ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

А.В. Линьков [1]

В работе рассматриваются вопросы обоснования метода Фурье для краевых задач математической физики, в которых дифференциальный оператор содержит инволютивное отклонение в частной производной. Получен ряд результатов, гарантирующий корректность применимости метода Фурье.

Введение

Известно, что в 50–60 гг. произошел "исследовательский взрыв" в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В этот период вышли монографии авторов: Л.Э. Эльсгольца, Н.М. Красовского, С.Б. Норкина, А.Д. Мышкиса, Э. Пинни, Р. Беллмана, К. Кука, А. Халаная и Н. Огюзторели. Однако вопросам решения краевых задач для уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом посвящено небольшое количество работ, и поэтому теория краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом остается весьма далекой от завершения.

Определенный интерес представляет изучение краевых задач для уравнений вида (1)-(3).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(-x,t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(-x,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(-x,t) \tag{3}$$

Характеристические задачи для (2) рассматривались в работе [2]. В [1] приведены постановки классических краевых задач (Дирихле, Неймана и др.) для (1) при ($|\varepsilon|\neq 1$).

Отметим, что при $\varepsilon\neq 0$ уравнения (1)-(3) не поддаются известной классификации. При $\varepsilon=0$ эти уравнения сводятся к классическим уравнениям математической физики – Лапласа, волновому, теплопроводности.

[1] Алексей Владимирович Линьков, кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет

Исследование смешанных краевых задач в прямоугольнике $\{(x,t): x \in [-l,l], t \in [0,T]\}$ или полуполосе $\{(x,t): x \in [-l,l], t \in [0,\infty)\}$ с нулевыми краевыми условиями для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением вида (1)-(3) было проведено методом Фурье. После разделения переменных в данных уравнениях для пространственной переменной решалась задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} &X''(x) - \varepsilon X''(-x) = \lambda X(x), \\ &X(-l) = X(l) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Для каждого уравнения были получены решения классических задач в указанных областях и исследован вопрос об их корректности в зависимости от ε.

Основная цель данной статьи заключается в обосновании метода Фурье для краевых задач, связанных с уравнениями (1)–(3). В первую очередь, решение этой проблемы зависит от доказательства полноты системы функций – решений задачи (4).

1. Полнота тригонометрических систем

Без потери общности далее будем считать, что $l = \pi$, т.е. $x \in [-\pi,\pi]$. Нетрудно сделать вывод, применяя стандартные выкладки, что задача Штурма-Лиувилля (4) имеет при произвольном вещественном ε следующие собственные функции

$$\sin nx, \ \cos(k+0,5)x, \qquad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Система функций (5) ортогональна и полна в* $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями проверяется ортогональность полученной системы тригонометрических функций.

Для доказательства полноты данной системы воспользуемся хорошо известным классическим результатом, что система функций

$$\sin nx, \ \cos kx, \qquad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{6}$$

является ортогональной и полной в $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$. Из сопоставления систем (5) и (6) следует, что система (5) будет полной, если в $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$ справедливо разложение

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \cos(k+0,5)x, \qquad n = \overline{0,\infty}. \tag{7}$$

Очевидно, соотношение (7) будет выполнено, если и только если будет иметь место равенство Парсеваля

$$\|\cos nx\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} {a_k}^2 \, \|\cos(k+0,5)x\|_{L_2}^2, \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{8}$$

где $\|f\|_{L_2}^2 = (f,g)_{L_2}, \ (f,g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$

Рассмотрим подробнее ряд (8). Поскольку справедливы очевидные равенства

$$\|1\|_{L_2}^2 = 2\pi, \quad \|\cos nx\|_{L_2}^2 = \|\cos(k+0,5)x\|_{L_2}^2 = \pi, \quad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{9}$$

то, находя коэффициенты разложения

$$a_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(k+0,5)x\,dx}{\|\cos(k+0,5)x\|_{L_2}^2} = \frac{4(-1)^{n+k}(2k+1)}{\pi(2k+1-2n)(2k+1-2n)}, \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{10}$$

ряд (8) можно записать следующим образом

$$\|\cos nx\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4(-1)^{n+k}(2k+1)}{(2k+1-2n)(2k+1-2n)}, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{11}$$

Последнее соотношение при $n=0$ принимает вид

$$2\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2k+1)^2}$$

и поэтому выполняется в силу тождества $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(2k+1)^2 = \pi^2/8$ из [3].

