

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИПШИЦЕВОГО СЕЛЕКТОРА

И.Х. Зайнуллин¹

Получены достаточные условия на компактно значные выпуклые многозначные отображения, при которых существует липшицевый селектор этого отображения. Полученные результаты могут быть использованы в теоремах об устойчивости решений дифференциальных включений.

1. Постановка задачи

Пусть $K(R^m)$, $Kv(R^m)$ — соответственно множество всех непустых компактных и компактных выпуклых подмножеств евклидова пространства R^m , D — компакт из R^k . Рассмотрим отображение $F : D \rightarrow K(R^m)$ и соответствующее ему отображение F_0

$$F_0(x) = \left\{ f \in F(x) : \langle f, n(x) \rangle \leq 0 \right\}, \quad (1)$$

где n — заданное поле нормалей (рис. 1), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в R^m .

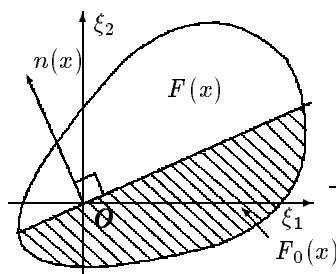


Рис. 1

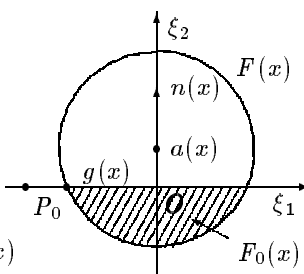


Рис. 2

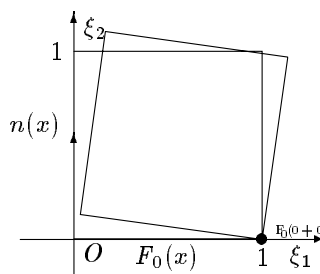


Рис. 3

Ставится следующая задача: сформулировать достаточные условия на отображение F , которые гарантируют, что соответствующее отображение F_0 имеет липшицевый селектор. Такая постановка задачи связана с исследованиями на устойчивость решений дифференциальных включений в [4].

¹Зайнуллин Ильдар Хамисович, кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет

2. Основные определения, примеры

Введем в пространстве $K(R^m)$ хаусдорфово расстояние между множествами $B, C \in K(R^m)$ по формуле: $\alpha(B, C) = \min_{r \geq 0} \{B \subset C + U(0, r); C \subset B + U(0, r)\}$, где $U(a, r)$ — замкнутый шар с центром в точке $a = (a_i)_{i=1}^m$ радиуса r .

Как обычно, будем говорить, что многозначное отображение F удовлетворяет условию Липшица в D с общей постоянной $\ell > 0$ (обозн. $F \in \text{Lip}(D, \ell, m)$), если для любых значений $x, y \in D$ выполняется неравенство: $\alpha(F(x), F(y)) \leq \ell \|x - y\|$.

Функцию $f : D \rightarrow R^m$ будем называть селектором отображения $F : D \rightarrow K(R^m)$, если для всех $x \in D$ выполняется условие $f(x) \in F(x)$.

Для того чтобы в полной мере представить проблему, рассмотрим несколько примеров. Ниже $e_1, \dots, e_m$ — ортонормированный базис в R^m .

Пример 1 (отображение F_0 не является липшицевым). Пусть $F : D \rightarrow Kv(R^2)$, $D = [0, +\infty)$, $F(x) = U(a(x), r(x))$, $a(x) = (0; 1 - x)$, $r(x) = 1 + x$, $n \equiv e_2$ (рис. 2). Отображение F удовлетворяет условию Липшица в D (см. лемму 1). Покажем, что отображение F_0 этому условию не удовлетворяет. Возьмем $x \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — мало, тогда множество $F_0(x)$ содержится в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$; положим $y = 0$, тогда $F_0(y)$ совпадает с точкой $(0, 0)$. Из определения хаусдорфова расстояния для этих множеств получаем: $\alpha(F_0(x), F_0(y)) = (\sqrt{2}/\sqrt{x}) |x - y|$. Функция $\sqrt{2}/\sqrt{x}$ не ограничена в D , следовательно, отображение F_0 не удовлетворяет условию Липшица в D с общей постоянной.

