ДОПОЛНЯЕМЫЕ ГИПЕРПОДПРОСТРАНСТВА БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

В.А. Кушманцева [1]

В работе доказано, что если X — сепарабельная сигма-полная банахова решетка над полем вещественных чисел, не содержащая полос, изометричных гильбертову пространству, то в X не существует 1-дополняемых гиперподпространств.

Пусть линейное топологическое пространство X является топологической прямой суммой подпространств M и N ($M \cap N = 0$). В этом случае подпространство Mназывается *дополняемым*, а N называется прямым топологическим дополнением подпространства M. Как известно, в произвольном линейном топологическом пространстве не всякое подпространство, даже конечномерное, дополняемо. Подпространство M нормированного пространства называется *1-дополняемым*, если нормы проекторов на подпространства M и N равны единице. В настоящей работе исследуются 1-дополняемые гиперподпространства (т.е. подпространства коразмерности 1) банаховых решеток (все определения и теорию можно найти, например, в работе [1]). В частности, полоса Y из банаховой решетки X называется *проекционной полосой*, если

$$X = Y \oplus Y^{\perp}, \quad Y^{\perp} := \{x \in X : |x| \wedge |y| = 0, y \in Y\}.$$

Множество $Y^{\perp}$ также есть полоса в X, называемая полярой к Y. Положительный проектор из X на Y, обращающийся в нуль на поляре к Y, называется *проектором на полосу.* Не всякая полоса произвольной банаховой решетки является проекционной полосой, но если норма пространства порядково непрерывна, то последнее свойство выполнено. Поэтому всюду в настоящей работе будем считать, что X— сепарабельная сигма-полная банахова решетка (ибо в этом случае норма пространства порядково непрерывна).

Вид проектора хорошо известен.

Предложение 1 [2]. Пусть X — банахова решетка. Если P является проектором на полосу, то $P = 1/2(I + V), V^2 = I, V$ — линейная изометрия (I— тождественный оператор).

Одной из важных и не решенных до конца задач функционального анализа является изометрическая классификация банаховых пространств. Причем для симметричных пространств измеримых функций над полем комплексных чисел задача ре-

[1] Кушманцева Вероника Асасовна, кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский государственный университет

шена с использованием эрмитовых операторов, введенных Г.Люмером [3, 4]. Оператор $T : X \to X$ называется *эрмитовым*, если для любого $x \in X, ||x|| = 1, x^*(Tx)$ — вещественное число, где $x^* \in X$ — функционал, достигающий нормы на элементе x. Оператор T называется *диссипативным*, если $Re\, x^*(Tx) \leq 0$. В работе [5] доказано, что

$$T \text{ эрмитовый} \Leftrightarrow ||\exp(itT)|| = 1, \ \ t - \text{любое вещественное число.} \qquad (1)$$

Основным инструментом данной работы являются численно положительные операторы [6]. Приведем необходимые определения.

Итак, пусть X — банахово пространство над полем вещественных чисел, $T : X \to X$ — линейный оператор. Обозначим через $\Pi(X)$ подмножество пространства $X \times X^*$ всех пар (x, x^*) таких, что $||x|| = ||x^*|| = x^*(x) = 1$. Оператор T называется *численно положительным*, если $x^*(Tx) \geq 0$ для любой пары $(x, x^*) \in \Pi(X)$.

Полезное для данной работы наблюдение заключается в том, что аналогом эрмитового оператора в вещественных банаховых пространствах являются численно положительные операторы. Точнее T численно положительный в том и только в том случае, если iT — эрмитовый. Это простое утверждение следует из соотношения (1), теоремы 2.1 работы [7] и очевидного замечания, что если T — численно положительный, то $-T$ — диссипативный.

Главную роль при доказательстве основного результата играет следующее простое утверждение.

Предложение 2. Если T — проектор единичной нормы, то T численно положителен в том и только в том случае, если $||I - T|| = 1$.

Доказательство. Пусть T — численно положительный проектор единичной нормы, тогда для любой пары $(x, x^*) \in \Pi(X)$, $x^*(Tx) \geq 0$, поэтому $x^*(x - Tx) = 1 - x^*(Tx) \leq 1$. С другой стороны, норма любого проектора не меньше единицы. Отсюда $||I - T|| = 1$.

Наоборот, если $||I - T|| = 1$, то $\forall \ (x, x^*) \in \Pi(X)$ будет $x^*(I - T)(x) \leq 1$, или $1 - x^*(Tx) \leq 1$, и T численно положителен.

Оказывается, что понятие эрмитового оператора можно перенести и на отдельные элементы пространства, — это элементы Флинна [6].Условимся через $[u]$ обозначать замкнутое одномерное линейное подпространство, "натянутое" на элемент u. Элемент $u \in X$ называется *элементом Флинна*, если существует численно положительный проектор $P : X \to [u]$.

Обозначим через $F(X)$ множество элементов Флинна; очевидно, что $0 \in F(X)$, и если $u \in F(X), \alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha u \in F(X)$.

Заметим, что на подпространстве $[u]$ всегда существует проектор единичной нормы вида $(u^* \otimes u)/||u||^2, u^* \in X^*$ достигает нормы на u, т.е. $P(\cdot) = u^*(\cdot)u/||u||^2$, $P(u) = u$. Поэтому, если $0 \neq u \in F(X)$, то существует функционал $f \in X^*$ такой, что $f \otimes u$ является численно положительным проектором на $[u]$. Будем говорить, что (u, f) — *пара Флинна*. Понятно, что (u, f) является парой Флинна в том и только в том случае, если $f(u) = 1, f(x)x^*(u) \geq 0$ для всех$(x, x^*) \in \Pi(X)$.

