ПОСТРОЕНИЕ УСРЕДНЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ГИРОСКОПА

А.К. Кайракбаев[1]

Исследуется известная математическая модель гироскопа в неконтактном подвесе на подвижном основании в случае, когда ускорение основания зависит не только от времени, но и от переменной, скорость изменения которой принадлежит заданному отрезку. Методами теории усреднения показано, что в задаче аппроксимации сверху существует точное аппроксимирующее дифференциальное включение. Установлено, что правая часть построенного дифференциального включения принадлежит двумерной плоскости пространства медленных переменных. На основании анализа усредненной задачи получены оценки изменения медленных переменных исходной задачи на асимптотически большом промежутке времени.

Введение

Рассматривается гироскоп в неконтактном подвесе. Ротор гироскопа имеет сферическую поверхность, предварительно раскручен вспомогательной системой и вращается по инерции в отсутствии сил сопротивления. В [1] подробно изложен вывод уравнений движения и исследован случай, когда основание, на котором установлен подвес, колеблется поступательно по гармоническому закону вдоль некоторой оси. Предполагалось, что сила инерции, действующая на ротор гироскопа, задается в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 (жестко связанной с корпусом) равенствами

$$p_{\xi_1} = p_{\xi_2} = 0, \quad p_{\xi_3} = \cos\gamma,$$

где $\gamma = \omega_0 t + \gamma_0$, ω_0-частота, а γ_0-фаза колебания основания, $p(p > 0)$ – постоянная. Отметим, что все системы координат, использованные в данной работе, являются декартовыми. В работе [2] данная модель была рассмотрена в условиях, когда γ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{\gamma} \in [\omega_1, \omega_2], \qquad \gamma(0) = \gamma_0. \tag{1}$$

Здесь $\omega_1, \omega_2 (\omega_2 > \omega_1 > 0)$ – постоянные. Показано, что в этом случае можно построить дифференциальное включение, аппроксимирующее сверху исходную систему по медленным переменным на асимптотически большом промежутке $T(\mu) =$

[1]Кайракбаев Аят Крымович. Кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета

$[0, 1/\mu]$, $\mu \to 0$, где μ – малый параметр.
Известно, что аппроксимирующие дифференциальные включения позволяют получать различного рода сведения о системе в условиях неполной информации. В данном случае таковым является (1) – ограничение на скорость изменения.

1. Постановка задачи

Предположим, что основание гироскопа движется поступательно вдоль некоторой фиксированной оси, и сила инерции в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 (жестко связанной с корпусом) задана в виде

$$p_{\xi_1} = p_{\xi_2} = 0, \quad p_{\xi_3} = a(t, \gamma),$$

где a – равномерно ограниченная измеримая функция, γ удовлетворяет (1). В системе координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ (жестко связанной с вектором кинетического момента) уравнения движения ротора можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{array}{ll} \dot{z} = \mu F(x, y, \gamma), & z(0) = z_0, \\ \dot{y} = G(x, y, \gamma), & y(0) = y_0, \\ \dot{\gamma} \in [\omega_1, \omega_2], & \gamma(0) = \gamma_0. \end{array} \tag{2}$$

Здесь введен вектор медленных переменных $z = (\delta, l, \theta, \sigma) = (x, \sigma)$ и вектор быстрых $y = (r_{\zeta_1}, r_{\zeta_2}, r_{\zeta_3}, \dot{r}_{\zeta_1}, \dot{r}_{\zeta_2}, \dot{r}_{\zeta_3}, \psi, \varphi, \gamma)$. Правые части F и G определяются из уравнений движения следующим образом:

$$\dot{\delta} = \mu m_{\zeta_1}/l, \quad \dot{l} = \mu m_{\zeta_3}, \quad \dot{\theta} = \mu(m_{\zeta_2}\cos\psi - m_{\zeta_1}\sin\psi)/l, \quad \dot{\sigma} = \mu m_{\zeta_2}/(l\sin\delta),$$