Пример 2. Рассмотрим единичный квадрат в R^2 , который катится по оси $O\xi_1$ без скольжения (рис. 3), $D = [0, +\infty)$, $n \equiv e_2$, $x \in D$ — угол поворота квадрата. Тогда $F_0(0)$ — отрезок $[0, 1]$ на оси $O\xi_1$, $F_0(0 + 0) = \{1\}$ — точка на $O\xi_1$, $\alpha(F_0(0), F_0(0)) = 0$, $\alpha(F_0(0), F_0(0 + 0)) = 1$. Поэтому отображение F_0 не имеет непрерывных селекторов.

Эти примеры показывают, что известные теоремы (см. напр., [2, с.207], [3, с.16 - 17]) не дают ответа на вопрос о выборе липшицевого селектора.

3. Теорема

В этом пункте сформулирована теорема, которая устанавливает существование липшицевого селектора f в F_0 . Введем обозначения: $I_1(x) = \int_{F_0(x)} \xi d\xi$, $I_2(x) = \int_{F_0(x)} d\xi$, S — единичная сфера с центром в нуле. Как обычно, будем называть барицентром множества $F_0(x)$ точку $f(x) = I_1(x)/I_2(x)$.

Теорема 1 (основной результат). Пусть:

- 1) $F(x) = U(a(x), r(x))$, $a : D \rightarrow R^m$, $r : D \rightarrow R_+$, $r(x) \leq C_1$, $\|a(x)\| \leq C_2$, $C_1, C_2 > 0$ — постоянные величины;
- 2) отображение F_0 , $F_0(x) \neq \emptyset$, определяется соотношением (1), где поле нормалей $n : D \rightarrow S$ задано;
- 3) $F \in \text{Lip}(D, \ell, m)$, $n \in \text{Lip}(D, h, m)$.

Тогда барицентр $f(x)$ множества $F_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой общей для всего компакта D постоянной.

Из теоремы 1 непосредственно следует следующая теорема, где отображение G_0 определяется равенством (1) с заменой в последнем F на G .

Теорема 2. Пусть дано отображение $G : D \rightarrow K(R^m)$, для которого существует отображение $F : D \rightarrow K(R^m)$, $F(x) \subset G(x) \forall x \in D$, удовлетворяющее всем условиям теоремы 1. Тогда в G_0 существует липшицевый селектор.

Примеры, которые приведены выше, показывают, что отказ от условия $F(x) \subset G(x) \forall x \in D$ приводит к неверному заключению.

4. Вспомогательные леммы

Лемма 1. Пусть $F : D \rightarrow Kv(R^m)$, $F(x) = U(a(x), r(x))$. Тогда, если $F \in \text{Lip}(D, \ell, m)$, то $a \in \text{Lip}(D, \ell, m)$ и $r \in \text{Lip}(D, \ell, 1)$. Наоборот, если $a \in \text{Lip}(D, \ell, m)$ и $r \in \text{Lip}(D, \ell, 1)$, то $F \in \text{Lip}(D, 2\ell, m)$.

Доказательство. Так как $F(x)$ является выпуклым множеством, то справедлива следующая формула [1, с.35]:

$$\alpha(F(x), F(y)) = \max_{\psi \in S} |c(F(x), \psi) - c(F(y), \psi)|. \quad (2)$$

Опорная функция $c(F(x), \psi)$ шара $F(x)$ в направлении $\psi \in R^m$ равна $\langle a(x), \psi \rangle + r(x) \|\psi\|$, отсюда

$$|c(F(x), \psi) - c(F(y), \psi)| = |\langle a(x) - a(y), \psi \rangle + (r(x) - r(y)) \|\psi\||. \quad (3)$$

