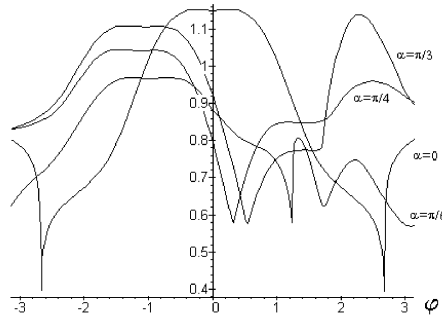


Рис. 22: Распределение $\hat{\sigma}_{max}$ для ПНС, $n=13$

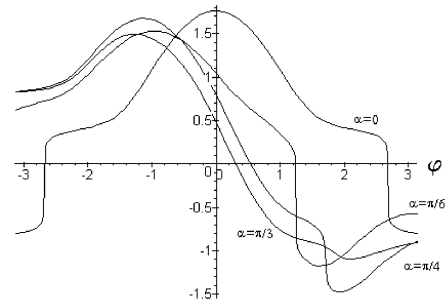


Рис. 23: Распределение $\hat{\sigma}_0$ для ПНС, $n=13$

5. Выводы

Из анализа распределения напряжений можно сделать следующие выводы. Для угла наклона трещины $\alpha = 0$ получается, что при ПНС и ПД максимальное растягивающее напряжение σ_{max} и интенсивность напряжений σ_e принимают максимальные значения не при $\varphi = 0$, а в некоторых симметричных относительно оси x точках. Для случая ПНС σ_0 принимает максимальное значение в точке $\varphi = 0$ при любых значениях n . В случае же ПД σ_0 принимает максимальное значение в точке $\varphi = 0$ только при $n = 1$. Эти факты необходимы при моделировании движения наклонной трещины. Кроме того, в качестве вывода следует отметить тот факт, что при больших значениях показателя n распределение напряжений принимает достаточно сложный характер.

Литература

- [1] Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. т. 1,2.
- [2] Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения. М.: Мир, 1993.
- [3] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
- [4] Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material tip//J. Mech. Phys. Solids, 1968. V. 16. P. 13-31.
- [5] Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material//J. Mech. Phys. Solids, 1968. V. 16. P. 32-48.
- [6] Wang Wen-Xin and Fan Tian-You. Analytic solution of mode-I crack in materials with nonlinear behaviour// Philosophical Magazine Letters, 1994. V. 69. No. 4. P. 215-222.
- [7] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [8] Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

STRESS DISTRIBUTION NEAR THE TOP OF INCLINED CRACK

V. Astafjev, A. Krutov²

In this paper the stress distribution near the top of inclined crack in a nonlinear mechanics of destruction is calculated. The determining relations are set as power dependence. For it the compatibility equation in stress is use, in this one the Airy stress function is introduced and two - point boundary value problem is formulated. The obtained boundary value problem is solved with the help of false position method. The solution is reduced for the plain stress and the plain strain.

²Vladimir Astafjev, Alexey Krutov, departament of mathematics, Samara state university