Далее, пусть n – произвольное натуральное число. Тогда равенство Парсеваля (11) в силу (9) можно записать следующим образом:

$$1 = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k^2. \tag{12}$$

Используя представление полигамма функции из [4],

$$\Psi(m,z) \equiv \frac{d^m}{dz^m}\Psi(z), \quad \Psi(z) \equiv \frac{d^{(m+1)}}{dz^{(m+1)}} \ln\Gamma(z)$$

и вид коэффициентов a_k (10), убеждаемся в справедливости равенства

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} {a_k}^2 = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\Psi(n+0,5)-\Psi(0,5-n)}{n} + \Psi(1,0,5+n) + \Psi(1,0,5-n)\right\}.$$

Из формул симметрии в [4, с.86] следуют соотношения

$$\begin{array}{l} \Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \mathrm{ctg} z, \\ \Psi(1,1-z) + \Psi(1,z) = -\pi \frac{d}{dz}\mathrm{ctg} z. \end{array} \tag{13}$$

Используя аналитичность входящих в (13) при $z = n+0,5$ полигамма функций, получаем, что $\Psi(n+0,5) - \Psi(0,5-n) = 0$, а $\Psi(1,0,5+n) + \Psi(1,0,5-n) = \pi^2$.

Тем самым доказано равенство равенство (12), а значит обосновано соотношение Парсеваля (8) для произвольного n. Следовательно, справедливо разложение (7), и система функций (5) полна в $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$. *Лемма доказана.*

Аналогично обосновывается следующая лемма.

Лемма 2. *Системы функций*

$$\sin(n+0,5)x, \ \cos nx, \qquad n=\overline{0,\infty}, \tag{14}$$

$$\sin(n+0,5)x, \ \cos(n+0,5)x, \qquad n=\overline{0,\infty} \tag{15}$$

ортогональны и полны в $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$.

2. Сходимость тригонометрических рядов

При постановке смешанных краевых задач в математической физике существенную роль играет вопрос об условиях, при выполнении которых обобщенный ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) на компакте. Хорошо известно, что одна непрерывность функции $f(x)$ на компакте не обеспечивает не только равномерной сходимости ряда Фурье, но даже сходимости этого ряда в наперед заданной точке указанного сегмента. В предыдущем разделе была доказана сходимость рядов Фурье по системам функций (5) (или (14), или (15)) в $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$. Достаточные условия сходимости этих рядов к непрерывной функции дает следующая лемма.

Лемма 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)=0$, ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых существуют конечные левая и правая производные, то тригонометрический ряд по системам функций (5), (14), (15) функции $f(x)$ сходится абсолютно на $[-\pi,\pi]$ в равномерной метрике.*

Доказательство аналогично классическому обоснованию равномерной сходимости ряда Фурье по системе (6) (см., например, [5, с.321]). При этом для коэффициентов Фурье

$$\gamma_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(k+0,5)x\,dx, \quad \delta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(k+0,5)x)\,dx, \qquad k=\overline{0,\infty},$$

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(k+0,5)x)\,dx, \quad d_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(k+0,5)x)\,dx, \qquad k=\overline{0,\infty}.$$

получаются следующие соотношения

$$\gamma_k = (k+0,5)d_k, \quad \delta_k = -(k+0,5)c_k, \qquad k=\overline{0,\infty},$$

$$\frac{|\gamma_k|}{k+0,5} \le \frac{1}{2}\left(\gamma_k^2 + \frac{1}{(k+0,5)^2}\right), \quad \frac{|\delta_k|}{k+0,5} \le \frac{1}{2}\left(\delta_k^2 + \frac{1}{(k+0,5)^2}\right), \qquad k=\overline{0,\infty}.$$

