ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕМБРАНЫ

О.Ф. Меньших[1]

Исследовано одно точное решение уравнения Борна-Инфельда с цилиндрической и сферической симметриями. Это решение описывает периодические колебания релятивистской мембраны. В частном случае круглой пульсирующей релятивистской струны получены известные результаты Б.М. Барбашова и Н.А. Черникова [6]. Установлен предельный вид формул для периода колебаний релятивистской мембраны, если размерность сферически-симметричного пространства, в котором проходят колебания мембраны, стремится к бесконечности.

1. Введение

Исследование строения элементарных частиц, в частности адронов, привело к изучению динамики одномерно-пртяженного объекта, получившего название релятивистской струны [1-6]. Важность этой теории состоит в том, что теория взаимодействующих струн, или точнее суперструн [5], рассматривается в настоящее время как практически единственный кандидат на единое описание всех фундаментальных взаимодействий, в том числе и гравитационных. Релятивистские струны описываются системами квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка. В простейшем случае приходим к уравнению Борна–Инфельда [1,2]

$$\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-1\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1.1}$$

Это уравнение является одномерным аналогом нелинейной электродинамики Борна–Инфельда, обобщающей классическую электродинамику введением нелинейных эффектов и лоренцевой инвариантности [7]. Б.М.Барбашов и Н.А.Черников [1,2] показали, что уравнение (1.1) может быть получено как уравнение Эйлера для функционала

$$J\Big[U(x,t)\Big]=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}\,dxdt. \tag{1.2}$$

[1]Меньших Олег Федорович, кафедра высшей математики, Самарский государственный аэрокосмический университет

Функционал (1.2) выражает площадь двумерной поверхности, заданной в виде графика функции U=U(x,t), в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (du)^2.$$

В теории струн и суперструн получено много важных результатов. В некоторых случаях возможно построение общего решения и решение задачи Коши для сложных квазилинейных уравнений [1-6]. Физические объекты большей размерности, подобные релятивистским струнам, изучены в гораздо меньшей степени; они обычно называются релятивистскими мембранами [8]. Дело в том, что релятивистские мембраны описываются нелинейными уравнениями с функциями, зависящими от трех и большего количества аргументов, а подобные уравнения не допускают аналитического представления общих решений.

Представляет интерес обобщение уравнение (1.1) на случай больших размерностей .Это легко осуществить, если произвести обобщение функционала (1.2). Если считать, что поле Борна–Инфельда зависит от трех переменных, т.е. $U = U(x, y, t)$, то придем к функционалу

$$J\Big[U(x,y,t)\Big] = \iiint\limits_V \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}\,dxdydt. \qquad (1.3)$$

Если же считать, что $U = U(x, y, z, t)$, то получим еще более сложный функционал

$$J\left[U(x,y,z,t)\right] =$$

$$= \iiiint\limits_{V_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}\,dxdydzdt. \qquad (1.4)$$

Соответствующие многомерные уравнения Борна-Инфельда рассматривались в [2,9] и [10]. Простейшие уравнения будут получаться, если считать, что $U = U(r, t)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, или $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, что соответствует решениям с цилиндрической и со сферической симметриями.

Функционал, соответствующий указанным случаям, получается из (1.3) и (1.4) и имеет вид [11]

$$J\Big[u(r,t)\Big] = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}\, r^\nu dr dt. \qquad (1.5)$$

Соответствующее функционалу (1.5) уравнение будем называть уравнением Борна-Инфельда с цилиндрической и сферической симметриями, оно будет следующим [11]:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - 1\right]\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} =$$