$$\ddot{r}_{\zeta_1} = f_{\zeta_1} - a(t, \gamma)\sin\delta, \quad \ddot{r}_{\zeta_2} = f_{\zeta_2}, \quad \ddot{r}_{\zeta_3} = f_{\zeta_3} + a(t, \gamma)\cos\delta, \quad \dot{\psi} = l - \mu m_{\zeta_2},$$
$$\dot{\varphi} = -\nu + \mu(m_{\zeta_1}\cos\psi - m_{\zeta_2}\sin\psi)/(l\sin\delta),$$

$$f_{\zeta_j} = -q(D)(r_{\zeta_j} + e_{\zeta_j}), \quad j = 1, 2, 3.$$

$$e_{\zeta_1} = \frac{1}{2}\sin\chi[(1 + \cos\theta)\cos(\psi + \varphi) + (1 - \cos\theta)\cos(\psi - \varphi)] + \cos\chi\sin\psi\sin\theta,$$

$$e_{\zeta_2} = \frac{1}{2}\sin\chi[(1 + \cos\theta)\sin(\psi + \varphi) + (1 - \cos\theta)\sin(\psi - \varphi)] + \cos\chi\cos\psi\sin\theta,$$

$$e_{\zeta_3} = sin\chi\sin\theta\sin\varphi + \cos\chi\cos\theta,$$

где $\nu = l\kappa\cos\theta/(1 + \kappa)$; κ – параметр, равный $I_3/I_1 - 1$; I_1, I_3 – моменты инерции ротора, а функции $m_{\zeta_1}, m_{\zeta_2}, m_{\zeta_3}$ являются координатами векторного произведения $[e_\zeta, f_\zeta]$. Дифференциальный полином

$$q(D) = q_0(1 + \tau_0 D), \quad D = \frac{d}{dt},$$

где q_0, τ_0 – положительные постоянные. Для описания смысла переменных приведем схему преобразований систем координат с началом в центре масс ротора [1]

$$\eta -_{\eta_3}^{\sigma} \to \eta' -_{\eta_3'}^{\delta} \to \zeta -_{\zeta_3}^{\psi} \to \zeta' -_{\zeta_1'}^{\theta} \to \mathbf{x}' -_{x_3'}^{\varphi} \to \mathbf{x}.$$

Здесь жирными буквами обозначены системы координат. Например, символом η обозначена ортонормированная система координат η_1, η_2, η_3, а $-^{\sigma}_{\eta_3} \rightarrow$ означает, что декартова система $\eta^{'}$ получается из η поворотом на угол σ вокруг оси η_3. Заметим также, что оси η параллельны осям ξ, а оси **x** направлены по главным осям инерции ротора, l – величина кинетического момента, r_{ζ_j} – проекции радиуса вектора r на оси ζ. Далее, следуя общей схеме построения аппроксимирующих дифференциальных включений [3], рассмотрим порождающую систему (т.е. систему (2) при $\mu = 0$) с произвольными начальными данными

$$\begin{array}{l} \ddot{r}_{\zeta_1} = f_{\zeta_1} - a(t,\gamma)\sin\delta, \quad \ddot{r}_{\zeta_2} = f_{\zeta_2}, \quad \ddot{r}_{\zeta_3} = f_{\zeta_3} + a(t,\gamma)\cos\delta, \\ \dot{\psi} = l, \qquad \dot{\varphi} = -\nu, \qquad \dot{\gamma} \in [\omega_1, \omega_2]. \end{array} \tag{3}$$

Как и в работах [1, 2], будем предполагать, что выполняется неравенство

$$4q_0 - (q_0\tau_0)^2 > 0, \tag{4}$$

которое гарантирует асимптотическую устойчивость системы (3) по переменным r_{ζ_j}, т.е. устойчивость свободных колебаний центра масс ротора при $\mu = 0$. Правые части системы (2) по переменным $x = (\delta, l, \theta)$ будем рассматривать в области

$$P = \{x \in P : |sin| > \delta, l > \rho, |sin\theta| > \rho\},$$

где $\rho(\rho > 0)$ – постоянная.

