
МЕХАНИКА

ТОЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Ю.Н. Радаев ¹

Рассматриваются усредненные характеристики трехмерного анизотропного состояния поврежденности. Усреднение тонкой структуры поврежденности, как показано в работе, приводит к необходимости вычисления эллиптических интегралов и довольно сложной зависимости средней поврежденности от ее спектра. Подробно рассматриваются различные интегральные представления средней поврежденности и наиболее оптимальные быстро сходящиеся ряды для ее вычисления. Приводятся результаты численного анализа средней поврежденности в зависимости от состава спектра поврежденности. Вводятся понятия об амплитудном и обратном амплитудном спектрах поврежденности, которые позволяют дать первичную классификацию анизотропии состояний поврежденности. Получены формулы для вычисления средней поврежденности в случае узкополосных и вырожденных обратных амплитудных спектров поврежденности. Показано, что осесимметричная поврежденность обладает вырожденным обратным амплитудным спектром. Работа может рассматриваться как один из общих подходов к представлению анизотропного состояния поврежденности, а результаты – применены к анализу любой скалярной физической характеристики, непрерывно распределенной по ориентациям.

1. Введение

В ряду важнейших разделов механики деформируемого твердого тела механика континуума с внутренним распределением повреждений – один из наиболее динамично развивающихся [1-4]. Круг потенциальных приложений континуальной механики поврежденных тел чрезвычайно широк. Проникая в такие классические разделы механики твердого тела, как теория пластичности, ползучести, механика трещин и разрушения, механика поврежденности не только обогащается новыми концепциями и методами, свойственными этим ветвям механики твердого тела, но и заставляет переосмыслить традиционные для классических теорий подходы и постановки задач при расчетах напряженно-деформированных состояний твердых тел.

Целью настоящей работы является анализ анизотропного состояния поврежденности в среднем.

Аккуратное аналитическое описание общего анизотропного состояния поврежденности (тонкой структуры поврежденности) – довольно сложная проблема, представляющая значительные трудности как в формальном, так и в вычислительном

¹Радаев Юрий Николаевич, кафедра механики сплошных сред, Самарский государственный университет

плане. Так, анализ поврежденного состояния в среднем сталкивается с необходимостью исследования довольно сложных интегральных представлений, зависящих от большого количества параметров, что естественно затрудняет их использование при расчетах напряженно-деформированного состояния тел с распределенными внутренними дефектами.

Однако быстрое совершенствование компьютерных систем и технологий открывает возможность отхода от классических схем (которые в настоящее время представляются слишком упрощенными) описания поврежденного состояния.

Низшие аппроксимации по компонентам единичного вектора ориентации тонкой структуры поврежденности, несмотря на их вероятную недостаточность для анализа тонкой структуры поврежденности, всё же могут представлять часто наблюдаемые в экспериментах поля трещин или, например, довольно сложные межзеренные структуры металлов.

Усреднение поврежденности, представленной тензором поврежденности второго ранга, сравнительно элементарно и исчерпывающим образом дано в п.2. Конечные выражения здесь довольно просты и симметричны, хотя и содержат элементы формализма эллиптических функций.

Ситуация значительно усложняется при переходе к тензорному представлению четвертого ранга. Расчетные формулы (п.3) содержат полную эллиптическую тригонометрию. Сложные интегральные формы последовательно приводятся к каноническому виду, сводясь в конце концов к трем каноническим эллиптическим интегралам Лежандра. В процессе приведения к каноническим эллиптическим интегралам появляется возможность классифицировать спектры поврежденности, ввести понятия амплитудного спектра, узкополосного и широкополосного спектров, вырожденного спектра и получить приближенные формулы для быстрого и точного расчета поврежденного состояния в среднем.

Значительное место в работе уделено вычислительному аспекту (п.4), чем объясняется интенсивное использование различных интегральных формул и Фурье-разложений [5-7]. Ряды Фурье (практически не имеющие альтернативы при численной реализации, т.к. расчет некоторых средних значений требует около месяца непрерывных вычислений на самых современных компьютерах) предлагаются для вычисления средней поврежденности и сходятся, как показано в работе, чрезвычайно быстро, позволяя эффективно рассчитывать средние значения поврежденности. Особенно это касается осесимметричного состояния поврежденности. Осесимметричная поврежденность индуцируется, например, при продольном сжатии цилиндрических образцов. Вычисление тензора поврежденности четвертого ранга для такого рода состояний поврежденности (особенно когда поврежденность распределена по ориентациям кусочно-разрывно) поэтому представляет значительный интерес. Как будет показано, осесимметричная поврежденность обладает вырожденным обратным амплитудным спектром, что позволяет применить полученные в работе результаты для её ускоренного вычисления.

2. Усреднение второго порядка

Последовательность аппроксимаций по компонентам единичного вектора ориентации $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned}
\zeta^2 &= C_{ij} n_i n_j = \text{tr} [\mathbf{C} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} \mathbf{n}), \\
\zeta^4 &= C_{i_1 j_1 i_2 j_2} n_{i_1} n_{j_1} n_{i_2} n_{j_2} = \text{tr} [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}], \\
&\vdots \\
\zeta^{2s} &= C_{i_1 j_1 \dots i_s j_s} n_{i_1} n_{j_1} \dots n_{i_s} n_{j_s} = \text{tr} \left[\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \right], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

локального распределения сплошности $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ может быть использована для представления состояния поврежденности в среднем. Заметим, что здесь и в дальнейшем изложении используется тензор $\mathbf{C}$, который выражается через тензор поврежденности $\mathbf{D}$ согласно следующему уравнению:

$$\sqrt[2s]{\mathbf{C}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}.$$

Заметим также, что средние значения распределения $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ по поверхности единичной сферы являются также и начальным шагом Фурье-анализа поврежденного состояния.

Вычислим сначала среднее значение сплошности для низшей аппроксимации поврежденного состояния. Указанное среднее значение представим сначала как повторный интеграл

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{C_{(1)} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + C_{(2)} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + C_{(3)} \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.1)$$

Интегрируя по переменной φ , находим (см. [5, формула (2.597.2)])

$$\langle \zeta \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mathbf{E}(k) \sqrt{(C_{(3)} - C_{(2)})\tau^2 + C_{(2)}} d\tau, \quad (2.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{(1 - \tau^2)(C_{(2)} - C_{(1)})}{(C_{(3)} - C_{(2)})\tau^2 + C_{(2)}}},$$

$\mathbf{E}(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, k – модуль эллиптического интеграла.

Численный анализ интеграла (2.2) эффективно выполняется с помощью степенного разложения полного эллиптического интеграла второго рода в ряд ($0 \leq k^2 \leq 1$)

$$\mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (2.3)$$

Заметим, что интеграл в правой части формулы (2.2) зависит от трех параметров. Ясно, однако, исходя из общих соображений симметрии, что можно упростить анализ, уменьшив число параметров до двух, если ввести отношения величин $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$.

После простых преобразований формула (2.2) может быть приведена к виду

$$\frac{\pi < \zeta >}{2\sqrt{C}} = I(p_1, p_2), \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$I(p_1, p_2) = \int_0^1 \sqrt{(1-p_2)\tau^2 + p_2} \mathbf{E}(\sqrt{p_2(1-\tau^2)(1-p_1)((1-p_2)\tau^2 + p_2)^{-1}}) d\tau, \quad (2.5)$$

$$p_1 = \frac{C_{(1)}}{C_{(2)}}, \quad p_2 = \frac{C_{(2)}}{C_{(3)}}, \quad C = C_{(3)}. \quad (2.6)$$

В силу неравенств $D_{(3)} \leq D_{(2)} \leq D_{(1)}$ переменные p_1, p_2 изменяются в пределах отрезка $[0,1]$.