$$= \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]. \qquad (1.6)$$

При $\nu = 0$, будем иметь уравнение (1.1); при $\nu = 1$ – уравнение с цилиндрической симетрией, при $\nu = 2$ – уравнение со сферической симметрией. Решения уравнения (1.6) будем называть релятивистскими мембранами. Если для уравнения Борна-Инфельда (1.1) возможно построение общего решения как в гиперболической [1], так и в эллиптических областях [9], то для уравнения (1.6) такое построение осуществить нельзя. Заметим,что параметр ν в (1.5) и (1.6) связан с числом пространственных переменных соотношением $\nu = n-1$, где n – количество пространственных переменных, из которых составляется $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots {x_n}^2}$. Можно строго показать, что если составить функционал для поля Борна-Инфельда $U = U(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ и затем перейти к сферическим переменным в n-мерном пространстве [12] и считать, что $U = U(r,t)$, то снова получим функционал (1.5) и уравнение (1.6). Поэтому уравнение (1.6) будем рассматривать как уравнение Борна–Инфельда со сферической симметрией в n-мерном пространстве. Заметим, что линейный аналог уравнения (1.6) совпадает с волновым уравнением с цилиндрической и сферической симметриями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Целью настоящей статьи является исследование одного частного решения уравнения (1.6), которое описывает периодический колебательный процесс.

2. Исследование одного точного решения уравнения (1.6)

Уравнение (1.6) допускает точное решение следующего вида :

$$U = \pm\sqrt{\omega^2(t) - r^2}, \tag{2.1}$$

где $\omega(t)$ – функция, подлежащая определению. Подставляя (2.1) в (1.6), получим, что уравнение (1.6) будет допускать решение (2.1) лишь в том случае, если $\omega(t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\omega\omega'' + \{1+\nu\}\{1-(\omega')^2\} = 0, \quad \omega' = \frac{d\omega}{dt}. \tag{2.2}$$

Если рассматривать плоскость u, r, а время t считать параметром, то из (2.1) следует уравнение окружности с переменным радиусом $\omega(t)$

$$u^2 + r^2 = \omega^2(t). \tag{2.3}$$

Таким образом, решение (2.1) уравнения (1.6) описывает колебания "настоящей" окружности (при $\nu = 0$), сферы (при $\nu = 1$) и гиперсферы ($\nu \geq 2$). Основным результатом данной статьи является доказательство следующей теоремы

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение (2.2) допускает решения, являющиеся периодическими по времени при любом значении параметра ν.*

Если задать для уравнения (2.2) начальные данные

$$\begin{aligned} &\omega\mid_{t=0} = a, \qquad && a \neq 0, \\ &\omega'\mid_{t=0} = b, \qquad && \mid b \mid < 1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

то период колебаний функции $\omega(t)$ определяется формулой

$$T(\nu) = \frac{2a}{(1-b^2)^{\frac{1}{2(1-\nu)}}}\int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^{2(1+\nu)}}}. \tag{2.5}$$

Таким образом, решение (2.1) описывает пульсирующие колебания окружности ($\nu = 0$), сферы ($\nu = 1$), гиперсферы ($\nu \geq 2$), причем, как будет показано, в определенные моменты времени происходит явление схлопывания, радиус окружности обращается в нуль, что не может происходить, например при колебании цилиндрической мембраны, описываемой уравнением (1.3).

Приступим к доказательству теоремы:

Стандартной заменой $\omega'(t) = P(\omega)$ можно получить первый интеграл уравнения (2.2), или закон сохранения энергии

$$p^2 + C_1 \omega^{e(1+\nu)} = 1, \tag{2.6}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Подставляя начальные данные (2.4) в (2.6), получим

$$C_1 = \frac{1-b^2}{a^{2(1+\nu)}}. \tag{2.7}$$

Если $\mid b \mid < 1$, то $C_1 > 0$ и $\frac{d\omega}{dt} < 1$, и кривые (2.6) на фазовой плоскости будут замкнутыми с двумя плоскостями симметрии. При $\nu = 0$ это будут эллипсы, при $\nu \geq 1$ получим овалы [13].

Случай $\mid b \mid \geq 1$ здесь рассматривать не будем, в этих случаях кривые (2.6) не будут замкнутыми . Подставляя (2.7) в (2.6) нетрудно найти максимальное значение функции ω

$$\omega = \omega_1 = \frac{a}{(1-b^2)^{\frac{1}{2(1+\nu)}}}. \tag{2.8}$$

В точках $\omega = \pm\omega_1, p = 0$, а максимальное значение p при $\omega = 0$ будет $p = \pm 1$. В этих точках радиус окружности (2.3) будет достигать световых скоростей [6]. Имея первый интеграл уравнения (2.2), можно легко построить и его общее решение. Разрешая (2.6) относительно p, с учетом (2.7) и (2.8) получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm\varphi(\omega), \tag{2.9}$$

где введено обозначение

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^{2(1+\nu)}}}. \tag{2.10}$$

Интегрируя (2.9), можно получить

$$t = \pm \int \varphi(\lambda) d\lambda + C_2, \tag{2.11}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Необходимо учесть, что если на фазовой плоскости $p < 0$, то в (2.11) необходимо взять знак минус.