2. Решение порождающей задачи

Порождающая система (3) с учетом (4) имеет общее решение следующего вида:

$$\begin{array}{l} z = const, \quad \psi = lt + \psi_0, \quad \varphi = -\nu t + \varphi_0, \quad \gamma = \gamma(t), \\ r_\zeta = r^0_\zeta + r^1_\zeta + r^2_\zeta, \quad r^i_\zeta = (r^i_{\zeta_1}, r^i_{\zeta_2}, r^i_{\zeta_3}), \quad i = 0,1,2. \end{array} \tag{5}$$

Здесь φ_0, ψ_0 – произвольные постоянные. r^0_ζ - экспоненциально затухающие члены, которые содержат начальные условия. $r^1_\zeta = -w(D)e_\zeta$, где

$$w(D) = \frac{q(D)}{D^2 + q(D)}.$$

Данное решение отличается от решения, приведенного в [3], только функцией r^2_ζ, которая явно зависит от ускорения $a(t,\gamma)$ и имеет вид

$$r^2_{\zeta_1} = I_\gamma \frac{sin\delta}{\beta}, \quad r^2_{\zeta_2} = 0, \quad r^2_{\zeta_3} = I_\gamma \frac{cos\delta}{\beta}, \tag{6}$$

$$I_\gamma = e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} a(\tau,\gamma) sin(\beta(t-\tau))d\tau, \quad \alpha = \frac{1}{2} q_0\tau_0, \quad \beta = \frac{1}{2}(4q_0 - (q_0\tau_0)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Дальше нам необходимо значение отображения F системы (2) на векторе r^2_ζ вдоль решения порождающей системы. Подставляя (4) и (5) в систему (2), получим

$$F = \frac{I_\gamma}{\beta}(A^{\psi+\varphi} sin(\psi+\varphi) + B^{\psi+\varphi} cos(\psi+\varphi) + A^{\psi-\varphi} sin(\psi-\varphi) + B^{\psi-\varphi} cos(\psi-\varphi) +$$

$$+A^{\psi}sin\psi + B^{\psi}cos\psi + A^{\varphi}sin\varphi + B^{\varphi}cos\varphi + B^0,$$

которое также отличается от [3] только функцией I_γ , а все векторы $A^{\psi+\varphi}, B^{\psi+\varphi}, A^{\psi-\varphi}, B^{\psi-\varphi}, A^{\psi}, B^{\psi}, A^{\varphi}, B^{\varphi}, B^0$ из R^4 имеют тот же вид, что и в [3]. Известно, что для построения аппроксимируюших дифференциальных включений используется усредненная опорная функция [3]. Чтобы ее определить, построим сначала опорную функцию множества $F(z)$.

3. Опорная функция множества $F(z)$

Возьмем произвольный вектор $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ из евклидова пространства R^4 со скалярным произведением. Запишем опорную функцию множества $F = (F^1, F^2, F^3, F^4)$ в виде [3]

$$c(F,h) = \sum_{i=0}^{2} c_{iF}(x, y, \gamma, h),$$

где

$$c_{iF} = h_1\frac{m^i_{\zeta_1}}{l} + h_2 m^i_{\zeta_3} + h_3\frac{m^i_{\zeta_2}cos\psi - m^i_{\zeta_1}sin\psi}{l} + h_4\frac{m^i_{\zeta_2}}{l sin\delta}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Сформулируем здесь две леммы, которые являются аналогами лемм 4 и 5 из [3].

Лемма 1. *Пусть функция* $a : R^+ \times R \to R$ *равномерно ограниченная измеримая и выполняется неравенство* (4). *Тогда функцию* $c_{2F}(x, y, \gamma, h)$ *на решениях порождающей системы* (6) *можно представить в виде*

$$c_{2F}(F,h) = \frac{I_\gamma}{\beta}\sum_{k=1}^{8}\langle v_k(x), h\rangle sin(\beta_k), \quad \beta_k = \alpha_k t + \chi_k, \tag{7}$$