Вводя в соотношения (2.6) главные удлинения поврежденности с помощью равенств

$$1 - D_{(\gamma)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(\gamma)}^D},$$

параметры p_1, p_2 могут быть интерпретированы как квадраты отношений главных удлинений поврежденности. Так мы находим:

$$\sqrt{p_1} = \frac{L_{(2)}^D}{L_{(1)}^D}, \quad \sqrt{p_2} = \frac{L_{(3)}^D}{L_{(2)}^D}, \quad \sqrt{C} = L_{(1)}^D L_{(2)}^D. \quad (2.7)$$

Замечательные значения интеграла I есть:

$$\begin{aligned} I(p_1, 0+0) &= \frac{\pi}{4}, \quad I(1, 1) = \frac{\pi}{2}, \quad I(0, 1) = \int_0^1 \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{1-k^2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{8}{15} - \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n-1)2^{2n+1}n!(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}} - \dots \right\} = \\ &= 1.233701\dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Последняя формула получается интегрированием степенного разложения (2.3) с использованием следующего равенства:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{n!}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Для того чтобы охарактеризовать разброс значений интеграла $I = I(p_1, p_2)$, введем разность $\Delta_1 I = I(1, p_2) - I(0, p_2)$. Экстремальные значения этой разности равны

$$\Delta_1 I|_{p_2=0} = 0, \quad \Delta_1 I|_{p_2=1} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{1-k^2}} = 0.337095\dots \quad (2.10)$$

Численный анализ дает следующее среднее значение разности $\Delta_1 I$:

$$\langle \Delta_1 I \rangle = \int_0^1 (I(1, p_2) - I(0, p_2)) dp_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial I}{\partial p_1} dp_1 dp_2 = 0.101046\dots \quad (2.11)$$

Стандартная Евклидова метрика на плоскости (p_1, p_2) может быть использована для усреднения интеграла $I = I(p_1, p_2)$. Численный результат подобного усреднения выражается формулой

$$\langle I \rangle = \int_0^1 \int_0^1 I(p_1, p_2) dp_1 dp_2 = 1.157790\dots \quad (2.12)$$

Таким образом, среднее (а в некотором смысле наиболее вероятное) значение отношения $\langle \zeta \rangle / \sqrt{C}$ вычисляется в следующем виде:

$$\langle \langle \zeta \rangle / \sqrt{C} \rangle = \frac{2}{\pi} \langle I \rangle = 0.737072\dots \quad (2.13)$$

Отметим также еще два интегральных представления средней сплошности. Простыми преобразованиями равенство (2.4) приводится сначала к следующему виду:

$$\frac{\pi \langle \zeta \rangle}{2\sqrt{C}} = q^{-1} (1 + p^2 q^2) J(p, q), \quad (2.14)$$

где

$$J(p, q) = \int_0^q \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{q^2 - k^2} (1 + p^2 k^2)^2}, \quad (2.15)$$

$$p = \sqrt{(p_2^{-1} - 1)(1 - p_1)}, \quad q = \sqrt{1 - p_1}. \quad (2.16)$$

Вводя в последние соотношения главные удлинения поврежденности, получим также

$$p = \sqrt{\frac{L_{(1)}^{D^2} L_{(2)}^{D^2} - L_{(1)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2}}{L_{(1)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2} - L_{(2)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2}}}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{L_{(2)}^{D^2}}{L_{(1)}^{D^2}}}. \quad (2.17)$$

Приведенным соотношениям можно придать более симметричную форму, если ввести новые переменные по формулам:

$$k^* = \frac{k}{q}, \quad p^* = pq, \quad q^* = q. \quad (2.18)$$

После простейших преобразований получаем:

$$\frac{\pi \langle \zeta \rangle}{2\sqrt{C}} = (1 + p^{*2}) J^*(p^*, q^*), \quad (2.19)$$

$$J^*(p^*, q^*) = \int_0^1 \frac{k^* \mathbf{E}(q^* k^*) dk^*}{\sqrt{1 - k^{*2}} (1 + p^{*2} k^{*2})^2}, \quad (2.20)$$

где параметры p^* , q^* выражаются симметрично через главные удлинения поврежденности по следующим формулам:

$$p^* = \sqrt{\frac{L_{(2)}^{D^2}}{L_{(3)}^{D^2}} - 1}, \quad q^* = \sqrt{1 - \frac{L_{(2)}^{D^2}}{L_{(1)}^{D^2}}}. \quad (2.21)$$

Интеграл $J^*(p^*, q^*)$ может быть вычислен с помощью разложения (2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} J^*(p^*, q^*) &= \frac{\pi}{2p^{*4}} \left(1 + \frac{1}{4} q^{*2} p^{*-2}\right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{4} (1 + p^{*-2})^{-3/2} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + \frac{1}{2p^{*-2} (1 + p^{*-2})} \right\} - \\ &- \frac{1}{8p^{*4}} \frac{q^{*2}}{\sqrt{1 + p^{*-2}}} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + O(q^{*4}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Последняя формула позволяет просто вычислить среднюю сплошность в случае умеренной и слабой анизотропии ($q^* \rightarrow 0$).

Если главные удлинения поврежденности с номерами 1 и 2 совпадают (что выполняется, например, в случае осесимметричной поврежденности), то интеграл (2.20) вычисляется точно:

$$J^*(p^*, 0) = \frac{\pi}{2p^{*4}} \left\{ \frac{1}{4} (1 + p^{*-2})^{-3/2} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + \frac{1}{2p^{*-2} (1 + p^{*-2})} \right\}. \quad (2.23)$$

Таким образом, если анизотропное состояние поврежденности характеризуется только двумя главными поврежденностями, то средняя сплошность вычисляется с помощью простых точных формул (2.19), (2.23).

3. Усреднение четвертого порядка. Амплитудный спектр поврежденности

Аппроксимация четвертого порядка трехмерного ориентационного распределения сплошности $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ приводит к следующему выражению для среднего значения сплошности:

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left\{ (C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi) (1 - \tau^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(C_{(13)} \cos^2 \varphi + C_{(23)} \sin^2 \varphi) \tau^2 (1 - \tau^2) + C_{(33)} \tau^4 \right\}^{1/4} d\tau d\varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

которое удобно представить в форме

$$\langle \zeta \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\varphi d\varphi, \quad (3.2)$$

где

$$I_\varphi = \int_0^1 \sqrt[4]{\alpha_\varphi \tau^4 + 2\beta_\varphi \tau^2 + \gamma_\varphi} d\tau. \quad (3.3)$$

Коэффициенты биквадратного полинома в (3.3) определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi &= C_{(33)} + C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi - 2C_{(13)} \cos^2 \varphi - 2C_{(23)} \sin^2 \varphi, \\ \beta_\varphi &= C_{(13)} \cos^2 \varphi + C_{(23)} \sin^2 \varphi - C_{(11)} \cos^4 \varphi - 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - C_{(22)} \sin^4 \varphi, \\ \gamma_\varphi &= C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а его дискриминант вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi &= \left(C_{(13)}^2 - C_{(33)} C_{(11)} \right) \cos^4 \varphi + 2 \left(C_{(13)} C_{(23)} - C_{(12)} C_{(33)} \right) \times \\ &\times \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \left(C_{(23)}^2 - C_{(33)} C_{(22)} \right) \sin^4 \varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Прямой численный анализ средней сплошности (3.2) даже с применением самых современных компьютеров невозможен из-за чрезмерных затрат времени, необходимого для вычисления достаточного числа значений повторного интеграла, зависящего от шести параметров. Мы поэтому сначала преобразуем внутренний интеграл (3.3) к форме, пригодной для его ускоренного вычисления.