Из равенств (2), (3) получим $\alpha(F(x), F(y)) = \|a(x) - a(y)\| + |r(x) - r(y)|$. Из последнего соотношения следует утверждение леммы 1. **Лемма 1 доказана.**

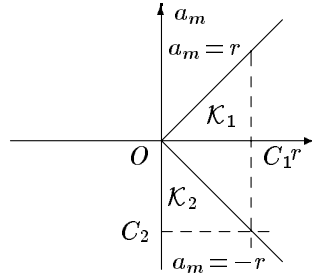


Рис. 4

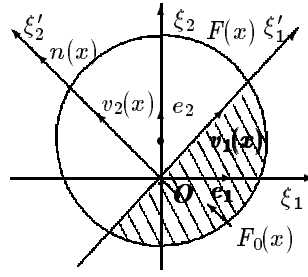


Рис. 5

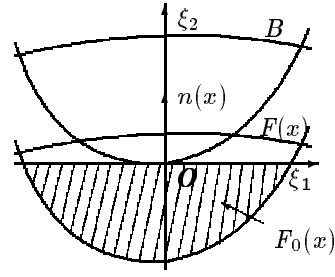


Рис. 6

Лемма 2. Пусть $n \in \text{Lip}(D, h, m)$. Тогда в R^m существует ортонормированный базис $v_1(x), \dots, v_m(x)$ и постоянные $b_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $v_i \in \text{Lip}(D, b_i, m)$, $v_m \equiv n$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. Пусть $s_i(x) = (s_{ij}(x))_{i=1}^m$, $i = 1, \dots, m$ — ортонормированный базис в R^m , при этом $s_m \equiv n$ (рис. 5). Тогда $s_m \in \text{Lip}(D, h, m)$ и

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m s_{ik}(x) \cdot s_{jk}(x) = 0, & i \neq j, & i, j = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^m [s_{ik}(x)]^2 - 1 = 0, & i = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (4)$$

При $m = 2$ векторы s_1, s_2 находятся единственным образом. Очевидно, в этом случае $s_i \in \text{Lip}(D, b_i, m)$, $b_i = h$, $i = 1, 2$. Если $m > 2$, то система уравнений (4) имеет бесконечное число решений. Выберем одно из решений системы (4) $t_{ij} = t_{ij}(x_0)$, $i, j = 1, \dots, m$, в произвольной точке $x = x_0$. Без ограничения общности можно считать, что в матрице $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m$, все главные миноры J_k , $k = 1, \dots, m-1$, отличны от нуля (в противном случае, т.к. векторы

$(t_{i1}, \dots, t_{im})$, $i = 1, \dots, m$, линейно независимы, можно переставить строки и столбцы в матрице T так, чтобы $J_k \neq 0$, $k = 1, \dots, m-1$). Выберем в качестве свободных переменных s_{ij} , $i = 2, \dots, m-1$, $j = m-i+2, \dots, m$. Тогда якобиан J системы (4) по оставшимся переменным s_{ij} , $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m-i+1$, при $s_{ij} = t_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m-1$, отличен от нуля, т.к. $|J| = 2^{m-1} |J_m \cdot J_{m-1} \cdot \dots \cdot J_2|$. По теореме о неявной функции, зависимые переменные s_{ij} , $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m-i+1$, имеют непрерывные частные производные по свободным переменным s_{ij} , $i = 2, \dots, m-1$, $j = m-i+2, \dots, m$. Следовательно, в некоторой окрестности D_{x_0} точки x_0 функции $s_{ij} = s_{ij}(x)$, $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m-i+1$, удовлетворяют условию Липшица, т.к. часть свободных переменных s_{mj} , $j = 1, \dots, m$, как функции от x удовлетворяют условию Липшица, а остальные полагаются равными соответственно t_{ij} , $i = 2, \dots, m-1$, $j = m-i+2, \dots, m$. Значит существуют постоянные $b_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $s_i \in \text{Lip}(D, b_i, m)$. Положив $v_i(x) = s_i(x) \forall x \in D$, получаем утверждение леммы 2. **Лемма 2 доказана.**

Обозначим через $a'(x)$ координату центра шара $U(a'(x), r(x))$ в базисе $v_1(x), \dots, v_m(x)$ из леммы 2.