где $\alpha_1 = l + \nu, \quad \chi_1 = 0, \quad \alpha_2 = l - \nu, \quad \chi_2 = 0, \quad \alpha_3 = l, \quad \chi_3 = \pi/2, \quad \alpha_4 = \nu,$
$\chi_4 = \pi/4, \quad \alpha_5 = l + \nu, \quad \chi_5 = \pi/4, \quad \alpha_6 = l - \nu, \quad \chi_6 = \pi/4, \quad \alpha_7 = \nu,$
$\chi_7 = -\pi/4, \quad \alpha_8 = 0, \quad \chi_8 = \pi/2, \quad \chi_0 = \pi/4;$

$$v_1(x) = \{\frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta), -\frac{sin\delta}{2}sin\chi(1+cos\theta), -\frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta, \frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta)\},$$

$$v_2(x) = \{\frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta), -\frac{sin\delta}{2}sin\chi(1-cos\theta), \frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta, \frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta)\},$$

$$v_3(x) = \{-\frac{cos\delta}{l}cos\chi sin\theta, \quad sin\delta cos\chi sin\theta, \quad \frac{sin\delta}{l}cos\chi cos\theta, \quad \frac{ctg\delta}{l}cos\chi sin\theta\},$$

$$v_4(x) = \{0, 0, \frac{cos\delta}{l}sin\chi, \frac{sin\chi}{l}sin\theta\}, \quad v_5(x) = \{0, 0, 0, -\frac{sin(\chi_0)ctg\delta}{l}sin\chi(1+cos\theta)\},$$

$$v_6(x) = \{0, 0, 0, -\frac{sin(\chi_0)ctg\delta}{l}sin\chi(1-cos\theta)\}, \quad v_7(x) = \{0, 0, 0, \frac{2sin(\chi_0)sin\chi}{l}sin\theta\},$$

$$v_8(x) = \{0, 0, 0, -\frac{cos\chi}{l}cos\theta\}.$$

При этом значения ее на векторах $b(x) = (lsin\delta, cos\delta, 0, 0)$ и $-b(x)$ равны нулю.
Доказательство леммы.

$$c_{2F} = \frac{h_1}{l}e_{\zeta_2}r^2_{\zeta_3} - h_2 e_{\zeta_2}r^2_{\zeta_1} + \frac{h_3}{l}[(e_{\zeta_3}r^2_{\zeta_1} - e_{\zeta_1}r^2_{\zeta_3})cos\psi - e_{\zeta_2}r^2_{\zeta_3}sin\psi] + \frac{h_4}{lsin\delta}(e_{\zeta_3}r^2_{\zeta_1} - e_{\zeta_1}r^2_{\zeta_3}) =$$

$$= \frac{I_\gamma}{\beta}[h_1(\frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta)sin(\psi+\varphi) + \frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta)sin(\psi-\varphi) - \frac{cos\delta}{l}cos\chi sin\theta cos\psi) -$$

$$-h_2(\frac{sin\delta}{2}sin\chi(1+cos\theta)sin(\psi+\varphi) + \frac{sin\delta}{2}sin\chi(1-cos\theta)sin(\psi-\varphi) - sin\delta cos\chi sin\theta cos\psi) +$$

$$+h_3(-\frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta sin(\psi+\varphi) + \frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta sin(\psi-\varphi) - \frac{sin\delta}{l}cos\chi cos\theta cos\psi -$$

$$-\frac{cos\delta}{l}sin\chi cos\psi) - h_4(\frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta)cos(\psi+\varphi) + \frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta)cos(\psi-\varphi) +$$

$$+\frac{ctg\delta}{l}cos\chi sin\theta cos\psi - \frac{sin\chi}{l}sin\theta)sin\varphi - \frac{cos\chi}{l}cos\theta)] = \frac{I_\gamma}{\beta}[\{h_1\frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta) -$$

$$-h_2\frac{sin\delta}{2}sin\chi(1+cos\theta) - h_3\frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta + h_4\frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta)\}sin(\psi+\varphi) +$$

$$+\{h_1\frac{cos\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta) - h_2\frac{sin\delta}{2}sin\chi(1-cos\theta) + h_3\frac{sin\delta}{2l}sin\chi sin\theta + h_4\frac{ctg\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta)\}\times$$