Замечание 1. Частное решение (2.1) можно получить, используя групповые свойства уравнения (1.6) или соответствующего многомерного уравнения Борна-Инфельда [10].

3. Определение периода колебаний функции $\omega(t)$

Как уже отмечалось, будем считать, что $\omega(t)$ является радиусом окружности (2.3), поэтому необходимо считать, что $\omega(t) \geq 0$, и на фазовой плоскости ω, p необходимо рассматривать только неотрицательные значения ω.

Рассмотрим более детально фазовую плоскость ω, p .Пусть для определенности $a > 0,\ 0 < b < 1$. Начальное положение на траектории есть точка $M_0(a, b)$, поскольку $p\mid_{t=0} > 0$, то $\dfrac{d\omega}{dt} > 0$, радиус окружности (2.3) будет увеличиваться. Из (2.11) при знаке плюс получим неявную зависимость $\omega = \omega(t)$:

$$t = \int\limits_a^\omega \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_1})^2}}. \tag{3.1}$$

Максимальное значение $\omega = \omega_1$ будет достигаться при

$$t = t_1 = \int\limits_a^{\omega_1} \varphi(\lambda) d\lambda. \tag{3.2}$$

Здесь в дальнейшем будем использовать обозначение (2.10). На фазовой плоскости ω, p момент $t = t_1$ обозначим точкой $M_1(\omega_1, 0)$.

Далее движение на фазовой плоскости будет происходить при $p < 0$, т.е.радиус $\omega(t)$ будет убывать. Снова используя (2.11) при знаке минус, получим

$$t = \int\limits_a^\omega \varphi(\lambda) d\lambda + 2\int\limits_\omega^{\omega_1} \varphi(\lambda) d\lambda. \tag{3.3}$$

В точке $M_2(0, -1)$ $\omega(t) = 0$, а скорость движения будет достигать световой скорости. Это произойдет в момент времени

$$t_2 = 2\int\limits_0^{\omega_1} \varphi(\lambda) d\lambda - \int\limits_0^a \varphi(\lambda) d\lambda. \tag{3.4}$$

На фазовой плоскости произойдет скачок из точки $M_2(0, -1)$ в точку $M_3(0, 1)$. В точке M_3 начнется увеличение радиуса $\omega(t)$. Здесь функция $\omega(t)$, будучи непрерывной, будет иметь непрерывную производную. Дальнейшая эволюция $\omega(t)$ будет описываться уравнением

$$t = 2\int\limits_0^{\omega_1} \varphi(\lambda) d\lambda - \int\limits_0^a \varphi(\lambda) d\lambda + \int\limits_0^\omega \varphi(\lambda) d\lambda. \tag{3.5}$$

В момент времени $t = t_4$, что на фазовой плоскости совпадает с начальной точкой M_0, процесс колебаний придет в начальное положение. Наконец, при $\omega = a$ из (3.5) получим период колебаний мембраны

$$T = 2\int\limits_0^{\omega_1} \varphi(\lambda) d\lambda. \tag{3.6}$$

Произведя в интеграле (3.6) замену $s = \frac{\omega}{\omega_1}$, с учетом (2.10) придем к формуле (2.5)

Таким образом, теорема 1 доказана. Интеграл (2.5) сходится при любом целом ν.

Найдем предельное значение $T(\nu)$ при $\nu \mapsto \infty$. Как нетрудно проверить, функции

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{(1-b^2)^{\frac{1}{2(1+\nu)}}}, \mid b \mid < 1,$$

$$\Phi_2(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1-s^{2(1+\nu)}}}, \qquad 0 \le s \le 1$$

с увеличением ν монотонно убывают. С учетом этого нетрудно вычислить

$$\lim_{\nu \to \infty} T(\nu) = 2a.$$

Значение интеграла в правой части (2.5) выражается через эллиптические и гиперэллиптические функции [14]. Например, при $\nu = 1$, используя формулу [15]