Главная роль эрмитовых операторов заключается в том, что они помогают исключить из рассмотрения случай гильбертова пространства. В этом плане интересна характеристика гильбертова пространства, полученная Берксоном [8], т. к. она обосновывает введение в рассмотрение элементов Флинна.

Предложение 3 [8]. Пусть X — пространство над полем вещественных или комплексных чисел размерности не меньше трех. Тогда X — гильбертово пространство в том и только в том случае, если каждое одномерное подпростран-

ство пространства X является областью значений некоторого эрмитового проектора.

(Иначе: пространство над полем вещественных чисел является гильбертовым в том и только в том случае, если каждый элемент пространства является элементом Флинна).

Вернемся к банаховым решеткам.

Теорема 1. Если в банаховой решетке X множество элементов Флинна не пусто, то X изометрична гильбертову пространству.

Доказательство: пусть $e \in X$ — элемент Флинна единичной нормы, который без ограничения общности можно считать положительным, тогда $P = e^* \otimes e$ — численно положительный проектор единичной нормы на одномерное подпространство $[e]$. Хорошо известно, что на любой сигма-полной банаховой решетке Y можно определить положительный линейный проектор единичной нормы по следующему правилу: для любого $y \geq 0$ и $z \geq 0$ положим $P_y(z) = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} (ny \wedge z)$, а для произвольного $z = z^+ - z^- \in Y$— $P_y(z) = P_y(z^+) - P_y(z^-)$. При этом из определения P_y следует, что

$$y \wedge (z - P_y(z)) = 0, \forall\ y \geq 0, z \geq 0. \tag{2}$$

Теперь заметим, что одномерное подпространство $[e]$ является сепарабельной сигма-полной банаховой решеткой, и на $[e]$ проектор P совпадает с проектором P_e: если $x \in [e]$, то $x = P(x) = e^*(x)e = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} (ne \wedge e^*(x)e) = P_e(x)$. Тем самым проектор P положителен. Из формулы (2) следует, что подпространства $[e]$ и $\Re(I-P)$ состоят из взаимно дизъюнктных элементов. Поэтому $\Re(I-P)$—проекционная полоса, и $I - P$ — положительный проектор единичной нормы ($||I - P|| = 1$ по предложению *2*). Применим теперь к проектору $I - P$ предложение 1: $I - P = 1/2(I + V), V$ — изометрия; отсюда $V = I - 2e^* \otimes e$, т.е. группа изометрий пространства содержит отражение, поэтому X — гильбертово пространство [9], как и утверждалось.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 2. Если банахова решетка X не содержит полос, изометричных гильбертову, то в X не существует 1-дополняемых гиперподпространств.

(Доказательство проводится от противного с использованием предложения *2* и теоремы *1*).

В заключение отметим, что в частном случае симметричных пространств измеримых функций теорема *2* доказана в работе [10].

Именно в [10] доказана следующая теорема: пусть X — вещественное порядково непрерывное пространство функций Кётэ на пространстве с мерой (Ω, μ) и μ безатомной. Тогда гиперплоскость H в X 1-дополняема тогда и только тогда, когда существует неотрицательная измеримая функция ω с носителем $supp\ \omega = B = supp f$, где $f \in H^{\perp} \subset X^*$ такая, что для любой функции $x \in X$ с носителем $supp\ x \subset B$ справедливо равенство

$$||x|| = \left(\int\limits_{\Omega} |x|^2 \omega d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что не существует 1-дополняемых гиперплоскостей в X, если L_2 не изометрично полосе в X. В частности, не существует 1-дополняемых гиперплоскостей в сепарабельных симметричных пространствах на [0,1].

Литература

[1] Lindenstraus J.and Tzafriri L. Classical Banach spaces, vol. 2. Function spaces/ Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New-York. 1979.

[2] Lacey E., Wojtaszczyk P. Banach lattice structures on separable L_p - spaces // Proc. Amer. Soc. 1976. V.54. P.83 -89.

[3] Lumer G. Semi - inner - product spaces//Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V.100. P. 29 - 43.

[4] Зайденберг М.Г. К изометрической классификации симметричных пространств //Докл. АН СССР. 1977. Т.234, 2. С.283 - 286.

[5] Lumer G. Spectral operators, hermitian operators and bounded groups// Acta Sci. Math. 1964. V.25, 1. P. 75 - 85.

[6] Rosenthal H.P. Contractively complemented subspaces of Banach spaces with reverse monotone (transfinite) bases//Longhorn Notes, The University of Texas Functional Analysis seminar, 1984. N 5. P.1 - 14.

[7] Lumer G., Phillips R.S. Dissipative operators in a Banach space // Pacific J. Math. 1961. V.11. P. 679 - 698.

[8] Berkson E. Hermitian projections and orthogonality in Banach spaces // Proc. London Math. Soc. (3). V.24. 1972. P.101 - 118.

[9] Зайденберг М.Г., Скорик А.И. О группах изометрий, содержащих отражения // Функц. анализ и его прилож. Т. 10. Вып.4. 1976. С.87 - 88.

[10] Randrianantoanina Beata. Contractive projections in nonatomic function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. V.123. N 6. 1995. P.1747 - 1750.

COMPLEMENTED HYPERSUBSPACES OF BANACH LATTICES

V. Kushmantceva [2]

It is proved that if X is separable $\text{æ}-$complete real Banach lattice withoute bands isometric to Hilbert space, then in X there are no 1-complemented hypersubspaces (i.e. subspaces with codimention one).

[2] Veronika Kushmantceva, departament of mathematics, Samara state university