$$\times sin(\psi-\varphi) + \{-h_1\frac{cos\delta}{l}cos\chi sin\theta + h_2 sin\delta cos\chi sin\theta - h_3\frac{sin\delta}{l}cos\chi cos\theta - h_4\frac{ctg\delta}{l}cos\chi sin\theta)\}\times$$

$$\times sin(\frac{\pi}{2}+\psi) + \{-h_3\frac{cos\delta}{l}sin\chi - h_4\frac{sin\chi}{l}sin\theta\}sin(\frac{\pi}{2}+\varphi) - h_4\frac{sin(\chi_0)ctg\delta}{2l}sin\chi(1+cos\theta)\times$$

$$\times sin(\frac{\pi}{4}+\psi+\varphi) - h_4\frac{sin(\chi_0)ctg\delta}{2l}sin\chi(1-cos\theta)sin(\frac{\pi}{4}+\psi-\varphi) - h_4\frac{cos\chi}{l}cos\theta +$$

$$+h_4\frac{2sin(\chi_0)}{l}sin\chi sin\theta sin(\varphi - \frac{\pi}{4})].$$

Следовательно, функцию c_{2F} можем представить в виде (7), т.е.

$$c_{2F}(F,h) = \frac{I_\gamma}{\beta}\sum_{k=1}^{8}\langle v_k(x), h\rangle sin\beta_k, \quad \beta_k = \alpha_k t + \chi_k,$$

где $\alpha_1 = l+\nu, \chi_1 = 0, \alpha_2 = l-\nu, \chi_2 = 0, \alpha_3 = l, \chi_3 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_4 = \nu, \chi_4 = \frac{\pi}{4}, \alpha_5 = l+\nu, \chi_5 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_6 = l-\nu, \chi_6 = \frac{\pi}{4}, \alpha_7 = \nu, \chi_7 = -\frac{\pi}{4}, \alpha_8 = 0, \chi_8 = \frac{\pi}{2}, \chi_0 = \frac{\pi}{4}$.
Теперь нетрудно вычислить значения функции c_{2F} на векторах $b(x)$ и $-b(x)$. Поскольку каждое скалярное произведение вида $\langle v_k(x), b(x)\rangle$ и $\langle v_k(x), -b(x)\rangle$ для любого $k = 1, ..., 8$ равно нулю, то и значение функции равно нулю в силу (7).
Лемма доказана.
В следующей лемме функция $c_2(x, y, \gamma, h)$ задана по формуле

$$c_2(x,y,\gamma,h) = c_{2F}(x,y,\gamma,h) = \frac{I_\gamma}{\beta}\sum_{k=1}^{8}\langle v_k(x), h\rangle sin(\beta_k). \tag{8}$$

А функция $c_1(x,y,\gamma,h)$ определена в [3]. Необходимо также заметить, что опорная функция $c_1^0(x,h)$ определяет однозначное отображение $f_0 : P \to R^4$, которое определено в [1, 2] и имеет вид

$$f_0^1(x) = f_0^4(x) = 0,$$

$$f_0^2(x) = -[(1-cos\theta)^2 Imw(il+i\nu) + (1+cos\theta)^2 Imw(il-i\nu)]\frac{sin^2\chi}{4} -$$

$$-sin^2\theta Imw(il) cos^2\chi,$$

$$f_0^3(x) = \{\frac{sin^2\chi}{2}[(1+cos\theta)Imw(il-i\nu) - (1-cos\theta)Imw(il+i\nu) - Imw(i\nu)] -$$

$$-2cos\theta Imw(il)cos^2\chi\}\frac{sin\theta}{2l}.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда опорную функцию множества $F(x,y,\gamma)$ системы (2) на решениях порождающей системы можно представить в виде суммы*

$$c(F,h) = c_1(x,y,\gamma,h) + c_2(x,y,\gamma,h).$$

При выполнении условия $\kappa > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{\Delta\to\infty}\int_0^\Delta c_1(x,y(t),\gamma(t))dt = c_1^0(x,h). \tag{9}$$

Достаточно дословного повторения доказательства леммы 5 из [3].

