ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧЕЧНОГО НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

А.Н. Степанов[1]

Находится представление потенциала параметрической модели точечного направленного излучателя в однородном неограниченном пространстве в виде контурного интеграла. Такое представление необходимо для решения задач, связанных с определением поля рассматриваемого излучателя в ограниченных областях. Доказывается, что полученное представление является точным.

Для описания и изучения полей гидроакустических источников чаще всего используется модель точечного ненаправленного излучателя — монополя. Потенциал поля звукового давления ψ_0 монополя в неограниченном однородном пространстве имеет вид $\psi_0 = \exp(ikr)/r$, где r — расстояние от излучателя до точки наблюдения, $k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота излучателя, c — скорость звука в среде. Применение этой модели для описания и анализа гидроакустических полей подробно рассмотрено в [1]. В частности, для определения поля ненаправленного излучателя в волноводах с плоскими границами используется интегральное представление потенциала в виде

$$\psi_0(r) = \exp(ikr)/r = \frac{ik}{2} \int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(k\rho \sin\beta) e^{ik|z|\cos\beta} \sin\beta d\beta, \qquad (1)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка 0; $\rho = r\cos\theta$ и $z = r\sin\theta$ — соответственно горизонтальное расстояние до точки наблюдения и горизонт ее положения; r, θ, φ — сферическая система координат, связанная с излучателем. Это представление фактически является разложением потенциала в совокупность плоских волн, поведение которых на границах раздела хорошо изучено. Знание приведенного выше интегрального представления и законов преломления и отражения плоских волн на границах разделов позволяет решить достаточно много из возникающих на практике задач.

Однако у реальных излучателей в той или иной мере обнаруживается зависимость амплитуды и фазы сигнала от направления линии наблюдения на источник.

[1]Степанов Анатолий Николаевич, кафедра информатики и вычислительной математики, Самарский государственный университет

В [2] показано, что для более адекватного описания произвольных излучателей конечных размеров можно использовать параметрическую модель направленного точечного источника (мультипольную модель) с потенциалом ψ_1, имеющим в неограниченном однородном пространстве вид

$$\psi_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm} h_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \qquad (2)$$

где N — количество мультиполей, удерживаемых в модели; C_{nm} — комплексные мультипольные моменты, определяющие направленные свойства источника, $h_n^{(1)}(kr)$ — сферические функции Бесселя третьего рода порядка n; $P_n^{|m|}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Представляет интерес получение аналогичного (1) интегрального представления и для выражения (2), с помощью которого можно было бы решать задачи об определении полей, создаваемых направленными излучателями в различного рода ограниченных областях.

Интегральное представление для потециала монопольного излучателя $\psi_0(r) = exp(ikr)/r$ может быть получено путем применения двукратного интегрального преобразования Фурье к потенциалу источника, который рассматривается не во всем пространстве, а только на плоскости $z = 0$ [1]. Однако непосредственное применение преобразования Фурье к потенциалу направленного источника (2) при $z = 0$ невозможно, так как $\psi(r,\theta,\varphi)|_{z=0} \to \infty$ при $r \to 0$ как $1/r^n$ при $n > 1$, и, следовательно, интеграл Фурье от такой функции не существует. Поэтому предлагается воспользоваться тем, что для больших значений аргумента $kr \gg 1$ сферические функции Бесселя аппроксимируются функцией влияния ненаправленного точечного источника

$$h_n^{(1)}(kr) \cong (-i)^{n+1}\frac{\exp(ikr)}{kr}, \quad kr \gg 1. \qquad (3)$$

Пусть $\psi^*(r,\theta,\varphi)$ – потенциал (2), в котором сферические функции Бесселя заменены их аппроксимацией (3)

$$\psi^*(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm}(-i)^{n+1} P_n^{|m|}(\cos\theta)\frac{e^{i(kr+m\varphi)}}{kr}. \qquad (4)$$

Тогда при $z = r\cos\theta = 0$ получим

$$f(\rho,\varphi) = \psi^*(r,\theta,\varphi)|_{\theta=\pi/2} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C^*_{nm}\frac{e^{i(k\rho+m\varphi)}}{\rho}, \qquad (5)$$

где $\rho^2 = r^2\big|_{z=0} = x^2 + y^2$ — горизонтальное расстояние между источником и точкой наблюдения, $C^*_{nm} = C_{nm}(-i)^{n+1}P_n^{|m|}(0)/k$. К последней функции $f(x,y) = f(\rho,\varphi)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ можно применить двукратное интегральное преобразование Фурье

$$F(k_x,k_y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(k_x x+k_y y)}dxdy,$$