В качестве следствия из леммы 3 справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими производными до некоторого порядка $m\in\mathbf{N}$ на $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)=f'(-\pi)=f'(\pi)=\ldots=f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)=0$, ее производная порядка $m+1$ существует и непрерывна всюду на $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых существуют конечные левая и правая производные порядка $m+1$, то тригонометрические ряды по системам функций (5), (14), (15) абсолютно сходятся на $[-\pi,\pi]$ в равномерной метрике. Причем эти ряды можно m раз почленно дифференцировать на $[-\pi,\pi]$, получая абсолютно сходящиеся на $[-\pi,\pi]$ в той же метрике ряды.*

Доказательство аналогично классическому обоснованию соответствующей теоремы математического анализа с учетом леммы 3.

3. Решение смешанной краевой задачи

Для определенности далее будем рассматривать задачу: найти функцию $u(x,t)\in\mathbf{C}^{2,1}(Q)\ \cap\ \mathbf{C}(\overline{Q})$, удовлетворяющую уравнению (3), краевым условиям

$$u(-\pi,t)=u(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{16}$$

и начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[-\pi,\pi], \tag{17}$$

где $Q=\{(x,t): -\pi<x<\pi,\ \ 0<t<T\}$, а также условиям сопряжения

$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=0. \tag{18}$$

Здесь функция φ удовлетворяет условиям леммы 4 с $m = 2$.

Предположим, что решение поставленной задачи существует. Следовательно, при произвольном t по лемме 4 справедливо представление решения в виде равномерно сходящегося на $[-\pi, \pi]$ ряда

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \tag{19}$$

по ортогональной системе функций X_n вида (5). Тогда

$$T_n(t) = (u, X_n)_{L_2}. \tag{20}$$

Поскольку при подстановке $u(x,t)$ в (3) данное уравнение обращается в тождество, то, умножая его скалярно на X_n, получаем

$$(L_{x,\varepsilon} u, X_n)_{L_2} + (\frac{\partial}{\partial t} u, X_n)_{L_2} = 0, \tag{21}$$

под $L_{x,\varepsilon} u$ понимаем оператор $L_{x,\varepsilon} : \mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}$, определяемый формулой $L_{x,\varepsilon} u(x,t) = \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 - \varepsilon \partial^2 u(-x,t)/\partial x^2$, с областью определения $\{u(x) \in \mathbf{C}_2[-\pi,\pi] : u(-\pi) = u(\pi) = 0\}$.

Интегрированием по частям нетрудно проверить условие самосопряженности оператора $L_{x,\varepsilon}$, т.е. выполнения соотношения $(L_{x,\varepsilon} u, v)_{L_2} = (u, L_{x,\varepsilon} v)_{L_2}$. Следовательно,

$$(L_{x,\varepsilon} u, X_n)_{L_2} = (u, L_{x,\varepsilon} X_n)_{L_2} = (u, \lambda_n X_n)_{L_2} = \lambda_n (u, X_n)_{L_2},$$

где λ_n – собственное число оператора $L_{x,\varepsilon}$, соответствующее собственной функции X_n, $\quad n = 0, 1, 2, ...$

Используя правило Лейбница дифференцирования по параметру t под знаком интеграла и учитывая согласно формулировке задачи достаточную гладкость функции $\partial u/\partial t$, получаем $(\partial u/\partial t, X_n)_{L_2} = \partial (u, X_n)_{L_2}/\partial t$.

Подставляя полученное соотношение в (21), имеем

$$\frac{d}{dt} T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = 0, \tag{22}$$

при этом начальные условия для определения функций $T_n(t)$ получаем из (20) при $t = 0$ с учетом (17)

$$T_n(0) = (\varphi, X_n)_{L_2}. \tag{23}$$

Следовательно, искомые коэффициенты $T_n(t)$ однозначно определяются решением задачи Коши (22)-(23).

Таким образом, если решение смешанной краевой задачи существует, то оно однозначно представимо в виде ряда (19), а следовательно, доказана единственность решения задачи (3), (16)-(18).