Заменой переменных

$$\alpha_\varphi \tau^4 + 2\beta_\varphi \tau^2 + \gamma_\varphi = \tau^4 z^4, \quad \tau^2 = \frac{\beta_\varphi + \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}}{z^4 - \alpha_\varphi} \quad (3.6)$$

указанный интеграл приводится к сумме двух интегралов

$$\begin{aligned} I_\varphi &= \frac{1}{2} \int z d\tau = I_1 + I_2 = 2\beta_\varphi \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{z^4 dz}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2} + \\ &+ \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{\gamma_\varphi z^8 + (2\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi) z^4}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2 \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} dz, \end{aligned} \quad (3.7)$$

из которых первый вычисляется явно в виде [5, формулы (2.132.1), (2.134.1)]

$$I_1 = \frac{\beta_\varphi}{8\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3} \sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_\varphi} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_\varphi}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_\varphi}} \right], \quad (3.8)$$

где использовано следующее обозначение: $\psi_\varphi = 2\beta_\varphi + \gamma_\varphi$.

Второй из интегралов в сумме (3.7) стандартными преобразованиями приводится к сумме интегралов

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \gamma_\varphi \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} + \\
 & + (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^4 - \alpha_\varphi) \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} + \\
 & + \alpha_\varphi (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2 \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления зависят от знака дискриминанта (3.5) Предполагая сначала, что

$$\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi < 0 \quad (3.10)$$

и обозначая

$$\delta_\varphi = \sqrt[4]{\alpha_\varphi - \frac{\beta_\varphi^2}{\gamma_\varphi}}, \quad (3.11)$$

формулу (3.9) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\
 & \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} - \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} \right] + \\
 & + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} + \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} \right]. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Все интегралы в последней формуле идентифицируются (см. [6, формулы (212.12), (337.04), (336.00), (336.01), (336.02)]):

$$J'_0(a, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.13)$$

$$J'_1(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)\sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}(a^2 + p)} \left[\Pi(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}) - F(s, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right], \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} J'_2(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)^2 \sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}(a^2 + p)^2} & \left\{ F(s, \frac{1}{\sqrt{2}}) - 2\Pi(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \right. \\ & + \frac{1}{(\rho^2 - 1)(1 - 2\rho^2)} \left[\rho^2 E(s, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) F(s, \frac{1}{\sqrt{2}}) + (3\rho^2 - \rho^4 - \frac{3}{2}) \times \right. \\ & \left. \left. \times \Pi(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}) - \rho^4 \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \mu^2 (1 - \rho^2 \mu^2)^{-1}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где введены следующие обозначения:

$$s = \arcsin \mu, \quad \rho^2 = \frac{a^2 + p}{2a^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2 + y^2}}. \quad (3.16)$$

Канонические эллиптические интегралы Лежандра представляются, как обычно, формулами

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \\ E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta, \\ \Pi(\varphi, \omega^2, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \omega^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Равенства (3.12)-(3.15), а также (3.8) позволяют получить значение интеграла I_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J'_0(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\ &\times \left(J'_1(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J'_1(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \times \\ &\times \left(J'_2(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J'_2(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

и, следовательно, вычислить среднюю сплошность в форме интеграла

$$\langle \zeta \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\beta_\varphi}{8\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3} \sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_\varphi} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_\varphi}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right| + 2 \arctg \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_\varphi}} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J'_0(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\
& \quad \times \left(J'_1(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J'_1(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \\
& + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left(J'_2(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J'_2(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) \Big\} d\varphi. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

В случае, когда дискриминант (3.5) положителен

$$\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi > 0, \quad (3.20)$$

обозначая

$$\delta_\varphi = \sqrt[4]{\frac{\beta_\varphi^2}{\gamma_\varphi} - \alpha_\varphi}, \quad (3.21)$$

вместо формулы (3.12) имеем

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\
& \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} - \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} \right] + \\
& + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} + \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} \right]. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Интегралы в последней формуле также идентифицируются (см. [6, формулы (263.50), (266.04), (341.00)-(341.05), (361.54)]):

$$J''_0(a, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a} F(\varsigma, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
J''_1(a, p, y) &= \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p) \sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a(a^2 + p)} \times \\
& \times \left[\frac{1}{1 - \sigma} \left(\Pi(\varsigma, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}, \frac{1}{\sqrt{2}}) - G \right) - F(\varsigma, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right], \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$J''_2(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)^2 \sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a(a^2 + p)^2} \left\{ F(\varsigma, \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{2}{1 - \sigma} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\Pi(\varsigma, \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1}, \frac{1}{\sqrt{2}}) - G \right) + \frac{2(1+\sigma)^2}{\sigma^4-1} \left[-\frac{1}{1-\sigma^2} \left(\Pi(\varsigma, \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1}, \frac{1}{\sqrt{2}}) - G \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(1+\sigma^2)F(\varsigma, \frac{1}{\sqrt{2}}) - \sigma^2 E(\varsigma, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\sigma^2\sqrt{1-\lambda^4}}{\sqrt{2}(1+\sigma\lambda)} \right] \Bigg\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где использованы обозначения

$$\varsigma = \arccos \lambda, \quad \sigma = \frac{a^2+p}{a^2-p}, \quad \lambda = \frac{y^2-a^2}{y^2+a^2}, \quad (3.26)$$

$$\frac{G}{\sqrt{2}\sigma} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1+\sigma^2)(1-\lambda^2)}{(1-\sigma^2)(1+\lambda^2)}}, & \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1} < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}}, & \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1} = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1}} \ln \frac{\sqrt{(1+\sigma^2)(1+\lambda^2)} + 2\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\lambda^2)}}{\sqrt{(1+\sigma^2)(1+\lambda^2)} - 2\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\lambda^2)}}, & \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1} > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J_0''(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\ & \times \left(J_1''(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J_1''(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \\ & + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left(J_2''(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J_2''(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Формула для среднего значения сплошности в этом случае вполне аналогична формуле (3.19) с точностью до замены J'_α на J''_α ($\alpha = 0, 1, 2$).

В интеграле (3.19) заменим переменную, введя обратную амплитуду u по формуле $s = \operatorname{am} u$:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \equiv R^2(u) = \frac{-(4C_{(12)}C_{(33)} - 4C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}^{-1} \operatorname{sd}^4 u) \pm 4\sqrt{D}}{-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \operatorname{sd}^4 u}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} 16D = & (C_{(33)}^{-2} \operatorname{sd}^8 u - 8\operatorname{sd}^4 u + 16C_{(33)}^2)(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)}) + \\ & + (4C_{(33)}^{-1} \operatorname{sd}^4 u - 16C_{(33)})(2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - C_{(23)}^2C_{(11)} - C_{(13)}^2C_{(22)}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

и через $\operatorname{sd} u$ обозначена эллиптическая функция Якоби, равная отношению синус-амплитуды и дельта-амплитуды.

Выбор знака в формуле (3.29) осуществляется так, чтобы все отношение было положительным.