где $F(k_x,k_y)$ — Фурье-образ исходной функции, k_x и k_y — составляющие волнового вектора плоской волны. Найдем явное выражение для функции $F(k_x,k_y)$, подставляя

(5) в последнее соотношение

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^* \frac{e^{i(k\rho+m\varphi)}}{\rho} \right) e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dxdy.$$

Для вычисления этого интеграла введем замену переменных $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, где $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ и $k_x = q\cos\alpha$, $k_y = q\sin\alpha$, где $0 \le q < \infty$, $0 \le \alpha \le 2\pi$. Тогда

$$F(q, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{i(k\rho - q\rho\cos(\varphi-\alpha))} \left(\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^* e^{im\varphi} \right) d\rho d\varphi,$$

или

$$F(q, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^* \int\limits_0^{2\pi} e^{im\varphi} \left(\int\limits_0^{\infty} e^{i\rho(k - q\cos(\varphi-\alpha))}\, d\rho \right) d\varphi. \tag{6}$$

Внутренний интеграл в (6) сходится, если в соответствии с общепринятым соглашением считать, что в среде имеется хотя бы очень малое поглощение, то есть если считать, что волновое число k имеет положительную мнимую часть [1]. Тогда из (6) получим

$$F(q, \alpha) = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^* \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{im\varphi}\, d\varphi}{k - q\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Для вычисления интеграла по φ используем подстановку $u = \varphi - \alpha$

$$I_m = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{im\varphi}\, d\varphi}{k - q\cos(\varphi-\alpha)} = e^{im\alpha} \int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{e^{imu}}{k - q\cos u} du.$$

Учитывая, что функции $\cos x$ и e^{mx} при целом m имеют одинаковый период 2π, интегрирование можно проводить по любому отрезку длиной в период

$$I_m = e^{im\alpha} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{imu}}{k - q\cos u} du. \tag{7}$$

При вычислении интегралов в (7) могут встретиться особые случаи. Во-первых, при $q = 0$ прямое вычисление интеграла дает $I_m = 2\pi/k$ при $m = 0$ и $I_m = 0$ для $m \ge 1$. Во-вторых, при $q = k$ интегралы имеют особенность на пути интегрирования. Считая, что $q \ne 0$ и $q \ne k$, применим для вычисления (7) подстановку $z = e^{iu}$ и сведем их к контурным интегралам по единичной окружности

$$I_m = e^{im\alpha} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^m\, dz}{iz(k - q(z^2+1)/2z)} = \frac{2ie^{im\alpha}}{q} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^m\, dz}{z^2 - 2az + 1},$$

где $a = k/q$. Так как $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, ($k_z$ — z-составляющая волнового вектора), а $q^2 = k_x^2 + k_y^2$ и $q \ne k$, то $a > 1$. Представим знаменатель подынтегрального выражения в виде

$$z^2 - 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2),$$

где $z_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$. Причем по теореме Виета $|z_1||z_2| = 1$, а так как $a > 1$, то можно утверждать, что $|z_1| < 1$, а $|z_2| > 1$. Поэтому контурные интегралы сводятся к вычету в точке z_1, которая является единственным полюсом первого порядка, находящимся внутри контура интегрирования

$$I_m = 2\pi i \frac{2ie^{im\alpha}}{q} \lim_{z\to z_1} \frac{z^m}{z-z_2}.$$

После вычисления предела получим

$$I_m = \frac{2\pi e^{im\alpha}(a-\sqrt{a^2-1})^m}{q\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi e^{im\alpha}(k-\sqrt{k^2-q^2})^m}{q^m\sqrt{k^2-q^2}}. \tag{8}$$

Если в (8) перейти к пределу при $q\to 0$, то, так как пределы сомножителей существуют, будем иметь

$$\lim_{q\to 0} I_m = 2\pi e^{im\alpha} \lim_{q\to 0} \frac{1}{\sqrt{k^2-q^2}} \lim_{q\to 0} \frac{(k-\sqrt{k^2-q^2})^m}{q^m}, m \geq 1.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{q\to 0} \frac{k-\sqrt{k^2-q^2}}{q} = \lim_{q\to 0} \frac{q/\sqrt{k^2-q^2}}{1} = 0,$$

