НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Н. Евдокимова, Л.С. Пулькина [1]

В работе доказана корректность задачи с интегральными условиями для вырождающегося гиперболического уравнения.

Введение

Уравнение

$$y^2u_{xx} - u_{yy} + au_x = f(x,y) \tag{1}$$

описывает процесс переноса потока влаги в капиллярно-пористых средах с учетом конечной скорости распространения переносимой субстанции [1, 2]. Краевые задачи для этого уравнения исследовались многими авторами [2-5]. В предлагаемой работе рассмотрена иная, не краевая задача для уравнения (1), а именно, данными являются значения интегралов от искомой функции вдоль характеристик, которые могут быть интерпретированы как расход влаги в слое [6].

Интегральные условия возникают также при изучении процессов, связанных с распространением тепла [7, 8], происходящих в плазме [9], при моделировании некоторых технологических процессов [10], а также в задачах биологии [11, 12].

1. Постановка задачи

Преобразуем уравнение (1), перейдя к характеристическим координатам

$$\xi = x - \frac{y^2}{2}, \eta = x + \frac{y^2}{2}.$$

Получим:

$$(\eta - \xi)u_{\xi\eta} + \frac{a+1}{4}u_\xi + \frac{a-1}{4}u_\eta = f(\xi,\eta). \tag{2}$$

Поставим для уравнения (2) в характеристическом треугольнике

$$D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$$

[1]Евдокимова Наталья Николаевна, Пулькина Людмила Степановна, кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет

задачу с интегральными условиями:

$$\int_0^\eta u(\xi,\eta)d\xi = 0, \quad \int_\xi^1 u(\xi,\eta)d\eta = 0. \tag{3}$$

Обозначим $\tilde{L}_2(D)$ - пространство функций $u(\xi,\eta) \in L_2(D)$, с нормой $||u||^2_{\tilde{L}_2} = \int\int_D (\eta-\xi)u^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$. Введем оператор $lv = \int_\eta^1 \int_0^\xi v(t,\tau)dtd\tau$ и рассмотрим скалярное произведение $(Lu, lv)_{L_2}$. После интегрирования по частям и применения условий (3) придем к выражению, лежащему в основе определения обобщенного решения поставленной задачи, где через $B(u,v)$ обозначен результат проделанных преобразований:

$$B(u,v) = \int\int_D [(\eta-\xi)u + \frac{3-a}{4}\int_\eta^1 u(\xi,\tau)d\tau - \frac{3+a}{4}\int_0^\xi u(t,\eta)dt]vd\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\xi u(t,t)dt[\int_\xi^1 v(\xi,\tau)d\tau - \int_0^\xi v(t,\xi)dt]d\xi.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (2)-(3) назовем функцию $u(\xi,\eta) \in \tilde{L}_2(D)$, удовлетворяющую для любой $v(\xi,\eta) \in \tilde{L}_2(D)$ тождеству

$$B(u,v) = (f, lv). \tag{4}$$

2. Теорема единственности

Лемма 1. Пусть $(\eta-\xi)^{-\frac{1}{4}}f(\xi,\eta) \in L_2(D)$. Существует такая постоянная $c_1 > 0$, что обобщенное решение задачи (2)-(3) удовлетворяет неравенству

$$||u||_{\tilde{L}_2} \le c_1||f||_{L_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Положим $v = u$. Тогда

$$B(u,u) = \int\int_D [(\eta-\xi)u^2 + \frac{3-a}{4}u\int_\eta^1 u(\xi,\tau)d\tau - \frac{3+a}{4}u\int_0^\xi u(t,\eta)dt]d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\xi u(t,t)dt[\int_\xi^1 u(\xi,\tau)d\tau - \int_0^\xi u(t,\xi)dt]d\xi.$$

В силу условий (3) второе слагаемое обращается в нуль. В первом слагаемоем сделаем некоторые преобразования, интегрируя по частям:

$$\int\int_D u(\xi,\eta)\int_\eta^1 u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\eta = \frac{1}{2}\int_0^1(\int_\xi^1 u(\xi,\tau)d\tau)^2 d\xi,$$

$$\int\int_D u(\xi,\eta)\int_0^\xi u(t,\eta)dtd\xi d\eta = \frac{1}{2}\int_0^1(\int_0^\eta u(t,\eta)dt)^2 d\eta.$$