В результате преобразований получим

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \rangle = & \frac{2}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\beta_u}{8 \sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4 \sqrt[4]{\alpha_u^3} \sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\
& + \frac{u}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\gamma_u} \sqrt[4]{\alpha_u \gamma_u} - \beta_u^2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}} (2\beta_u^2 + \alpha_u \gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\
& \times (f_1^+(u, \frac{1}{2} + \omega_u) - f_1^-(u, \frac{1}{2} - \omega_u)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u \gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}} (f_2^+(u, \frac{1}{2} + \omega_u) + f_2^-(u, \frac{1}{2} - \omega_u)) \Big\} \times \\
& \times \frac{R'(u)}{1 + R^2(u)} du,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

где

$$f_1^\pm(u, \rho^2) = \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{dn}^{-2} u - 1} (\sqrt{C_{(33)}^{-1}} (\operatorname{dn}^{-2} u - 1) \pm \sqrt{\alpha_u})} [\Pi(u, \rho^2) - u], \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
f_2^\pm(u, \rho^2) = & \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{dn}^{-2} u - 1} (\sqrt{C_{(33)}^{-1}} (\operatorname{dn}^{-2} u - 1) \pm \sqrt{\alpha_u})^2} \times \\
& \times \left\{ u - 2\Pi(u, \rho^2) + \frac{1}{(\rho^2 - 1)(1 - 2\rho^2)} \times \right. \\
& \times \left[\rho^2 E(u) + \left(\frac{1}{2} - \rho^2 \right) u + (3\rho^2 - \rho^4 - \frac{3}{2}) \Pi(u, \rho^2) - \frac{\rho^4 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \rho^2 \operatorname{sn} u^2} \right] \Big\},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\omega_u = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_u} \sqrt{C_{(33)}} (\operatorname{dn}^{-2} u - 1)^{-1}, \tag{3.34}$$

$$\alpha_u = C_{(33)} + \frac{C_{(11)} - 2C_{(13)} + 2(C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)})R^2(u) + (C_{(22)} - 2C_{(23)})R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2},$$

$$\beta_u = \frac{C_{(13)} + (C_{(13)} + C_{(23)} - 2C_{(12)})R^2(u) + (C_{(23)} - C_{(11)} - C_{(22)})R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2}, \tag{3.35}$$

$$\gamma_u = \frac{C_{(11)} + 2C_{(12)}R^2(u) + C_{(22)}R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2}.$$

Значения u_1 , u_2 вычисляются как решения следующих уравнений:

$$\operatorname{sn} u_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(11)}^{-1} C_{(13)}^2}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(11)}^{-1} C_{(13)}^2}}}, \tag{3.36}$$

$$\operatorname{sn} u_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(22)}^{-1} C_{(23)}^2}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(22)}^{-1} C_{(23)}^2}}}.$$

Заметим, что в формулах, приведенных выше, и в дальнейшем модуль эллиптических функций k всегда равен $1/\sqrt{2}$.

В случае (3.20) обратная амплитуда определяется как $\zeta = \text{am} u$ (ср. (3.29), (3.30)):

$$\text{tg}^2 \varphi \equiv R^2(u) = \frac{-(C_{(13)}C_{(23)} - 2C_{(12)}C_{(33)}(1 + \text{cn}^2 u)(1 + \text{cnu})^{-2}) \pm \sqrt{D}}{C_{(23)}^2 - 2C_{(22)}C_{(33)}(1 + \text{cn}^2 u)(1 + \text{cnu})^{-2}}, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} D = 2C_{(33)} \left(C_{(11)}C_{(23)}^2 + C_{(22)}C_{(13)}^2 - 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} \right) \frac{(1 + \text{cn}^2 u)}{(1 + \text{cnu})^2} + \\ + 4C_{(33)}^2 \left(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)} \right) \frac{(1 + \text{cn}^2 u)^2}{(1 + \text{cnu})^4}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Формула (3.31) для средней сплошности во втором случае приобретает вид:

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\text{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\beta_u^2 - \alpha_u\gamma_u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \right. \\ \left. \times (h_1^+(u, \sigma_u^+) - h_1^-(u, \sigma_u^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}}(h_2^+(u, \sigma_u^+) + h_2^-(u, \sigma_u^-)) \right\} \frac{R'(u)du}{1 + R^2(u)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} h_1^\pm(u, \sigma) = \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}}{2\sqrt{(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1}}(\sqrt{C_{(33)}}(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1} \pm \sqrt{\alpha_u})} \times \\ \times \left[\frac{1}{1 - \sigma} \left(\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G \right) - u \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} h_2^\pm(u, \sigma) = \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}}{2\sqrt{(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1}}(\sqrt{C_{(33)}}(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1} \pm \sqrt{\alpha_u})^2} \times \\ \times \left\{ u - \frac{2}{1 - \sigma} \left(\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G \right) + \frac{2(1 + \sigma)^2}{\sigma^4 - 1} \times \right. \\ \left. \times \left[-\frac{1}{1 - \sigma^2} \left(\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G \right) + \frac{1}{2}(1 + \sigma^2)u - \sigma^2 E(u) + \frac{\sigma^2 \sqrt{1 - \text{cn}^4 u}}{\sqrt{2}(1 + \sigma \text{cnu})} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\sigma_u^\pm = \frac{(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1} \sqrt{C_{(33)}} \pm \sqrt{\alpha_u}}{(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1} \sqrt{C_{(33)}} \mp \sqrt{\alpha_u}}. \quad (3.42)$$

Заметим также, что

$$\frac{\sigma_u^{\pm 2}}{\sigma_u^{\pm 2} - 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\alpha_u + C_{(33)}(1 - \text{сн}u)^2(1 + \text{сн}u)^{-2}}{4\sqrt{C_{(33)}}\sqrt{\alpha_u}(1 - \text{сн}u)(1 + \text{сн}u)^{-1}},$$

и при вычислении значений функции G нужно воспользоваться формулой (3.27), в которой следует положить

$$\lambda = \text{сн}u. \quad (3.43)$$

Значения u_1, u_2 определяются как решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \text{сн}u_1 &= \frac{\sqrt{C_{(33)}} - \sqrt{C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1} - C_{(33)}}}{\sqrt{C_{(33)}} + \sqrt{C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1} - C_{(33)}}}, \\ \text{сн}u_2 &= \frac{\sqrt{C_{(33)}} - \sqrt{C_{(23)}^2 C_{(22)}^{-1} - C_{(33)}}}{\sqrt{C_{(33)}} + \sqrt{C_{(23)}^2 C_{(22)}^{-1} - C_{(33)}}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Соответствующие значениям u_1, u_2 амплитуды s_1, s_2 (или ζ_1, ζ_2) назовем амплитудами поврежденности, отрезок $[s_1, s_2]$ (или $[\zeta_1, \zeta_2]$) – амплитудным спектром поврежденности, а отрезок $[u_1, u_2]$ – обратным амплитудным спектром поврежденности.

Необходимо отметить, что формулы (3.31) и (3.32), а также определение обратного амплитудного спектра корректны только если замена переменной по формулам (3.29), (3.37) приводит к монотонной зависимости $u = u(\varphi)$. Мы исследуем этот вопрос ниже.

Правые части уравнений (3.36), (3.44), наряду с диагональными элементами $C_{(11)}, C_{(22)}, C_{(33)}$, дают пять значимых комбинаций элементов спектра поврежденности. Последняя – шестая – есть само значение средней поврежденности.

Длина отрезка $[u_1, u_2]$ (ширина обратного амплитудного спектра поврежденности) δu может служить одной из скалярных мер анизотропии состояния поврежденности. Действительно, если правые части уравнений (3.36) (уравнений (3.44)) мало отличаются, то и значения обратных амплитуд поврежденности u_1 и u_2 также мало отличаются (узкополосный спектр поврежденности), следовательно, средняя сплошность может быть вычислена достаточно точно для каждого из случаев соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle = & \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\arctg \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\ & + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\alpha_u\gamma_u - \beta_u^2}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\ & \times (f_1^+(u, \frac{1}{2} + \omega_u) - f_1^-(u, \frac{1}{2} - \omega_u)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}} \times \\ & \left. \times (f_2^+(u, \frac{1}{2} + \omega_u) + f_2^-(u, \frac{1}{2} - \omega_u)) \right\}_{u=\bar{u}} + O(\delta u), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \rangle = & \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\arctg\sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\
& + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\beta_u^2 - \alpha_u\gamma_u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\
& \left. \times (h_1^+(u, \sigma_u^+) - h_1^-(u, \sigma_u^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}} (h_2^+(u, \sigma_u^+) + h_2^-(u, \sigma_u^-)) \right\}_{u=\bar{u}} + O(\delta u),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

где введено обозначение

$$\bar{u} = u_1 + \frac{1}{2}\delta u.$$

Если правые части пары уравнений (3.36) или (3.44) равны, то $\delta u = 0$, и обратный амплитудный спектр поврежденности вырождается в точку (вырожденный обратный амплитудный спектр поврежденности). Средняя сплошность при этом вычисляется точно по одной из формул (3.45), (3.46) с отброшенным слагаемым $O(\delta u)$.