следовательно, $\lim\limits_{q\to 0} = 0$ для $m \geq 0$. Для $m = 0$ из (8) получается $\lim\limits_{q\to 0} = 2\pi/k$. Таким образом, (8) представляет собой значение (7) для любых $q \geq 0$, $q \neq k$. Перепишем (8), используя соотношение $k_z = \sqrt{k^2-q^2}$:

$$I_m = \frac{2\pi e^{im\alpha}}{k_z}\left(\frac{k-k_z}{k+k_z}\right)^{m/2}.$$

Итак, искомый Фурье-образ функции $f(x,y)$ имеет вид

$$F(k_x,k_y) = \frac{i}{2\pi k_z}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C^*_{nm}\left(\frac{k-k_z}{k+k_z}\right)^{m/2} e^{im\alpha}. \tag{9}$$

Сравнивая (9) с Фурье-образом потенциала монопольного источника $F_0(k_x,k_y) = i/(2\pi k_z)$, можно заметить, что они совпадают при $C^*_{00} \neq 0$ и всех остальных $C^*_{nm} = 0$. Теперь с помощью соотношения

$$f(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y)e^{k_x x + k_y y}\, dk_x dk_y$$

возвратимся в пространство оригиналов

$$f(x,y) = \frac{i}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=o}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C^*_{nm}\frac{(k-k_z)^{m/2}}{k_z(k+k_z)^{m/2}}e^{im\alpha}\right)e^{i(k_x x+k_y y)}\, dk_x dk_y$$

и, следуя далее изложенной в [1] методике, интегрирование по горизонтальным составляющим k_x и k_y волнового вектора k заменим интегрированием по углам α и β, которые характеризируют направление распространения плоских волн в пространстве. При этом $k_x = k\cos\alpha\sin\beta$, $k_y = k\sin\alpha\sin\beta$ и $k_z = k\cos\beta$, а интегрирование по α нужно выполнять в пределах от 0 до 2π. Вследствие того, что $k_z \to i\infty$ при $k_x \to \pm\infty$ или $k_y \to \pm\infty$, интегрирование по β должно выполняться вдоль контура G_0 комплексной плоскости, который представляет собой линию, идущую по действительной оси от 0 до $\pi/2$, а затем параллельно мнимой оси от $\pi/2$ до $\pi/2 - i\infty$. Одновременно с переходом к сферической системе координат изменим порядок суммирования и интегрирования

$$f(\rho,\varphi) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C^*_{nm}\int\limits_{G_0}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{k-k_z}{k+k_z}\right)^{m/2} e^{ik\rho\cos(\varphi-\alpha)\sin\beta+im\alpha}\sin\beta\, d\alpha d\beta.$$

Так как

$$\left(\frac{k-k_z}{k+k_z}\right)^{m/2} = \left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^{m/2} = \operatorname{tg}^m\frac{\beta}{2},$$

то, возвращаясь к прежним параметрам модели C_{nm}, получим выражение для потенциала точечного направленного источника в плоскости $z = 0$

$$f(\rho,\varphi)=\frac{i}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}(-i)^{n+1}\int\limits_{G_0}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\rho\cos(\varphi-\alpha)\sin\beta+im\alpha}P_n^{|m|}(0)\operatorname{tg}^m\frac{\beta}{2}\sin\beta\, d\alpha d\beta. \tag{10}$$

Переход к трехмерному пространству можно осуществить, продолжив решение с плоскости $z = 0$. Известно [1], что при таком продолжении в подынтегральном выражении появляется дополнительный сомножитель $\exp(ik_z|z|)$. Кроме того, заметим, что плоские волны, лежащие в плоскости $z = 0$, взвешены значениями $P_n^{|m|}(0)$, соответствующими углу $\pi/2$, при котором $z = 0$. Можно предположить, что в трехмерном пространстве плоские волны должны быть взвешены соответствующими их направлениям значениями функций $P_n^{|m|}(\cos\beta)$. Исходя из этого соображения, при продолжении разложения с плоскости $z = 0$ в пространство заменим $P_n^{|m|}(0)\operatorname{tg}^m\frac{\beta}{2}$ на $P_n^{|m|}(\cos\beta)$

$$\hat\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{i}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}(-i)^{n+1}\int\limits_{G_0}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\rho\cos(\varphi-\alpha)\sin\beta+ik\cos\beta|z|}\,\Phi(\alpha,\beta)\sin\beta\, d\alpha d\beta, \tag{11}$$

где $\Phi(\alpha,\beta) = e^{im\alpha}P_n^{|m|}(\cos\beta)$.

