БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП, IV

В.Е. Воскресенский[1]

Предыдущие главы опубликованы в выпусках Вестника СамГУ N2,N4 за 1997 год и в N2 за 1998 год. В этой заключительной части работы изложена теория R-эквивалентности на линейных алгебраических группах. Группа классов R-эквивалентности является еще одним бирациональным инвариантом в категории линейных k-групп, и эта категория представляет собой наиболее естественную область применения R-эквивалентности. Понятие R-эквивалентности введено в арифметику многообразий Ю.И.Маниным [2]. Данный раздел содержит результаты Кольо-Телена и Сансюка по вычислению R-эквивалентности на алгебраических торах, результаты автора по изучению R-эквивалентности на полупростых группах и связям группы классов R-эквивалентности на унимодулярной группе с группой Уайтхеда $SK_1(A)$, изучавшейся Платоновым [2]. Описано отношение R-эквивалентности на группах присоединенного типа, включая последние результаты Меркурьева. В заключение вычислены числа классов алгебраических торов двух наиболее часто встречающихся видов. Это приводит к интересным индекс-формулам в арифметике числовых полей.

Содержание

[1] Воскресенский Валентин Евгеньевич, кафедра алгебры и геометрии, Самарский государственный университет

Глава VI. R-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие над полем k, причем множество $X(k)$ непусто. Следуя Манину [2], назовем две точки $x, y \in X(k)$ *строго R-эквивалентными*, если существует рациональное k-отображение $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ такое, что $f(0) = x$, $f(\infty) = y$. Ясно, что все k-точки аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ строго эквивалентны одной фиксированной точке. Это же верно и для открытых по Зарисскому непустых подмножеств в $\mathbf{A}^n$. Вернемся к многообразию X.

Определение. Точки $x, y \in X(k)$ называются *R-эквивалентными* (в обозначениях: $x \sim y$), если существует конечная последовательность $x = x_1, x_2, .., x_n = y$ точек в $X(k)$ такая, что точки x_i, x_{i+1} – строго R-эквивалентны.

Множество $X(k)$ разбивается на классы относительно R-эквивалентности, обозначим это разбиение через $X(k)/R$. Понятно, что если X – специально, т.е., если каждая его точка обладает открытой окрестностью, изоморфной открытому подмножеству в $\mathbf{A}^n$, то $X(k)/R = \{x\}$. Таким образом, отношение R измеряет в этом смысле отклонение X от специальности. В книге Манина [2] множество $X(k)/R$ изучалось в случае, когда X являлось кубической поверхностью. Оказалось, что $X(k)/R$ – бирациональный инвариант в классе кубических унирациональных поверхностей, имеющий важный арифметико-геометрический смысл. Дальнейший существенный вклад в теорию R-эквивалентности внесли Кольо-Телен и Сансюк [1]. Они обнаружили, что R-эквивалентность великолепно вписывается в категорию линейных алгебраических групп. Можно сказать, что это наиболее естественная область применения R-эквивалентности к алгебраическим многообразиям. Кольо-Телен и Сансюк обстоятельно исследовали R-эквивалентность на алгебраических торах. Они свели задачу к вычислению 1-когомологий группы Нерона-Севери соответствующей проективной модели. Это позволило получить хорошие формулы для конкретных вычислений. Автору удалось вычислить группу R-эквивалентности на внутренних формах односвязной группы Шевалле типа A_n, что позволило установить бирациональную природу группы Уайтхеда $SK_1(A)$, успешно изучавшуюся в школе Платонова (Воскресенский [7]). Недавно Меркурьев [1] нашел способ вычисления R-эквивалентности на полупростых присоединенных группах и построил примеры нерациональных присоединенных групп, что опровергает одну из известных гипотез. Перейдем к последовательному изложению этих важных конструкций.

§16. ГРУППА R-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

16.1. Первоначальные свойства R-эквивалентности на многообразиях. Будем считать, что поле k имеет характеристику нуль, хотя многие результаты

справедливы и в более общем случае. Если L – расширение поля k и X – алгебраическое многообразие над k, то символ $X(L)/R$ будет означать $(X \otimes_k L)(L)/R$. Естественное отображение $X(k)/R \to X(L)/R$, как будет показано далее, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом в общем случае. Следующие факты вытекают непосредственно из определения.