Две последние формулы чрезвычайно удобны для представления поврежденного состояния в среднем и могут быть еще уточнены в плане вычисления членов высших порядков малости по δu .

Наконец, рассмотрим условия положительности дискриминанта (3.5) и монотонности замены $u = u(\varphi)$.

Дискриминант (3.5) определяется через обратную амплитуду u по формуле

$$\begin{aligned}
\beta_u^2 - \alpha_u\gamma_u = & \left[C_{(13)}^2 - C_{(33)}C_{(11)} + 2(C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)})R^2(u) + \right. \\
& \left. + (C_{(23)}^2 - C_{(33)}C_{(22)})R^4(u) \right] [1 + R^2(u)]^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Дискриминант выражения в квадратных скобках имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = & C_{(33)} \left(C_{(12)}^2 C_{(33)} + C_{(13)}^2 C_{(22)} + C_{(23)}^2 C_{(11)} - 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - \right. \\
& \left. - C_{(11)}C_{(22)}C_{(33)} \right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

а его корни –

$$R_{1,2}^2 = \frac{-(C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}) \pm \sqrt{\Delta_1}}{C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)}}. \tag{3.49}$$

Вычисления зависели также от знака α_u , который совпадает со знаком биквадратного трехчлена (см. (3.35))

$$(C_{(22)} + C_{(33)} - 2C_{(23)})R^4 + 2(C_{(33)} + C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)})R^2 + C_{(11)} + C_{(33)} - 2C_{(13)}, \tag{3.50}$$

дискриминант и корни которого есть:

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & C_{(12)}^2 + C_{(13)}^2 + C_{(23)}^2 - 2C_{(13)}C_{(23)} - 2C_{(12)}C_{(13)} - 2C_{(12)}C_{(23)} + \\ & + 2C_{(12)}C_{(33)} + 2C_{(23)}C_{(11)} + 2C_{(13)}C_{(22)} - \\ & - C_{(11)}C_{(22)} - C_{(11)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)},\end{aligned}\quad (3.51)$$

$$R_{1,2}^2 = \frac{-(C_{(33)} + C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)}) \pm \sqrt{\Delta_2}}{C_{(22)} + C_{(33)} - 2C_{(23)}}. \quad (3.52)$$

Исследуем теперь вопрос о монотонности функции $u = u(\varphi)$. Нули производной $du/d\varphi$ являются корнями следующего биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned}& \left[C_{(12)} (C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)}) + C_{(22)} (C_{(12)}C_{(33)} - C_{(13)}C_{(23)}) \right] R^4 + \\ & + \left(C_{(11)}C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(13)}^2 \right) R^2 + C_{(13)} (C_{(11)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(13)}) = 0,\end{aligned}\quad (3.53)$$

дискриминант которого вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\Delta_3 = & (C_{(13)}^2 C_{(22)} + C_{(23)}^2 C_{(11)})^2 - 4C_{(13)}^3 C_{(22)}C_{(12)}C_{(23)} - \\ & - 4C_{(23)}^3 C_{(11)}C_{(12)}C_{(13)} + 4C_{(12)}^2 C_{(13)}^2 C_{(23)}^2.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Корни уравнения (3.53) есть:

$$R_{1,2}^2 = \frac{-\left(C_{(11)}C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(13)}^2 \right) \pm \sqrt{\Delta_3}}{2 \left[C_{(12)} (C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)}) + C_{(22)} (C_{(12)}C_{(33)} - C_{(13)}C_{(23)}) \right]}. \quad (3.55)$$

Если дискриминант (3.54) положителен, то в правых частях формул (3.31), (3.39) появляются суммы интегралов по отрезкам монотонного изменения обратной амплитуды в зависимости от угла φ .

Если поврежденность удовлетворяет условиям $C_{(11)} = C_{(22)}$, $C_{(13)} = C_{(23)}$, то дискриминант Δ_3 положителен, а корни уравнения (3.53) есть $R_{1,2}^2 = +1, -1$, что соответствует углу $\varphi = \pi/4$. Обратный амплитудный спектр разделяется на два отрезка (фактически же обратный амплитудный спектр представляет собой один и тот же отрезок, дважды проходимый в прямом и обратном направлении) значением u , определяемым как корень уравнения

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - 2C_{(13)}^2} (C_{(11)} + C_{(12)})^{-1}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - 2C_{(13)}^2} (C_{(11)} + C_{(12)})^{-1}}}. \quad (3.56)$$

Осесимметричная поврежденность характеризуется условиями $C_{(11)} = C_{(22)}$, $C_{(13)} = C_{(23)}$, $C_{(11)} = C_{(12)}$.

Если $C_{(11)} \rightarrow C_{(22)}$, $C_{(13)} \rightarrow C_{(23)}$, $C_{(12)} \rightarrow C_{(11)}$, то дискриминант Δ_3 вырождается, а отношение (3.55) становится неопределенным типа 0/0. Верхняя граница обратного амплитудного спектра при этом совпадает с нижней, т.е. обратный спектр вырождается. Средняя поврежденность вычисляется в этом случае по одной из формул (3.45), (3.46) с отброшенным слагаемым $O(\delta u)$.

Значение $\bar{u}$ определяется как корень уравнения

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1}}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1}}}}.$$

Необходимо отметить, что отношение в уравнении (3.29) при этом также становится неопределенным типа 0/0.

С целью эффективного вычисления значений средней поврежденности мы рассмотрим ниже разложения эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов Лежандра в быстро сходящиеся ряды Фурье по обратной амплитуде u .

4. Использование рядов Фурье для вычисления средней поврежденности

Вычисление средней поврежденности по формулам (3.31), (3.39) эффективно реализуется только тогда, когда значения подынтегральной функции достаточно быстро могут быть вычислены в пределах отрезка $[u_1, u_2]$.

Для вычисления эллиптических функций Якоби имеем следующие разложения [5, формулы (8.146.4), (8.146.1), (8.146.2), (8.146.3)], [6, формула (908.10)]:

$$\begin{aligned} s, \zeta = \operatorname{am} u &= \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}}, \\ \operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\ \operatorname{cn} u &= \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\ \operatorname{sdu} &= \frac{2\pi}{kk'\mathbf{K}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$v = \pi u / (2\mathbf{K}), \quad q = \exp(-\pi \mathbf{K}' / \mathbf{K}), \quad (4.2)$$

и полный эллиптический интеграл первого рода вычисляется как сумма ряда [5, формула (8.113.1)]

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} k^2 + \frac{(1 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 4)^2} k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}. \quad (4.3)$$

Приведем также формулы, необходимые для вычисления производной $R'(u)$:

$$\operatorname{sd}'u = \operatorname{cn} \operatorname{und}^2 u, \quad \operatorname{cn}'u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \quad (4.4)$$