Если воспользоваться известным интегральным представлением для функций Бесселя

$$J_m(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\alpha+im\alpha}\, d\alpha,$$

то запись разложения (11) можно упростить, выполнив интегрирование по α. При этом внутренний интеграл в (11) оказывается равным

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\rho\sin\beta\cos(\alpha-\varphi)+im\alpha}\, d\alpha = 2\pi e^{i\pi m/2+im\varphi}J_m(k\rho\sin\beta),$$

и разложение потенциала направленного точечного источника в совокупность плоских волн принимает вид

$$\hat{\psi}(r,\theta,\varphi) = 2\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm}e^{im\varphi}\int\limits_{0}^{\pi/2-i\infty} J_m(u)e^{b|z|}P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\,d\beta, \tag{12}$$

где $2D_{nm} = C_{nm}e^{i\pi(m-n)/2}$, $u = k\rho\sin\beta$, $b = ik\cos\beta$. Последнее соотношение можно записать немного в другом виде, если контур интегрирования G_0 заменить на контур G, проходящий параллельно мнимой оси от $-\pi/2 + i\infty$ до точки $-\pi/2$, далее вдоль действительной оси от $-\pi/2$ до $\pi/2$, и затем опять параллельно мнимой оси от $\pi/2$ до $\pi/2 - i\infty$, и при этом функции Бесселя заменить функциями Ханкеля первого рода

$$\hat{\psi}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm}e^{im\varphi}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(u)e^{b|z|}P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\,d\beta. \tag{13}$$

Покажем, что этот интеграл сходится везде, кроме точки, в которой находится источник $\rho = 0$, $z = 0$. Для этого нужно выяснить поведение подынтегральной функции на бесконечно удаленных участках контура, то есть при $\beta \to -\pi/2 + i\infty$ и при $\beta \to \pi/2 - i\infty$. Известно, что функции Ханкеля на бесконечности стремятся к нулю, и что присоединенные полиномы Лежандра $P_n^m(z)$ растут не быстрее полиномов от z степени не выше n. Поэтому произведение $H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta)P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta$ будет интегрируемо по любому конечному участку контура, причем величина интеграла будет также конечной. А так как $b = ik\cos\beta \to -\infty$ на концах рассматриваемого контура, то наличие в подынтегральной функции монотонно стремящегося к нулю сомножителя $e^{b|z|} \to 0$ в силу признака Дирихле обеспечивает сходимость интегралов в (13) для любых $z \neq 0$. А сходимость этих интегралов при $z = 0$ обеспечивается функциями Ханкеля. В самом деле, перейдем в (13) к новой переменной интегрирования, выполнив замену $\xi = k\sin\beta$. Тогда $b = i\sqrt{k^2-\xi^2}$, $d\beta = id\xi/b$ и контур интегрирования заменяется интегрированием в бесконечных пределах по действительной оси

$$\hat{\psi}(r,\theta,\varphi) = \frac{i}{k}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm}e^{im\varphi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m^{(1)}(\rho\xi)e^{b|z|}P_n^{|m|}(b/ik)\xi/b\,d\xi.$$

Подставляя главный член известного асимптотического разложения функций Ханкеля

$$H_m^{(1)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}e^{i(u-\pi m/2-\pi/4)}\left(1 - i\frac{4m^2-1}{8u} + \frac{(4m^2-1)(4m^2-9)}{2!(8u)^2} + \ldots\right)$$

в записанное при $z = 0$ подынтегральное выражение, замечаем, что интегрируемым на любом конечном участке контура будет произведение $e^{i\rho\xi}P_n^{|m|}(b/ik)\xi/b$, а роль монотонно стремящейся к нулю при $\xi \to \pm\infty$ функции будет играть функция $\sqrt{2/(\pi\rho\xi)}$. В силу того же самого признака Дирихле интегралы сходятся и при $z = 0$, $\rho \neq 0$, что и требовалось показать.