4. Основное утверждение

Следуя [3], уравнения (2) рассмотрим в области $P \times Q$, где $Q = B_6(s) \times R^3$, $P = \{x \in R^3 : |sin\delta| > \rho, l_1 < l < l_2, \rho < |sin\theta| < sin\theta_1\}$, в котором постоянные θ_1 и ρ определены следующим образом $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ и

$$\rho_1 = \frac{l_1}{1+\kappa}\min\{1-\kappa, \kappa cos\theta_1\}, \quad \rho_2 = \omega_1 - l_1\frac{1+2\kappa}{1+\kappa}, \quad \rho = \min\{\rho_1,\rho_2\}.$$

Здесь $B_6(s)$ – шар достаточно большого радиуса s пространства переменных $(r_{\zeta_1}, r_{\zeta_2}, r_{\zeta_3}, \dot r_{\zeta_1}, \dot r_{\zeta_2}, \dot r_{\zeta_3})$. Прежде чем сформулировать теорему, заметим, что в [4] было введено понятие точного аппроксимирующего дифференциального включения. Показано, что вопрос построения такого включения связан с усредненной опорной функцией

$$M\{c(F,h)\} = c_1^0(x,h) + \Phi,$$

где

$$\Phi(x,h) = \lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\sup_\gamma\int_0^\Delta c_2(t,\gamma(t),x,y(t),h)dt, \tag{10}$$

при этом предельный переход должен выполняться равномерно по начальным условиям и вектору $h \in R^4$, $||h|| = 1$.

Для построения точного аппроксимирующего сверху дифференциального включения

$$\dot\xi \in \mu(f_0(x) + E(x)), \quad \xi(0) = z_0, \tag{11}$$

где $\xi = (x, \sigma)$, нужно уметь вычислять предел (10). Отметим, что предел (10) существует не при любой подынтегральной функции. Предел максимальных средних существует, например, если функция $a(t,\gamma)$ от времени t явно не зависит, а по γ является почти периодической. Доказательство этого факта можно получить на основании [3, лемма 1, с.133].

В следующей теореме двумерная плоскость Π пространства медленных переменных R^4 определяется пересечением двух гиперплоскостей, ортогональных векторам $b(x) = (lsin\delta, cos\delta, 0, 0)$ и $e(x) = (lsin\delta, -cos\delta, 0, 0)$ соответственно.

Теорема. *Пусть существует предел* (10) *и выполняются условия леммы 1. Тогда в области* P *для системы* (2) *существует точное аппроксимирующее сверху дифференциальное включение* (11). *При этом множество* $E(\xi)$ *принадлежит двумерной плоскости* Π *пространства медленных переменных.*

Доказательство теоремы. Существование точного аппроксимирующего сверху дифференциального включения следует из [3, теорема 3, с.80].

Покажем, что $E(\xi) \in \Pi$. Пусть $R^3(x)$ - ортогональное дополнение к вектору $b(x) = (lsin\delta, cos\delta, 0, 0)$ в пространстве R^4. Поскольку множество $E(\xi)$ определяется опорной функцией (10), то достаточно показать, что при любом $x \in R^3$ выполняется равенство

$$\Phi(x, b(x)) = \Phi(x, -b(x)). \tag{12}$$

Согласно лемме 1, функция c_{2F} на векторах $b(x)$ и $-b(x)$ равна нулю, следовательно, в силу (8), при $h = b(x)$ и $h = -b(x)$ значения функции c_2 равны нулю. Поэтому выполняется (12).

Таким образом, $E(\xi)$ принадлежит гиперплоскости, ортогональной вектору $b(x)$.

В [3] построено аппроксимирующее сверху дифференциальное включение, правая часть которого $F_2(\xi)$ принадлежит гиперплоскости пространства медленных переменных, ортогональной вектору $e(x) = (lsin\delta, -cos\delta, 0, 0)$. Поскольку $E(\xi) \subset F_2(\xi)$, то

$E(\xi) \subset \Pi$. **Теорема доказана.**

5. Анализ поведения ротора с помощью усредненного дифференциального включения

Из теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Любое решение дифференциального включения (11) удовлетворяет системе*

$$\begin{array}{ll} \dot{l} = \mu f_0^2(x), & l(0) = l_0, \\ \dot{\delta} = 0, & \delta(0) = \delta_0, \end{array} \tag{13}$$