Исходя из приведенных рассуждений следует, что решение задачи (3), (16) - (18), если оно существует, представимо в виде равномерно сходящегося по x на $[-\pi, \pi]$ ряда (19) при произвольном t из $[0, T]$.

Заметим, что сходимость ряда (19) зависит от ε, т.к. формальное решение смешанной краевой задачи (3), (16) - (18) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-(1-\varepsilon)(k+0,5)^2 t} \cos(k+0,5)x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(1+\varepsilon)n^2 t} \sin nx, \tag{24}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos(k+0,5)x\,dx,\ k=\overline{0,\infty}, \tag{25}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx,\ n=\overline{n,\infty}. \tag{26}$$

Очевидно, что ряд (24) при $|\varepsilon| \le 1$ сходится равномерно как по x на $[-\pi,\pi]$, так и по $t \in [0,+\infty)$. Это следует из оценок

$$|a_k|e^{-(1-\varepsilon)(k+0,5)^2 t} \le |a_k|,\quad k=\overline{0,\infty},\qquad |b_n|e^{-(1+\varepsilon)n^2 t} \le |b_n| \quad n=\overline{1,\infty}.$$

При $\varepsilon < -1$ ($\varepsilon > 1$) равномерной сходимости по x в $\overline{Q}$ функционального ряда (24) нет, поскольку при произвольном $t > 0$ всегда найдется такой номер n_0 (k_0), что при всех $n > n_0$ ($k > k_0$) будет следовать $|b_n|\exp\left(-(1+\varepsilon)n^2 t\right) > M$, ($|a_k|\exp\left(-(1-\varepsilon)(k+0,5)^2 t\right) > M$,) где M – произвольно сколь угодно большое положительное число. Значит нарушаются необходимые условия сходимости функционального ряда (24). Следовательно, при $|\varepsilon| > 1$ решение поставленной задачи может не существовать.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данную ситуацию. Пусть $\varepsilon = 2$. В качестве функции, задающей начальное условие для задачи (3), (16)–(18), возьмем

$$\varphi(x) = \left(\pi^2 - x^2\right)^3.$$

Очевидно, что эта функция обращается в 0 вместе со своими производными до второго порядка включительно в точках $-\pi$ и π. Несложно проверить, что

$$\varphi(x) = -\frac{18432}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(-10+\pi^2(2k+1)^2\right)}{(2k+1)^7}\cos(k+0,5)x.$$

Составим формальное решение рассматриваемой задачи вида (24)

$$u(x,t) = -\frac{18432}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(-10+\pi^2(2k+1)^2\right)}{(2k+1)^7}e^{(k+0,5)^2 t}\cos(k+0,5)x. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться, что при произвольном $t > 0$ ряд (27) расходится.

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Решение задачи (3), (16) - (18) при $|\varepsilon| \le 1$ существует, единственно, непрерывно зависит от начальных данных и представимо в виде (24). При $|\varepsilon| > 1$ всегда найдутся такие начальные данные, что решения задачи не существует.*

Литература

[1] Андреев А.А., Шиндин И.П. О корректности граничных задач для одного уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом. Сб. Аналитические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Куйбышев, 1987. С.3-6.

[2] Андреев А.А., Линьков А.В. О корректных задачах для одного модельного уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом // Сб. Уравнения неклассического типа. Новосибирск, 1997. НГУ. С.3-11.

[3] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752с.

[4] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука. 1979. 832с.

[5] Курс высшей математики и математической физики. Под ред. А.Н. Тихонова, В.И. Ильина, А.Г. Свешникова. Выпуск 2а, Часть II. М.: Наука, 1980. 448с.

SUBSTANTIATION OF A METHOD THE FOURIER FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH AN INVOLUTE DEVIATION

A. Linkov[2]

The problems of substantiation of a method the Fourier for boundary value problems of mathematical physics, in which the differential operator contains an involute deviation in a partial derivative, are considered in this paper. The series of outcomes guaranteeing a correctness of applicability of a method the Fourier is obtained.

[2] Alexei Linkov, departament of mathematics, Samara state university