Лемма 3. Пусть $a \in \text{Lip}(D, \ell, m)$, $n \in \text{Lip}(D, h, m)$. Тогда $a' \in \text{Lip}(D, \ell', m)$.

Доказательство. Обозначим $T(x) = (v_{ij}(x))_{i,j=1}^m$, тогда $\|a'(x) - a'(y)\| = \|T^{-1}(x) a(x) - T^{-1}(y) a(y)\| \leq \|(T^{-1}(x) - T^{-1}(y)) a(x)\| + \|T^{-1}(y) (a(x) - a(y))\| \leq \|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)\| \cdot \|a(x)\| + \|T^{-1}(y)\| \cdot \|a(x) - a(y)\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|(T^{-1}(x) - T^{-1}(y)) \xi\| \times \|a(x)\| + \|a(x) - a(y)\| \leq \sum_{i,j=1}^m |v_{ij}(x) - v_{ij}(y)| \cdot \|a(x)\| + \|a(x) - a(y)\| \leq \ell' \|x - y\|,$

где $\ell' = \max_{x \in D} \|a(x)\| \sum_{i=1}^m b_i + \ell$ — ограниченная величина. Значит, $a' \in \text{Lip}(D, \ell', m)$.

Лемма 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

проводится в два этапа: сначала теорема доказывается для случая постоянного поля нормалей $n \equiv e_m$, а затем изучается общий случай $n \in \text{Lip}(D, h, m)$.

I этап. Поле нормалей n постоянно, $n \equiv e_m$. Пусть $f(x)$ — барицентр множества $F_0(x)$, тогда для любых $x, y \in D$ верно соотношение:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |f_i(x) - f_i(y)| + |f_m(x) - f_m(y)|. \quad (5)$$

Из симметрии множества $F(x)$ следует, что $f_i(x) = a_i(x)$, $i = 1, \dots, m-1$. Из леммы 1 следует $a_i \in \text{Lip}(D, \ell, 1)$, $r \in \text{Lip}(D, \ell, 1)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m-1} |f_i(x) - f_i(y)| = \sum_{i=1}^{m-1} |a_i(x) - a_i(y)| \leq \sum_{i=1}^{m-1} \ell \|x - y\|.$$

Покажем, что $|f_m(x) - f_m(y)| \leq c_1 \|x - y\| \forall x, y \in D$, $c_1 > 0$ — некоторая постоянная величина. Обозначим через $\mathcal{K}_1 = \{(a_m, r) \in R^2 : -r \leq a_m < r\}$, $\mathcal{K}_2 = \{(a_m, r) \in R^2 : a_m < -r\}$. Введем следующую функцию:

$$p(a_m, r) = [a_m - r p_1(a_m, r) / p_2(a_m, r)] \mathcal{X}_{\mathcal{K}_1}(a_m, r) + a_m \mathcal{X}_{\mathcal{K}_2}(a_m, r), \quad (6)$$

где $\mathcal{X}_B$ – характеристическая функция множества B , $p_1(a_m, r) = \int_1^{a_m/r} (1-s^2)^{(m-1)/2} ds$,

$p_2(a_m, r) = \int_1^{a_m/r} (1-s^2)^{(m-1)/2} ds$. Очевидно, что $f_m(x) = p(a_m(x), r(x))$. Тогда из неравенства

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq |p(a_m(x), r(x)) - p(a_m(x), r(y))| + |p(a_m(x), r(y)) - p(a_m(y), r(y))|, \quad (7)$$

при условии, что p удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных a_m и r , будет следовать, что f_m также является липшицевой в области D . Покажем, что функция p удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных a_m и r . Для этого достаточно рассмотреть два случая:

Случай 1. Точка $(a_m, r) \in \bar{\mathcal{K}}_1$ (рис. 4). Тогда $p(a_m, r) = a_m - r p_1(a_m, r)/p_2(a_m, r)$. Обозначим через $d_r = \partial p(a_m, r)/\partial r$, $d_{a_m} = \partial p(a_m, r)/\partial a_m$. Для точек $(a_m, r) \in \mathcal{K}_1$ частная производная d_r является непрерывной функцией, т.к. $d_r = (p_1(a_m, r) \times [\partial p_2(a_m, r)/\partial r] - p_2(a_m, r) [\partial p_1(a_m, r)/\partial a_m]) / (p_2(a_m, r))^2$. В граничных точках $(a_m^0, r^0) \in \mathcal{K}_1$, $a_m^0 = r^0$, частная производная $d_r = \lim_{h \rightarrow 0} (p(a_m, a_m+h) - p(a_m, a_m))/h = -2/(m+3)$. Непосредственные, хотя и громоздкие вычисления показывают, что $\lim_{(a_m, r) \rightarrow (a_m^0, r^0)} d_r = -2/(m+3)$. Таким образом, частная производная d_r непрерывна вплоть до границы компакта $\bar{\mathcal{K}}_1$, а значит является ограниченной на $\bar{\mathcal{K}}_1$. Следовательно, по теореме Лагранжа, верно неравенство

$$|p(a_m(x), r(x)) - p(a_m(x), r(y))| \leq c_2 |r(x) - r(y)| \leq c_2 \ell \|x - y\|, \quad (8)$$

где постоянная $c_2 = \max_{(a_m, r) \in \bar{\mathcal{K}}_1} |d_r|$. Аналогичным образом устанавливается неравенство:

$$|p(a_m(x), r(y)) - p(a_m(y), r(y))| \leq c_3 |a_m(x) - a_m(y)| \leq c_3 \ell \|x - y\|, \quad (9)$$

где постоянная $c_3 = \max_{(a_m, r) \in \bar{\mathcal{K}}_1} |d_{a_m}|$. Из неравенств (7), (8), (9) получим: $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \ell (c_2 + c_3) \|x - y\|$.

Случай 2. Точка $(a_m, r) \in \bar{\mathcal{K}}_2$ (рис. 4). Тогда $p(a_m(x), r(x)) = a_m(x)$, $|p(a_m(x), r(x)) - p(a_m(y), r(y))| = |a_m(x) - a_m(y)| \leq \ell \|x - y\|$.

Нетрудно видеть, что отображение (6) удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных a_m и r в объединении областей $\bar{\mathcal{K}}_1$ и $\bar{\mathcal{K}}_2$, если в качестве константы Липшица возьмем $c_1 = \ell \max\{1; c_2 + c_3\}$. Тогда из неравенства (5) следует, что $f \in \text{Lip}(D, c_4, m)$, $c_4 = (m-1)\ell + c_1$.

II этап. Поле нормалей n произвольное, $n \in \text{Lip}(D, h, m)$. По лемме 2 существует ортонормированный базис $v_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, такой, что $v_m(x) = n(x)$, $v_i \in \text{Lip}(D, b_i, m)$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим через $f'(x)$ барицентр множества $F_0(x)$ в базисе $v_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда согласно первому этапу доказательства теоремы 1 справедливо $f' \in \text{Lip}(D, c_4, m)$, $i = 1, \dots, m$, а значит и $f'_i \in \text{Lip}(D, c_4, m)$, $i = 1, \dots, m$. Из лемм 1 и 3 следует $a'_i \in \text{Lip}(D, \ell', m)$, $i = 1, \dots, m$. Покажем, что $f \in \text{Lip}(D, c, m)$, $c > 0$ — некоторая постоянная величина. В самом деле