Так дифференцируя (3.29), находим

$$\begin{aligned}
2RR' = \text{sd}^3 u \text{cnund}^2 u \left\{ 4 \frac{-(4C_{(12)}C_{(33)} - 4C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u) \pm 4\sqrt{D}}{(-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u)^2} C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \pm \right. \\
\pm \frac{C_{(33)}^{-2}(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)})\text{sd}^4 u + 2(C_{(33)}^{-1}\Gamma_{(123)} - 2(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)}))}{\sqrt{D}(-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u)} + \\
\left. + \frac{4C_{(12)}C_{(33)}^{-1}}{-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u} \right\}, \quad (4.5)
\end{aligned}$$

где использовано следующее обозначение:

$$\Gamma_{(123)} = 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - C_{(23)}^2C_{(11)} - C_{(13)}^2C_{(22)}.$$

С целью вычисления эллиптических интегралов Лежандра воспользуемся аппаратом тэта-функций, определяемых как суммы рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \sin(2m-1)z = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\
\vartheta_2(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \cos(2m-1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\
\vartheta_3(z) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz}, \\
\vartheta_4(z) &\equiv \vartheta_0(z) \equiv \vartheta(z) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}.
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Для логарифмов и логарифмических производных тэта-функций имеем следующие Фурье-разложения [6, формула (1050.02)]:

$$\begin{aligned}
\ln \vartheta_1(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \sin z) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_2(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \cos z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_3(z) &= \ln \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_0(z) &= \ln \xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz,
\end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\xi = 0.57721566\dots$ есть число Эйлера,

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta'_1(z)}{\vartheta_1(z)} &= \operatorname{ctg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_2(z)}{\vartheta_2(z)} &= -\operatorname{tg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_3(z)}{\vartheta_3(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_0(z)}{\vartheta_0(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin 2nz.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Эллиптический интеграл второго рода выражается через тэта-функции согласно [7, формула (13.20.16)]

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{d}{du} \ln \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\mathbf{K}}\right), \tag{4.9}$$

которая, в силу (4.8), может быть представлена в виде

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{m\pi u}{\mathbf{K}}. \tag{4.10}$$

Вычисление эллиптического интеграла Лежандра третьего рода распадается на несколько случаев. Вводя переменные

$$v = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}}, \quad t = \frac{\pi \gamma}{2\mathbf{K}}, \tag{4.11}$$

имеем [7, формулы (13.20.21), (13.20.25), (13.20.22); (13.20.19), (13.20.24), (13.20.23); (13.20.20), (13.19.19.4), (13.19.18.1); (13.20.18), (13.19.19.1), (13.19.18.4)]:

Круговой случай I: $\omega^2 = -k^2 \operatorname{sn}^2(\gamma, k') \operatorname{cn}^{-2}(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$),

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{dn}(\gamma, k')}{\operatorname{sn}(\gamma, k') \operatorname{cn}(\gamma, k')} \Pi(u, -k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\gamma, k')}{\operatorname{cn}^2(\gamma, k')}, k) &= \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v + it)}{\vartheta_0(v - it)} + i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} v, \\
\frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v + it)}{\vartheta_0(v - it)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin 2nv \operatorname{sh} 2nt, \\
i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} &= \operatorname{ctht} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \operatorname{sh} 2nt.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Круговой случай II: $\omega^2 = \operatorname{dn}^2(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$),

$$\begin{aligned}
k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\gamma, k') \operatorname{cn}(\gamma, k')}{\operatorname{dn}(\gamma, k')} \Pi(u, \operatorname{dn}^2(\gamma, k'), k) &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v + it)}{\vartheta_2(v - it)} - i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} v, \\
\frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v + it)}{\vartheta_2(v - it)} &= -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{th} t) + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nv \operatorname{sh} 2nt, \\
i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \operatorname{sh} 2nt.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Гиперболический случай I: $\omega^2 = k^2 \operatorname{sn}^2(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$),

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cn}(\gamma, k) \operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, k^2 \operatorname{sn}^2(\gamma, k), k) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} + \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} v, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\ \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} &= \operatorname{ct} \operatorname{gt} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Гиперболический случай II: $\omega^2 = \operatorname{sn}^{-2}(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$),

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cn}(\gamma, k) \operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, \operatorname{sn}^{-2}(\gamma, k), k) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| > t, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t+v)}{\vartheta_1(t-v)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| < t, \end{cases} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(v+t)}{\sin(v-t)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\ \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Оперирование с приведенными формулами упрощается, если воспользоваться разложениями (4.1), (4.7), а также следующими Фурье-разложениями [5, формулы (8.146.7), (8.146.8), (8.146.11), (8.146.26), (8.146.27)]:

$$\begin{aligned} \operatorname{nd} u &= \frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{2\pi}{k' \mathbf{K}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\ \operatorname{tn} u &= \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{\pi}{2k' \mathbf{K}} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\ \operatorname{cd} u &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = -\frac{2\pi}{k \mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\ \operatorname{sn}^2 u &= \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2k^3} \left[1+k^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\mathbf{K}^2} \right] \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\ \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} &= \frac{\pi^2}{4\mathbf{K}^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + \frac{\mathbf{K}-\mathbf{E}}{\mathbf{K}} - \frac{2\pi^2}{\mathbf{K}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{2\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

и, кроме того [5, формулы (8.146.15), (8.146.16), (8.146.17)]

$$\begin{aligned}
\text{tnudnu} &= \frac{\pi}{2\mathbf{K}} \left[\text{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + (-1)^n q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
\text{snucdu} &= \frac{4\pi^2}{k^2 \mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2(2n-1)}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{\mathbf{K}}, \\
\text{tnundu} &= \frac{\pi}{2k'^2 \mathbf{K}} \left[\text{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Использование приведенных выше формул для вычисления эллиптического интеграла Лежандра третьего рода требует решения уравнения вида

$$\text{sn} \gamma = f(u) \tag{4.18}$$

с целью определения параметра γ . Подобное же уравнение возникает при определении обратных амплитуд поврежденности u_1 , u_2 (см. уравнения (3.36), (3.44)).

Решение уравнения (4.18) может быть найдено в форме интеграла Лежандра первого рода, а затем вычислено с помощью разложения в ряд [5, формула (8.117)]:

$$\gamma = \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \text{am} \gamma - \text{sn} \gamma \sqrt{1 - \text{sn}^2 \gamma} \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \text{sn}^2 \gamma + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \text{sn}^4 \gamma + \dots \right), \tag{4.19}$$

$$a_0 = \frac{2\mathbf{K}}{\pi} - 1, \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}.$$

Заметим, что коэффициент a_n представляет собой остаток ряда (4.3) после n -го члена и очень быстро стремится к нулю (практически как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/2$).

В приведенных выше Фурье-разложениях и в степенном разложении (4.19) следует положить:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[\Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \right]^2 = 1.854075\dots, \\
\mathbf{E} &= \frac{\pi}{4\mathbf{K}} + \frac{1}{2} \mathbf{K} = 1.350644\dots, \quad q = 0.043214\dots
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Поскольку q является малым числом, то ряды Фурье для эллиптических функций Якоби и тэта-функций сходятся чрезвычайно быстро (практически как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/25$), поэтому достаточно первых нескольких членов для весьма точного вычисления их сумм.

Представляет интерес сравнить средние значения сплошности, учтя в простейшей форме недиагональные элементы спектра поврежденности (положив их равными и достаточно малыми).

Для этого рассмотрим спектр поврежденности, удовлетворяющий условиям

$$D = D_{(12)} = D_{(13)} = D_{(23)}, \quad D \leq D_{(33)} \leq D_{(22)} \leq D_{(11)}, \tag{4.21}$$

т.е., в частности, когда недиагональные элементы спектра поврежденности малы.