Докажем теперь, что выражение (13) является точным интегральным представлением для потенциала точечного направленного излучателя (2), то есть докажем, что функция ψ совпадает с функцией $\hat{\psi}$. Вначале, применяя метод перевала, найдем асимптотическое представление выражения (13). В соответствии с общей теорией метода, при вычислении интегралов типа

$$\int\limits_C F(\beta) e^{\lambda f(\beta)}\, d\beta \tag{14}$$

для больших λ контур интегрирования C деформируется в перевальный путь C_1, который проходит через седловую точку функции $f(\beta)$ и удаляется от нее по линии быстрейшего убывания действительной части этой функции. Перевальная точка β_0 определяется из уравнения $df(\beta)/d\beta = 0$, а перевальный путь из соотношения $f(\beta) = f(\beta_0) - s^2$, где s — действительный параметр $0 \le s < \infty$. Приведем интегралы I_{nm} из (13)

$$I_{nm} = \int\limits_G H_m^{(1)}(u) e^{b|z|} P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\, d\beta$$

к виду (14), для чего воспользуемся приведенным выше асимптотическим разложением функций Ханкеля. Преобразуем выражение для I_{nm}, сохраняя главный член разложения и считая, что $z \ge 0$

$$I_{nm} = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{-i(\pi m/2 + \pi/4)} \int\limits_G e^{ik(\rho\sin\beta + z\cos\beta)} P_n^{|m|}(\cos\beta)\sqrt{\sin\beta}\, d\beta.$$

И далее после упрощения показателя экспоненты получаем нужное представление подынтегральной функции

$$I_{nm} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr\sin\theta}} e^{-i(\pi m/2 + \pi/4)} \int\limits_G e^{ikr\cos(\beta-\theta)} P_n^{|m|}(\cos\beta)\sqrt{\sin\beta}\, d\beta, \tag{15}$$

где $0 \le \theta \le \pi/2$.

Как и для монопольной модели [1] роль большого параметра в этом случае играет $\lambda = kr$, и точно так же, как для монополя, определяется перевальная точка β_0. Дифференцируя сомножитель $f(\beta) = i\cos(\beta - \theta)$ большого параметра kr в показателе экспоненты, получим

$$\partial\cos(\beta-\theta)/\partial\beta = -\sin(\beta-\theta) = 0.$$

Откуда находится седловая точка $\beta_0 = \theta$, и уравнение перевального пути в комплексной плоскости приобретет вид

$$i\cos(\beta - \theta) = i - s^2,$$

или, учитывая, что $\beta = \beta' + i\beta''$

$$\cos(\beta' - \theta)\operatorname{ch}\beta'' = 1.$$

Этот путь, образующий контур G_1, пересекает вещественную ось в точке $\beta_0 = \theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$ под углом $\pi/4$ и уходит слева от перевальной точки в точку $-\pi/2 + \theta + i\infty$, а справа — в $\pi/2 + \theta - i\infty$.

Рассмотрим возможность деформирования исходного контура G в перевальный контур G_1. При таком преобразовании необходимо проверить наличие у подынтегральной функции, играющей роль $F(\beta)$ из (14), особых точек в области между контурами G и G_1. В данном случае эту роль играет произведение $P_n^{|m|}(\cos\beta)\sqrt{\sin\beta}$.

Как известно, функции $P_n^{|m|}(\cos\beta)$ и $\sqrt{\sin\beta}$ не имеют полюсов во всей комплексной плоскости. Однако эти функции многозначны, и, следовательно, у них есть точки ветвления. Риманова поверхность функции $\varphi(z)=\sqrt{z}$ состоит их двух экземпляров комплексной плоскости, сшитых по берегам разреза, который проведен вдоль действительной оси от точки $x=0$ до $+\infty$. Как обычно, при этом будем считать, что на верхнем листе $\operatorname{Im} z\geq 0$, а на нижнем — $\operatorname{Im} z\leq 0$, и что при любом пересечении разреза совершается переход с одного листа римановой поверхности на другой. Уравнение обсуждаемой линии разреза для функции $\varphi(\beta)=\sqrt{\sin\beta}$ в плоскости $\beta'+i\beta''$ можно получить из соотношений