Предложение 1. Пусть X и Y – неприводимые алгебраические многообразия над полем k. Тогда

1) всякий морфизм $f : X \to Y$ определяет отображение множеств $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$;

2) $(X \times_k Y)(k)/R = X(k)/R \times Y(k)/R$;

3) $R_{F/k}(X)(k)/R = X(F)/R$;

здесь X – многообразие над полем F. $\triangle$

Бирациональная инвариантность множества $X(k)/R$ просматривается в следующем предложении Кольо-Телена и Сансюка [1].

Предложение 2. Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия над полем k. Всякое *рациональное* отображение $f : X \to Y$ определяет отображение множеств $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$, которое совпадает с естественным в точках, где f определено. Если f – бирациональное отображение над полем k, то f_R является биекцией $X(k)/R \cong Y(k)/R$, т.е. $X(k)/R$ есть бирациональный инвариант в категории гладких неприводимых проективных k-многообразий. Кроме того, $X(k)/R$ состоит из одного класса для многообразий, рациональных над полем k (в записи $X(k)/R = 0$).

Доказательство. Пусть сначала $f : X \to Y$ есть раздутие схемы Y с центром в гладкой замкнутой k-схеме Z, лежащей в Y, $\operatorname{codim} Z = r + 1$. Слой отображения f в каждой точке из $Y(k)$ есть проективное пространство размерности 0 или r, поэтому f_R сюръективно и k-точки в слоях R-эквивалентны между собой. Для доказательства инъективности отображения f_R достаточно показать, что для любых двух строго R-эквивалентных точек y' и y'' из $Y(k)$ накрывающие их точки x' и x'' из $X(k)$ также R-эквивалентны. Так как многообразие Y полное, то точки y' и y'' лежат в образе некоторого k-морфизма $\varphi : \mathbf{P}^1_k \to Y$, $\varphi(0) = y'$, $\varphi(1) = y''$. Если дуга $\varphi(\mathbf{P}^1_k)$ не содержится в Z, то φ допускает k-накрытие $\psi : \mathbf{P}^1_k \to X$, поэтому $x' \sim x''$. В противном случае, пусть y' и y'' лежат в $U(k)$, где U – открытая область в Z такая, что $U \times_Y X$ k-изоморфна $U \times_k \mathbf{P}^r$. Теперь достаточно рассмотреть накрывающий k-морфизм $\psi : \mathbf{P}^1_k \to X$, определяемый по правилу $t \to (\varphi(t), z)$, где z – фиксированная точка из $\mathbf{P}^r(k)$. В общем случае Z имеет конечное покрытие открытыми областями с указанными свойствами, что и доказывает инъективность отображения f_R для моноидального морфизма f. Пусть теперь $f : X \to Y$ – произвольный бирациональный k-морфизм. Согласно Хиронаке [1], существует коммутативная диаграмма бирациональных k-морфизмов

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X & \overset{f}{\to} & Y \end{array},$$

в которой две верхние стрелки являются композициями моноидальных преобразований. Из первой части нашего доказательства следует, что верхние стрелки в индуцированной коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} Z(k)/R & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X(k)/R & \to & Y(k)/R \end{array}$$

являются биекциями, откуда f_R – биекция. Наконец, пусть теперь $f : X \to Y$ является рациональным отображением над полем k. Тогда существует гладкое проективное k-многообразие Z и два k-морфизма $g,\ h$, делающих коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow g & & \searrow h \\ X & \overset{f}{\to} & Y \end{array},$$

причем g – бирационально. Имеем отображение $X(k)/R \to Y(k)/R$, определяемое композицией $h_R \circ g_R^{-1}$. Его мы и возьмем в качестве f_R, поскольку оно не зависит от тройки (Z, g, h). $\triangle$

Следствие 1. Пусть X – гладкое k-многообразие и $f : X \to Y$ – k-рациональное отображение многообразия X в проективное гладкое k-многообразие Y. Тогда имеем отображение $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$.

В самом деле, пусть X' – гладкая проективная модель многообразия X, $i : X \to X'$ – естественный морфизм вложения. Отображение f продолжается до рационального отображения $X' \to Y$. Однозначно определена композиция отображений

$$X(k)/R \to X'(k)/R \to Y(k)/R,$$

которую мы и будем обозначать символом f_R. $\triangle$

Следствие 2. Пусть $i : X \to X'$ – гладкая компактификация гладкого k-многообразия X. Тогда отображение $i_R : X(k)/R \to X'(k)/R$ не зависит от выбора X'. $\triangle$