В этом случае средняя сплошность вычисляется как

$$\frac{\pi < \zeta >}{2\sqrt[4]{C}} = I(p_1, p_2, p_3), \tag{4.22}$$

где

$$I(p_1, p_2, p_3) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt[4]{\alpha_\varphi^* \tau^4 + 2\beta_\varphi^* \tau^2 + \gamma_\varphi^*} d\tau, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi^* &= p_3 - 1 - (1 - p_1)\cos^4\varphi - (1 - p_2)\sin^4\varphi, \\ \beta_\varphi^* &= (1 - p_1)\cos^4\varphi + (1 - p_2)\sin^4\varphi, \\ \gamma_\varphi^* &= 1 - (1 - p_1)\cos^4\varphi - (1 - p_2)\sin^4\varphi, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$p_1 = \frac{C_{(11)}}{C}, \quad p_2 = \frac{C_{(22)}}{C}, \quad p_3 = \frac{C_{(33)}}{C}, \quad p_1, p_2, p_3 \in (0, 1). \quad (4.25)$$

Анализ интеграла (4.21) упрощается ввиду следующего свойства симметрии

$$I(p_1, p_2, p_3) = I(p_2, p_1, p_3). \quad (4.26)$$

Ниже приводятся результаты численного анализа интеграла (4.22) (ср. (2.11)-(2.13)):

$$\begin{aligned} \langle \Delta_3 I \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 (I(p_1, p_2, 1) - I(p_1, p_2, 0)) dp_1 dp_2 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial I}{\partial p_3} dp_1 dp_2 dp_3 = 0.119293\dots, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\langle I \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 I(p_1, p_2, p_3) dp_1 dp_2 dp_3 = 1.422007\dots \quad (4.28)$$

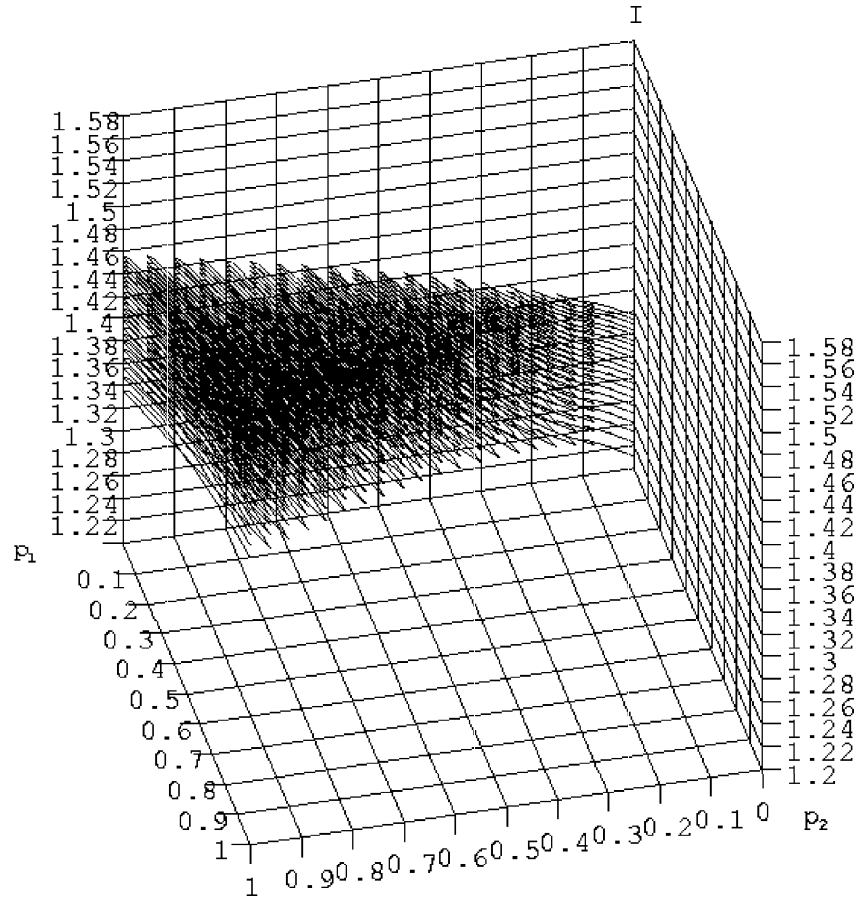
Наиболее вероятное значение отношения $\langle \zeta \rangle / \sqrt[4]{C}$ есть:

$$\left\langle \langle \zeta \rangle / \sqrt[4]{C} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \langle I \rangle = 0.9052777\dots \quad (4.29)$$

Формула (4.29) получена усреднением восьми тысяч значений интеграла I .

Значения интеграла $I(p_1, p_2, p_3)$ непрерывно заполняют слой, изображенный на фиг. 1. Вклад недиагональных повреждений характеризуется толщиной указанного слоя. Проекция слоя на плоскости $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$ представлены на фиг. 2, 3. На фиг. 4 указанный слой представлен так, как он видится наблюдателю, располагающемуся на прямой $I - 1.2 = p_1 = p_2$.

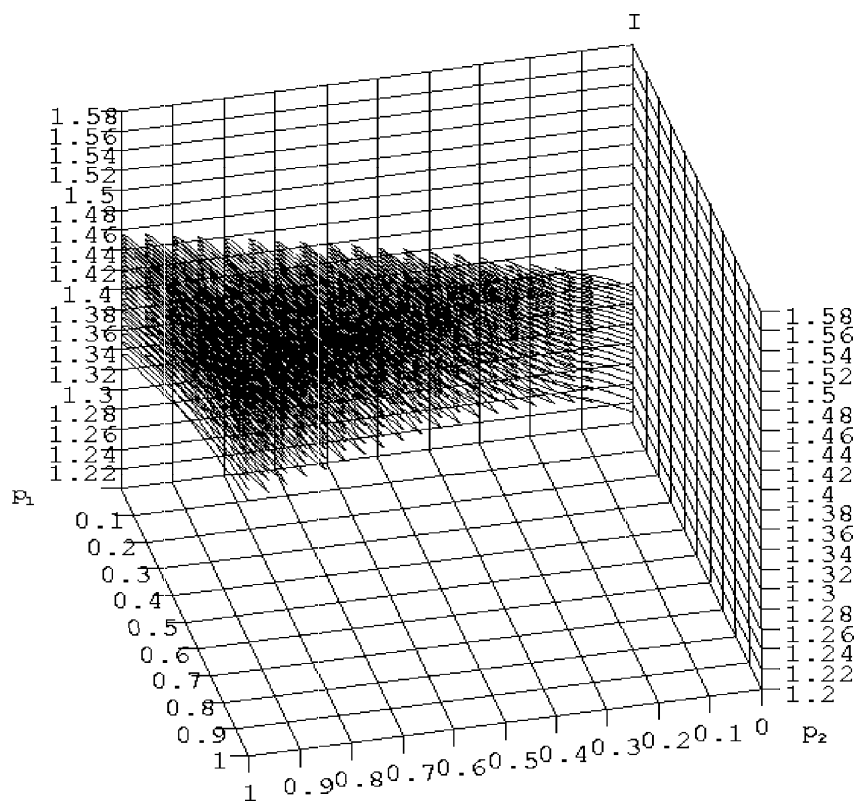
Полученные результаты по оценке дисперсии значений средней поврежденности $\langle \zeta \rangle$, обусловленной вкладом недиагональных повреждений, позволяют оценить подобного же рода дисперсию энтропии и свободной энергии. Выражения для энтропии и свободной энергии континуума с рассеянной поврежденностью, вывод которых основан на канонической термодинамической модели анизотропной поврежденности, приводятся в [8, 9]. Как показывают результаты расчетов (см. формулы (2.13) и (4.29)), энтропия для состояния поврежденности, характеризуемого заданными значениями внутренней энергии и упругой деформации, вычисленная с учетом вклада недиагональных повреждений, будет меньше того значения, которое получалось бы без их учета.