$$\operatorname{Im}\sin\beta=0,\quad 0\leq\operatorname{Re}\sin\beta<+\infty.$$

Откуда находим, что линия, идущая от точки $\beta'=0$ вдоль действительной оси до точки $\beta'=\pi/2$, а затем вдоль прямой $\beta'=\pi/2$ до $\pi/2+i\infty$, отображается на верхний берег разреза для $\sqrt{z}$, а линия, идущая от точки $\beta'=0$ вдоль действительной оси до точки $\beta'=\pi/2$, а затем вдоль прямой $\beta'=\pi/2$ до $\pi/2-i\infty$, отображается на нижний берег этого разреза. Считая, что начальная точка $-\pi/2+i\infty$ контура G находится на верхнем листе римановой поверхности функции $\sqrt{z}$, получим, что этот контур проходит по верхнему берегу разреза до точки $\pi/2$, затем, перересекая разрез, спускается на нижний лист и по нему уходит на бесконечность в точку $\pi/2-i\infty$. Согласно общей теории интегрирования аналитических функций, контур интегрирования можно произвольным образом деформировать, удерживая на одном и том же месте римановой поверхности начало и конец пути. Деформированный, перевальный путь G_1 пересекает разрез для функции $\sqrt{z}$ в некоторой точке $0\leq\theta<\pi/2$, а затем повторно пересекает его, но теперь уже ту часть разреза, которая идет параллельно мнимой оси вдоль прямой $\beta'=\pi/2$. Таким образом, перевальный путь, начинаясь как и исходный на верхнем листе римановой поверхности, после первого пересечения разреза спускается на нижний лист, а затем после второго — вновь возвращается на верхний и по нему идет до точки $\pi/2-i\infty$. Однако в этой точке можно спуститься на нижний лист и тем самым соединить конечные точки исходного и перевального путей. Если же $\theta=\pi/2$, то перевальный путь пересекает разрез только один раз, и поэтому можно утверждать, что для разрезов функции $\sqrt{\sin\beta}$ деформирование контура G в перевальный контур G_1 возможно для любых допустимых значений параметра θ. Совершенно аналогичными оказываются и рассуждения, связанные с положением исходного и перевального контуров на римановой поверхности присоединенных полиномов Лежандра. Функция $\varphi(z)=P_n^{|m|}(z)$ имеет бесконечнолистную риманову поверхность с разрезом вдоль действительной оси от точки $x=1$ до $-\infty$ и уравнение этой линии в плоскости $\beta'+i\beta''$ определяется из соотношений

$$\operatorname{Im}\cos\beta=0,\quad -\infty<\operatorname{Re}\cos\beta\leq 1.$$

Отсюда следует, что линия, которая идет вдоль действительной оси от 0 до π, а затем параллельно мнимой оси вдоль линии $\beta'=\pi$ до $\pi+i\infty$, отображается на верхний берег разреза функции $P_n^{|m|}(z)$, а линия, идущая вдоль действительной оси от 0 до π, а затем вдоль линии $\beta'=\pi$ до $\pi-i\infty$, отображается на нижний берег этого разреза. Оказывается, что эта линия разреза пересекается как исходным, так и перевальным контурами только один раз. Следовательно, интегралы по контурам G и G_1 будут равны.

Метод перевала, с помощью которого вычисляется значение рассматриваемого интеграла по контуру G_1, сводится к разложению в ряд по обратным степеням большого параметра λ. Согласно общей теории, этого метода вычисление интеграла в первом приближении: (14) приводит к следующим расчетным соотношениям

$$\int\limits_{C_1} F(\beta)e^{\lambda f(\beta)}\,d\beta = e^{\lambda f(\beta_0)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda f''(\beta_0)}}F(\beta_0),$$

где C_1 — перевальный путь, $f''(\beta)$ — вторая производная функции $f(\beta)$. В данном случае из (15) с учетом соотношений $f(\beta) = i\cos(\beta-\theta)$, $\beta_0 = \theta$, $f(\beta_0) = i$, $f''(\beta_0) = -i$ и $F(\beta_0) = P_n^{|m|}(\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}$ получим

$$I_{nm} = -2i\frac{e^{ikr-i\pi m/2}}{kr}P_n^{|m|}(\cos\theta).$$

Возвращаясь теперь к выражению (13), получим асимптотическое представление f^{**} интегрального представления потенциала при $kr \gg 1$

$$f^{**}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm}(-i)^{n+1}\frac{e^{ikr+im\varphi}}{kr}P_n^{|m|}(\cos\theta),$$

которое, очевидно, совпадает с асимптотическим представлением (4) $f^*(r,\theta,\varphi)$ самого потенциала, то есть $f^*(r,\theta,\varphi) = f^{**}(r,\theta,\varphi)$ для любых значений аргументов.