В силу условий (3) оба интеграла равны нулю, поэтому получаем

$$B(u,u) = ||u||^2_{\tilde{L}_2}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь правую часть тождества (4) и представим скалярное произведение следующим образом:

$$(f, lu)_{L_2} = ((\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f, (\eta - \xi)^{\frac{1}{4}} lu)_{L_2}.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского и проинтегрировав по частям, получим $(f, lu)_{L_2} \leq \frac{2}{5} ||(\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f||_{L_2} ||u||_{\tilde{L}_2}$. Теперь из полученного неравенства, тождества (4) при $v = u$ и равенства (6) имеем $||u||_{\tilde{L}_2} \leq \frac{2}{5} ||(\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f||_{L_2}$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы сразу же вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Если $(\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f(\xi, \eta) \in L_2(D)$, то существует не более одного обобщенного решения задачи (2)- (3).

3. Теорема существования

Теорема 2. Если $(\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f(\xi, \eta) \in L_2(D)$, то существует обощенное решение задачи (2)-(3), которое непрерывно зависит от данных задачи.

Доказательство. Для доказательства существования решения применим метод Галеркина. Будем искать приближенные решения задачи (2)-(3) в виде

$$u_m(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{m} d_k^m \Phi_k(\xi, \eta),$$

где $\{\Phi_k\}$ - базис конечномерного подпространства $\tilde{L}_2^m(D)$ пространства $\tilde{L}_2(D)$, из соотношений

$$B(u_m, v_m) = (f, lv_m)_{L_2}. \tag{7}$$

Равенства (7) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных d_k^m с матрицей $A = (B(\Phi_i, \Phi_j))$. Покажем, что эта система однозначно разрешима. Предположим, что существует нетривиальное решение $z = (z_1, z_2, ...z_m)$ однородной системы (7). Рассмотрим функцию $u_m^0 = \sum_{k=1}^{m} z_k \Phi_k(\xi, \eta)$. Тогда

$$0 = z^T A z = B(u_m^0, u_m^0) = ||u_m^0||^2,$$

откуда $u_m^0 = 0$. В силу линейной независимости функций $\Phi_k(\xi, \eta)$ $z_k = 0, k = 1, ...m$. Таким образом, система (7) однозначно разрешима. Из леммы 1 для любой функции $u_m(\xi, \eta)$ вытекает справедливость неравенства $||u_m||_{\tilde{L}_2} \leq c ||(\eta - \xi)^{-\frac{1}{4}} f||_{L_2}$, из которого следует, что из последовательности $\{u_m\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $u(\xi, \eta) \in \tilde{L}_2(D)$. Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$ в тождестве (7), убеждаемся в том, что эта функция $u(\xi, \eta)$ и есть обобщенное решение задачи (2)-(3). Непрерывная зависимость решения от данных задачи обеспечивается неравенством (5).

Литература

[1] Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1965. Т.9. N3. С.287-304.

[2] Нахушев А.М. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. 1980. Т.16. N9. С.1643-1649.

[3] Кальменов Т.Ш. Критерий непрерывности решеня задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения // Дифференциальные уравнения. 1971. Т.7. N1. С.178-181.

[4] Водахова В.А.Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения в характеристическом двуугольнике // Дифференциальные уравнения. 1979. Т.15. N1. С.79-91.

[5] Репин О.А. Краевая задача для уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. N1. С.169-171.

[6] Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. N2. С.280-285.

[7] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. N2. P.155-160.

[8] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. N2. С.294-304.

[9] Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Мат. заметки. 1993. Т.54. Вып.4.

[10] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т.16. N11. С.1221-1228.

[11] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М. Высшая Школа, 1995.

[12] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. N1. С.86-94.

A NONLOCAL PROBLEM FOR A DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

N. Eudokimova, L. Pulkina [2]

In this paper the existance, uniqeness and stability of generalized solution for a degenerate hyperbolic equation are prooved.

[2]Natalja Eudokimova, Ludmila Pulkina, departament of mathematics, Samara State University