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \left\| \sum_{i=1}^m f'_i(x) v_i(x) - \sum_{i=1}^m f'_i(y) v_i(y) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m f'_i(x) v_i(x) - \sum_{i=1}^m f'_i(x) v_i(y) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^m f'_i(x) v_i(y) - \sum_{i=1}^m f'_i(y) v_i(y) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m f'_i(x) (v_i(x) - v_i(y)) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^m v_i(y) (f'_i(x) - f'_i(y)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |f'_i(x)| \cdot \|v_i(x) - v_i(y)\| + \sum_{i=1}^m \|v_i(y)\| \cdot \|f'_i(x) - f'_i(y)\| \leq c \|x - y\|, \end{aligned}$$

где $c = \sum_{i=1}^m \left(\max_{x \in D} |f'_i(x)| \cdot b_i + c_4 \right)$ — ограниченная величина. Следовательно, $f \in \text{Lip}(D, c, m)$. Теорема 1 доказана.

6. О существенности условий теоремы 1

В выборе липшицевого селектора отображения G_0 существенную роль играет геометрия множества $G(x)$. Следующий пример показывает, что если множество $G(x)$ отлично от шара, то барицентр соответствующего многозначного отображения G_0 может не удовлетворять условию Липшица.

Пусть в R^2 дана следующая кривая: $\xi_2 = \mathcal{X}_{(-\infty, 0)}(\xi_1) \cdot \xi_1^4 + \mathcal{X}_{[0, +\infty)}(\xi_1) \cdot \xi_1^3$, множество B (рис. 6) ограничено снизу этой кривой, а сверху — дугой окружности; $n \equiv e_2$, $G(x) = B + (0, -a(x))$, $a : D \rightarrow [0, d]$, $d = \text{const} > 0$, $a \in \text{Lip}(D, \ell, 2)$. Множество $G(x)$ — выпукло, тогда по формуле (2) получим: $\alpha(G(x), G(y)) = \max_{\psi \in S} |c((0, -a(x)), \psi) - c((0, -a(y)), \psi)| = \max_{\psi \in S} |a(x)\psi_2 - a(y)\psi_2| = |a(x) - a(y)| \leq \ell \|x - y\|$, следовательно, $F \in \text{Lip}(D, \ell, 2)$. Барицентр множества $F_0(x)$ имеет вид: $f = (f_1(a), f_2(a))$, где $f_1(a) = a^{1/4} q_1(a)/q(a)$, $f_2(a) = a q_2(a)/q(a)$, $q_1(a) = -(1/3) + (3/10)a^{1/6}$, $q_2(a) = -(16/45) - (9/28)a^{1/12}$, $q(a) = (4/5) + (3/4)a^{1/12}$. Функция $f_1(a)$ дифференцируемая в точке $a = 0$, при этом выполняется $f'_1(0) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0+0} (f_1(\Delta a) - f_1(0))/\Delta a = \lim_{\Delta a \rightarrow 0+0} (\Delta a)^{-3/4} q_1(\Delta a)/q(\Delta a) = +\infty$, т.е. производная $f'_1(a)$ не ограничена в точке $a = 0$. Значит, отображение f не удовлетворяет условию Липшица в области D с общей постоянной.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Олегу Павловичу Филатову за руководство работой и помощь при оформлении статьи.

Литература

- [1] Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. Ч.1. М.: Изд-во МГУ, 1979.
- [2] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление //Труды матем. инс-та АН СССР, 1985. Т.169. С.194-252.
- [3] Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью //Вест. МГУ, 1967. N3. С.16-26.
- [4] Хапаев М.М., Филатов О.П. Об устойчивости дифференциальных включений с многозначными возмущениями //Матем. заметки, 1988. Т.43. вып.3. С.346-355.

EXISTENCE OF A LIPCHITZEAN SELECTION

I. Zainullin ²

It is obtained the sufficient conditions yielding existence of a lipchitzean selection for compact valued maps. These results can be used in the stability theorems of solutions to differential inclusions.

²Ildar Zainullin, departament of mathematics, Samara state university