Теперь покажем, что при $z = 0$ выражение (13) переходит в (10). Вначале заметим, что при $z \to 0$ перевальная точка $\beta_0 \to \theta = \pi/2$, и, следовательно, основную роль в значении интеграла будут играть значения подынтегральной функции вблизи $\beta_0 = \pi/2$. Для присоединенных полиномов Лежандра известно соотношение, связывающее их с гипергеометрическими функциями $F(a,b;c;z)$ [3]

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{(z+1)^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)(z-1)^{\mu/2}}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;(1-z)/2),$$

где ν, μ — произвольные комплексные числа, $\mu \neq 2,3,4,\ldots$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Для $z = x$, $-1 \le x \le 1$ — вещественных и $\nu = n$, $\mu = -m$, $m \ge 2$, n и m — целых эта связь выглядит так

$$P_n^{-m}(x) = \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{m}{2}} F(-n,n+1;m+1;(1-x)/2).$$

Теперь воспользуемся известным соотношением между присоединенными полиномами Лежандра с положительными и отрицательными порядками

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}P_n^m(x).$$

Отсюда

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{m/2} F(-n,n+1;m+1;(1-x)/2),$$

или при $x = \cos\beta$

$$P_n^m(\cos\beta) = \frac{(-1)^m\Gamma(n+m+1)\,\mathrm{tg}^m\,\beta/2}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)}F(-n,n+1;m+1;(1-\cos\beta)/2).$$

Вблизи перевальной точки $\beta_0 = \pi/2$ значение $\cos\beta$ много меньше единицы, следовательно, пренебрегая $\cos\beta$ по сравнению с единицей, приведем последнее соотношение к виду

$$P_n^m(\cos\beta) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!m!} \operatorname{tg}^m \frac{\beta}{2} F(-n, n+1; m+1; 1/2).$$

Известно [3], что

$$F(-n, n+1; m+1; 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{2^m \Gamma((m-n)/2+1/2)\Gamma((m+n)/2+1)}. \tag{16}$$

Преобразуем сомножители знаменателя (14), считая $n-m$, а значит и $n+m$ — четными величинами. Для первого сомножителя получим

$$\Gamma((m-n)/2+1/2) = \Gamma(1/2-(n-m)/2) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)^{(n-m)/2}2^{(n-m)/2}}{(n-m-1)!!}.$$

Второй сомножитель преобразуем с помощью формулы удвоения. Так как

$$\Gamma(z) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)}{2^{2z}\Gamma(z+1/2)},$$

то

$$\Gamma((m+n)/2+1) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+m+2)}{2^{n+m+2}\Gamma((n+m+2)/2+1/2)} = \frac{(n+m)!!}{2^{(n+m)/2}}.$$

Таким образом

$$F(-n, n+1; m+1; 1/2) = (-1)^m \frac{(-1)^{(m-n)/2} m!(n-m-1)!!}{(n+m)!!}.$$

Поскольку по предположению $n-m$ — четное число, можно записать, что

$$(-1)^m(-1)^{(m-n)/2} = (-1)^m(-1)^{n-m}(-1)^{(m-n)/2} = (-1)^{(n+m)/2},$$

поэтому вблизи перевальной точки $\beta = \pi/2$ для таких n и m получим

$$P_n^m(\cos\beta) = \frac{(-1)^{(n+m)/2}(n+m-1)!!}{(n-m)!!} \operatorname{tg}^m \frac{\beta}{2}.$$

Если же число $n-m$ — нечетное, то тогда знаменатель в (16) обращается в бесконечность вследствие того, что

$$\Gamma((m-n)/2+1/2) = \Gamma(-k) \to \infty$$

для k — целого и положительного. Поэтому для $n-m$ — нечетных

$$F(-n, n+1; m+1; 1/2) = 0.$$

Но, с другой стороны, по определению

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu \cos(\pi(\nu-\mu)/2)\Gamma((\nu+\mu)/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\nu-\mu)/2+1)}$$

и для любых целых $\nu = n$ и $\mu = m$ получим

$$P_n^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(n+m)/2}(n+m-1)!!/(n-m)!!, & n+m = 2l \\ 0, & n+m = 2l+1, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для β, находящихся вблизи соответствующей $z = 0$ перевальной точки $\beta_0 = \pi/2$, для любых целых положительных n и m имеет место соотношение

$$P_n^m(\cos\beta) \approx P_n^m(0)\,\mathrm{tg}^m\,\frac{\beta}{2},$$

что и обосновывает выполненный ранее переход от (10) к (11) и (13).