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big]^2,$$

найдем

$$T(\nu = 1) = 2.622 \frac{a}{\sqrt[4]{(1-b^2)}}. \tag{3.7}$$

При $\nu = 0$ возникающие колебания будут гармоническими

$$T(\nu = 0) = \frac{\pi a}{\sqrt{1-b^2}}. \tag{3.8}$$

Пульсирующие колебания релятивистской струны, имеющей в начальный момент форму окружности, изучались в [6]. Прослеживается аналогия полученного решения с развитием во времени Вселенной в известной модели А.А.Фридмана [16]. Решение (2.1) было получено другим способом в [8], но без анализа колебательного процесса.

4. Заключительное замечание

Некоторые вопросы, затронутые в данной статье, требуют, по мнению автора, дальнейшего изучения. Возникает вопрос: возможно ли уравнение (2.2) привести к линейному уравнению с помощью факторизации или другим методом [17]. Интересным кажется вопрос о смысле функционала

$$J[\omega(t)] = \int_\varphi \omega^{\nu+1}\sqrt{1-(\omega')^2}dt,$$

который соответствует полученному в работе уравнению (2.2) в связи с иными постановками задач для уравнения (2.2). Наконец, отметим, что возможна и другая интерпретация $\omega(t)$ [18] в связи с колебаниями полусферы при $\nu = 1$.

Выражаю сердечную благодарность Б.М. Барбашову за обсуждение данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 96-01-01997).

Литература

[1] Барбашов Б.М., Черников Н.А. //ЖЭТФ, 1966, Т.50, N5, С.1296-1308.

[2] Барбашов Б.М., Черников Н.А. // ЖЭТФ, Т.51, N 2(8), С. 658-668.

[3] Нестеренко В.В. Релятивистская струна и нелинейные полевые модели: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2-88-268. ОИЯИ, Дубна, 1988.

[4] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.

[5] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т.1. М.: Мир, 1990.

[6] Барбашов Б.М., Черников Н.А. Классическая динамика релятивистской струны. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1974, Р2-7852.

[7] Born M., Infeld L., //Proc. Roy. Soc. V. A 144. P. 425-451.

[8] Шавохина Н.С. Сообщения ОИЯИ, Дубна, 1983, Р2-89-183.

[9] Меньших О.Ф.// Диффер. уравн. 1986, Т. 22. N 8. С. 1410-1416.

[10] Меньших О.Ф., Тимошин М.И. Групповая классификация уравнения Борна-Инфельда с тремя независимыми переменными и некоторые его частные решения. Деп. в ВИНИТИ 9 сентября 1998, N 2747-В98.

[11] Меньших О.Ф. О нелокальной задаче Коши для уравнения Борна–Инфельда с цилиндрической и сферической симметрией. Деп. в ВИНИТИ 14 сентября 1990, N 5584-В.90. Деп. в ВИНИТИ, 1990.

[12] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 2. М.: Наука, 1973. С.87.

[13] Математическая энциклопедия. Т.3 / Под ред. акад. С.М. Никольского. М.: Сов. Энциклопедия, 1982. С.1151.

[14] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.2. М.: Физматгиз, 1963, С.515.

[15] Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962 (С.276, формула (15)).

[16] Фридман А.А. . О кривизне пространства. Избр. труды, М.: Наука, 1966, С. 229-238.

[17] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. //Вестник Самарского государственного университета. Специальный выпуск. 1996. С.6-16.

[18] Меньших О.Ф. О периодических колебаниях простейшей релятивистской мембраны. // Современный групповой анализ и задачи математического моделирования. Труды 11 Российского Коллоквиума. Самара,июнь 1993. Самар. гос. ун-т, 1993. С. 93-94.

PERIODIC OSCILLATIONS OF THE SIMPLEST RELATIVISTIC MEMBRANE

O. Menshikh[2]

An exact spherically symmetrical solution of the Born–Infeld equation in case of n–space variables has been obtained. This solution describes periodic oscillations of the relativistic membrane. If $n = 2$ (cylindrical symmetry) this solution may be interpreted as pulsating oscillations of sphere. A formula determining a period of membrane oscillations for all values of n.

[2] Oleg Menshikh, departament of mathematics, Samara state aerospace university