16.2. Бирациональная инвариантность R-эквивалентности в группах. Пусть теперь G – связная линейная алгебраическая группа над полем k. Группа G – унирациональна, ибо поле k имеет характеристику нуль, поэтому $G(k)$ – бесконечное множество. Групповая структура в $G(k)$ согласована с R-эквивалентностью, поэтому множество $G(k)/R$ снабжается естественным строением группы. До сих пор не ясно, всегда ли группа $G(k)/R$ коммутативна. Пусть $g \in G(k)$ и $< g >$ – класс R-эквивалентности. Поскольку G унирациональна, то существует доминантный k-морфизм φ открытого множества V из $\mathbf{A}_k^n$ в G. Используя сдвиг на элемент из $G(k)$, можно считать, что $\varphi(V(k))$ содержит единицу e группы $G(k)$. Тогда $\varphi(V(k)) \subset < e >$, поэтому класс $< e >$, а следовательно, и любой R-класс $< g >$ плотен по Зарисскому в $G(k)$. Класс $< e >$ является нормальным делителем $G(k)$ и $G(k)/R$ есть фактор-группа $G(k)/ < e >$.

Предложение 1. Всякие две точки, R-эквивалентные в $G(k)$, являются строго R-эквивалентными.

Доказательство. Пусть $g,\ g' \in G(k),\ g \sim g'$. Существует цепочка элементов $g_0,\ g_1, .., g_n$ в $G(k)$ таких, что $g_0 = g,\ g_n = g'$ и элементы $g_i,\ g_{i+1}$ строго R-эквивалентны. По индукции можно считать, что $n = 2$ и $g_0 = e$. Существуют две точки $f_0(t)$ и $f_1(t)$ из $G(k(t))$ со свойствами: $f_0(0) = e,\ f_0(1) = g_1,\ f_1(0) = g_1,\ f_1(1) = g_2$. Пусть $h(t) = f_1(t)(f_0(1-t))^{-1}$. Тогда $h(0) = e = g_0$ и $h(1) = g_2$. $\triangle$

Предложение 2. Пусть $h(t)$ – чисто трансцендентные расширения поля k. Тогда естественное отображение

$$\varphi : G(k)/R \to G(k(t))/R$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $f(t) \in G(k(t))$. Существует точка $t_0 \in k$, в которой элемент $f(t)$ определен. Тогда точки $f(t)$ и $f(t_0)$ R-эквивалентны. Это доказывает

сюръективность отображения φ. Пусть $g \in G(k) \subset G(k(t))$, $g \sim e$ в $G(k(t))$. Из предложения 1 следует, что существует элемент $h(t,u) \in G(k(t,u))$ такой, что $h(t,0) = e$ и $h(t,1) = g$. Далее существует точка $t_0 \in k$ такая, что функция $h(t_0,u)$ определена при $u = 0, 1$. Тогда $h(t_0,0) = e$ и $h(t_0,1) = g$. $\triangle$

Предложение 3. Пусть U – открытое по Зарисскому непустое подмножество в G. Тогда естественное отображение

$$i : U(k)/R \to G(k)/R$$

является биекцией.

Доказательство. В самом деле, пересечение $< g > \cap U(k)$ – непусто, поэтому отображение i является сюръективным. Далее, пусть $x, y \in U(k)$ и $x \sim y$ в $G(k)$. По предложению 2 существует элемент $f \in G(k(t))$ такой, что $f(a) = x$, $f(b) = y$ для некоторых $a, b \in k$. Поскольку функцию f можно рассматривать и как рациональное отображение $f : \mathbf{P}^1 \to U$, то $x \sim y$ в $U(k)$. $\triangle$

Теорема. Пусть G и G' – связные линейные алгебраические группы над полем k характеристики нуль. Если многообразия G и G' бирационально эквивалентны над полем k, то существует биекция множеств

$$G(k)/R \simeq G'(k)/R.$$

Это следует из предложения 3. $\triangle$

Замечание. Биекцию в данной теореме можно выбрать так, чтобы единица группы $G(k)/R$ переходила бы в единицу группы $G'(k)/R$. До сих пор неясно, будет ли в этом случае эта биекция групповым изоморфизмом. Далее, теорема остается справедливой, если заменить бирациональную эквивалентность на стабильную эквивалентность.

§17. R-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРАХ

17.1. Вялая резольвента тора и R-эквивалентность. Алгоритма, позволяющего вычислить группу $G(k)/R$ для общих полупростых групп G, до сих пор не найдено. Надежду на успех в будущем дают как всегда исследования в области алгебраических торов. Как показали Кольо-Телен и Сансюк [1], в категории торов имеется прекрасная формула для вычисления бирационального инварианта $T(k)/R$. Правда, оказалось, что инвариант $T(k)/R$ является одним из производных хорошо известного бирационального инварианта $[\operatorname{Pic} \bar{X}(T)]$. Далее мы покажем, что в категории всех линейных алгебраических групп бирациональный инвариант $G(k)/R$ не выводим из $[\operatorname{Pic} \bar{X}(G)]$.