Теперь, опираясь на проведенные методом перевала вычисления и выполненный при этом анализ, докажем совпадение асимптотических представлений (2) и (13) на плоскости $z = 0$. Потенциал (2) при $z = 0$ имеет вид

$$\psi(r,\theta,\varphi)\big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm} h_n^{(1)}(k\rho) P_n^{|m|}(0) e^{im\varphi},$$

а главный член асимтотического представления входящих в это выражение цилиндрических функции $h_n^{(1)}(k\rho)P_n^{|m|}(0)$ при значениях аргумента $k\rho \gg 1$ имеет вид

$$h_n^{(1)}(k\rho)P_n^{|m|}(0) \cong (-i)^{n+1}\frac{e^{ik\rho}}{k\rho}P_n^{|m|}(0).$$

Интегральное представление потенциала (13) на плоскости $z = 0$ имеет вид

$$\hat{\psi}(r,\theta,\varphi)\Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm} e^{im\varphi} \int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(u) P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\, d\beta.$$

Подынтегральные функции автоматически удовлетворяют уравнению Бесселя по определению функций Ханкеля, поэтому

$$\frac{1}{2}e^{i\pi(m-n)/2}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(u)P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\,d\beta$$

в области сходимости являются цилиндрическими функциями. Выполняя замену функций Ханкеля их асимптотическим представлением для значений $k\rho \gg 1$ и вычисляя полученные интегралы по методу перевала, по аналогии с вышеприведенными рассуждениями получим выражение для главного члена асимптотического разложения интегрального представления

$$\frac{1}{2}e^{i\pi(m-n)/2}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(u)P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\,d\beta \cong (-i)^{n+1}\frac{e^{ik\rho}}{k\rho}P_n^{|m|}(0).$$

Таким образом, вследствие совпадений главных членов асимптотических разложений цилиндрических функций можно утверждать, что и сами эти функции тождественно равны

$$h_n^{(1)}(k\rho)P_n^{|m|}(0) = \frac{1}{2}e^{i\pi(m-n)/2}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(u)P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta\,d\beta.$$

Откуда следует, что

$$\psi(r,\theta,\varphi)|_{z=0} = \hat{\psi}(r,\theta,\varphi)\Big|_{z=0}.$$

Функция $\psi(r,\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца по определению. Покажем теперь, что и функция $\hat{\psi}(r,\theta,\varphi)$ из (13) удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Известно, что этим свойством обладают интегралы вида

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(xk_x+yk_y+zk_z)} F(k_x,k_y,k_z)\, dk_x dk_y,$$

определяющие некоторую совокупность плоских волн. При этом весовая функция $F(k_x,k_y,k_z)$ достаточно произвольна, но должна обеспечивать сходимость интегралам. Вид функции определяет направленные свойства рассматриваемой совокупности плоских волн. Если в последнем интеграле перейти к сферической системе координат, то ядро интеграла $e^{i(xk_x+yk_y+zk_z)}$, обеспечивающее удовлетворение уравнению Гельмгольца, совпадет с ядром полученного разложения $e^{ik\rho\cos(\varphi-\alpha)\sin\beta+ikz\cos\beta}$, в то время как весовая функция $\Phi(\alpha,\beta)$ из (11) представит собой конкретный частный случай весовой функции $F(k_x,k_y,k_z)$, также записанной в сферической системе координат. Следовательно, (11) и полученное из него с помощью тождественных преобразований (13) удовлетворяют уравнению Гельмгольца по способу построения ядра интеграла. Итак, доказано, что две функции $\psi(r,\theta,\varphi)$ и $\hat{\psi}(r,\theta,\varphi)$, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца, совпадают на плоскости $z=0$, поэтому, вследствие единственности решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, эти функции равны. Отсюда вытекает, что (13) является точным интегральным представлением для (2).

Литература

[1] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343с.

[2] Быковцев Г.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах. /ДАН СССР,1985, Т.280. N1. С.57-59

[3] Справочник по специальным функциям. /Под ред. А. Абрамович, И.М. Стиган. М.: Наука, 1979. 830с.

INTEGRAL PRESENTATION OF POTENTIAL THE PARAMETRIC MODEL OF POINT DIRECTIONAL SOURCE

A Stepanov[2]

Inheres a presentation of potential the parametric model of point directional source in uniform unlimited space in the manner of contour integral. Such presentation it is required for deciding the tasks in accordance with the determination of field considering source in limited areas. Proved that received presentation is exact.

[2]Anatoly Stepanov, departament of mathematics, Samara state university