при этом для всех $t \in T(\mu)$ *выполняются неравенства* $l_0 exp(-\mu q_1 t) \leq l(t,\mu) \leq l_0 exp(-\mu q_2 t)$, *где* q_1, q_2 *– некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Так как множество $E(x) \subset \Pi$, то для любого решения $\xi(t,\mu)$ дифференциального включения (11) выполняются равенства $\langle \dot{\xi}, e(x) \rangle = \mu \langle f_0(x), e(x) \rangle$, $\langle \dot{\xi}, b(x) \rangle = \mu \langle f_0(x), b(x) \rangle$, что равносильно системе

$$\dot{\delta} lsin\delta - \dot{l} cos\delta = \mu f_0^2(x) cos\delta, \quad \dot{\delta} lsin\delta + \dot{l} cos\delta = \mu f_0^2(x) cos\delta,$$

из которой и следует (13). Доказательство неравенств аналогично [3], т.к. правая часть первого уравнения (13) допускает оценки $-q_1 l \leq f_0^2(x) \leq -q_2 l$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Для любого решения дифференциального включения (11) на промежутке $T(\mu)$ с начальными данными $\theta(0) = \theta_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$ выполняются неравенства*

$$\begin{array}{l} \theta(t,\mu) \le arctg(\sqrt{\frac{M}{Al_1+M}} tg(Q_0 + \sqrt{\frac{M(Al_1+M)}{l_1}})), \\ \sigma(t,\mu) \le \sigma_0 + \mu M t/l_1, \end{array} \tag{14}$$

где $M = \max\{M^{\psi+\varphi}, M^{\psi-\varphi}, M^{\psi}, M^{\varphi}, M^0\}$, $\quad Q_0 = arctg(\sqrt{\frac{Al_1+M}{M}} tg(\theta_0)$,
$B = \max\{Imw(il+i\nu), Imw(il-i\nu), Imw(i\nu), Imw(il)\}$, $\quad 2B \le A$.
Поскольку дифференциальное включение (11) аппроксимирует систему (2) сверху, то свойства, выполненные для всех решений дифференциального включения, выполняются и для решений исходной системы.

Таким образом, на основании первого следствия можно сделать вывод, который заключается в том, что движение ротора гироскопа в неконтактном подвесе на асимптотически большом промежутке $T(\mu)$ и на подвижном основании по переменным l, δ при $\kappa > 0$ не отличается от поведения ротора гироскопа на неподвижном основании. Следовательно, движение основания не сказывается на эволюции переменных l, δ на асимптотически большом промежутке времени.

Согласно второму следствию, углы θ, σ ограничены некоторыми постоянными, которые определяются значениями пределов максимальных средних $M^{\psi+\varphi}$, $M^{\psi-\varphi}$, M^{ψ}, M^{φ}, M^0, непосредственно зависящих от ускорения $a(t,\gamma)$.

Литература

[1] Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988.

[2] Филатов О.П. О движении гироскопа в неконтактном подвесе при многозначном возмушении основания // Известия АН СССР. МТТ. 1992. N2. С.18-24.

[3] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998.

[4] Филатов О.П. Точные дифференциальные включения в задачах усреднения //Дифференциальные уравнения. 1995. Т31. N1. С. 54-62.

[5] Филатов О.П. Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений //Математ. заметки. 1991.Т.50, Вып.3. С.135–142.

CONSTRUCTION OF THE AVERAGE DIFFERENTIAL INCLUSION FOR SOME MODEL of GYROSCOPE

A. Kairakbaev [2]

The mathematical model of the noncontactly suspended gyroscope on a mobile platform is investigated when the platform's acceleration being function of time and some variable, the latter has a velocity of the change which is involved in the assign segment. By the averaging schemes it is shown that the exact upper approximate differential inclusion exists in the upper approximation problem. It is determined that the right-hand side of the constructed differential inclusion belongs to a two-dimensional plane of the slow variables' space. The slow variables of the issue system have been evaluated on the asimptotic great segment.

[2] Ajat Kairakbaev, departament of mathematics, Samara state university