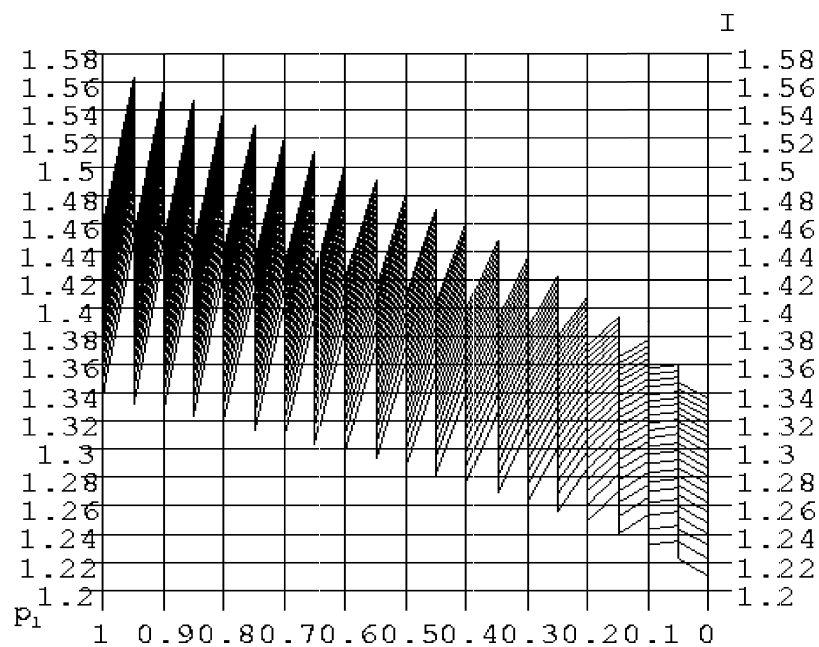
$$I(0, 0, 0) = 1.211125, \quad I(1, 0, 0) = 1.336621, \quad I(1, 1, 0) = 1.456258, \\ I(0, 0, 1) = 1.336326, \quad I(1, 0, 1) = 1.456374, \quad I(1, 1, 1) = 1.570796$$

$$\Delta_3 I|_{p_1=0, p_2=0} = 0.125200, \quad \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=0} = 0.119753, \\ \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=1} = 0.114538$$

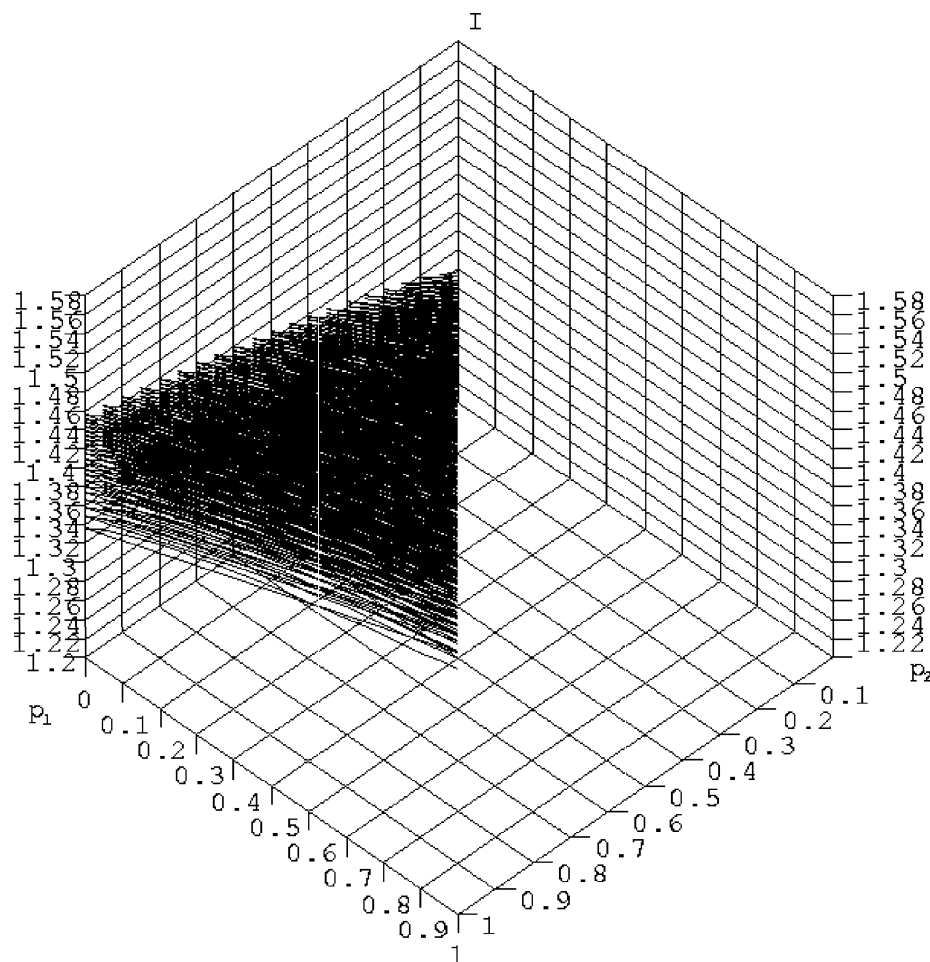
Фиг. 1. Трехмерный слой, заполненный значениями интеграла I (изображена только симметричная относительно плоскости $p_1 = p_2$ часть слоя).



Фиг. 2. Проекция слоя на плоскость $p_1 = 0$.



Фиг. 3. Проекция слоя на плоскость $p_2 = 0$.



Фиг. 4. Трехмерный слой, заполненный значениями интеграла I (изображение равнонаклонено к плоскости рисунка и представлена только симметричная относительно плоскости $p_1 = p_2$ часть слоя).

Литература

- [1] Kachanov L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135p.
- [2] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 210p.
- [3] Chaboche J.L. Continuum Damage Mechanics: Part I – General concepts//J. Appl. Mech., V.55, No.1, 1988, P.59-64.
- [4] Chaboche J.L. Continuum Damage Mechanics: Part II – Damage growth, crack initiation, and crack growth//J. Appl. Mech., V.55, No.1, 1988, P.65-72.
- [5] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series and Products. New York, London: Academic Press, 1965. 1086p.
- [6] Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicist. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. 355p.
- [7] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1953, Vol. I, II; 1955, Vol. III. 302p., 396p., 292p.
- [8] Radayev Y.N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State//J. Non-Equilib. Thermodyn., V.21, No.2, 1996, P.129-152.
- [9] Radayev Y.N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part II. Canonical Damage Growth Rate Equations and Theory of Damage Invariants//J. Non-Equilib. Thermodyn., V.21, No.3, 1996, P.197-222.

ON THE EXACT DIRECTIONAL DAMAGE AVERAGING

Y. Radayev²

An approach to accurate description of a damage state at an average is proposed. The exact averaging procedures for the three-dimensional directional damage are considered. Various integral representations of the averaged damage and the results of the second and the fourth order averaging three-dimensional damage are discussed.

Averaging directional damage requires rapid computations of the elliptic integrals to be implemented. A script of rapidly convergent series needed for numerical analysis of the averaged damage is given.

A primary classification of damage induced anisotropy is advanced by introducing the amplitude damage spectrum and inversed amplitude damage spectrum. The damage, characterizing by narrow band and confluent inversed spectra, is then discriminated. It is shown that the axial symmetric damage is attributed to a confluent inversed amplitude damage spectrum.

The results reported in this paper can be applied to analysis of any continuous directional variable.

²Yuri Radayev, departament of continuum mechanics, Samara state university