Пусть L/k – конечное расширение Галуа с группой $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, $C(L/k)$ – категория алгебраических k-торов, разложимых над L. Возьмем тор $T \in C(L/k)$, имеем вялую резольвенту

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0, \ \hat{N} \in H^{-1}(\Pi)$$

и двойственную последовательность торов категории $C(L/k)$

$$1 \to N \to S \xrightarrow{\beta} T \to 1, \tag{1}$$

откуда точная последовательность когомологий

$$1 \to N(k) \to S(k) \xrightarrow{\beta} T(k) \xrightarrow{\delta} H^1(L/k, N(L)) \to 1.$$

Поскольку многообразие S есть открытая часть аффинного пространства $\mathbf{A}^n_k$, $n = \dim S$, то $\beta(S(k)) \subset <1> \subset T(k)$. Отсюда получаем эпиморфизм

$$H^1(L/k, N(L)) = T(k)/\beta(S(k)) \to T(k)/R.$$

Покажем, что $\beta(S(k)) =< 1 >$. Пусть $x \in< 1 >$. Тогда существует рациональное отображение $f : \mathbf{P}^1_k \to T$ и точки $a, b \in \mathbf{P}^1(k)$ такие, что $f(a) = 1$, $f(b) = x$. Пусть U – открытая часть $\mathbf{P}^1_k$ такая, что ограничение f на U регулярно и $a, b \in U(k)$. Структурный морфизм $U \to \operatorname{Spec} k$ определяет коммутативную диаграмму этальных когомологий с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & N(k) & \to & S(k) & \stackrel{\beta}{\to} & T(k) & \stackrel{\delta}{\to} & H^1(k,N) & \to & 0 \\ & & \downarrow\gamma_1 & & \downarrow\gamma_2 & & \downarrow\gamma_3 & & \downarrow\gamma_4 & & \\ 0 & \to & \Gamma(U,N) & \to & \Gamma(U,S) & \stackrel{\beta_1}{\to} & \Gamma(U,T) & \stackrel{\delta_1}{\to} & H^1(U,N) & \to & H^1(U,S), \end{array} \tag{2}$$

в которой γ_1, γ_2, γ_3 являются мономорфизмами. Кольо-Телен и Сансюк [1] доказывают следующее важное утверждение

Предложение 1. Пусть U – открытая часть в $\mathbf{A}^n_k$, содержащая рациональную точку. Если модуль $\hat{N}$ – вялый, то гомоморфизм $H^1(k, N) \to H^1(U, N)$, определяемый структурным морфизмом, является изоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Лере

$$H^p(k, H^q(\bar{U}, N)) \Rightarrow H^n(U, N),$$

возникшую из структурного морфизма $U \to \operatorname{Spec} k$. Поскольку $\operatorname{Pic} \bar{U} = 0$, то имеем равенство $H^1(\bar{U}, N) = 0$ и, следовательно, естественный морфизм

$$H^1(k, H^0(\bar{U}, N)) = H^1(k, \operatorname{Hom}(\hat{N}, \bar{k}[U]^*) \to H^1(U, N)$$

является биекцией. Группа $\bar{k}[U]^*$ есть прямое произведение $\bar{k}^* \times D$, где D – мультипликативная подгруппа, порожденная нормированными неприводимыми многочленами, обращающимися в нуль вне $\bar{U}$. Разложение $\bar{k}^* \times D$ $\mathcal{G}$-модульное, где $\mathcal{G}$ – группа Галуа расширения $\bar{k}/k$. Имеем

$$\operatorname{Hom}(\hat{N}, \bar{k}[U]^*) = \hat{N}^0 \otimes \bar{k}[U]^* = (\hat{N}^0 \otimes \bar{k}^*) \times (\hat{N}^0 \otimes D), \ \hat{N}^0 = \operatorname{Hom}(\hat{N}, \mathbf{Z}).$$

Поскольку группа $\mathcal{G}$ действует на D перестановками и $\hat{N}^0$ – вялый модуль, то $H^1(k, \hat{N}^0 \otimes D) = 0$. Следовательно, $H^1(k, H^0(\bar{U}, N)) = H^1(k, N(\bar{k}))$. $\triangle$

Следствие. Пусть S – квазиразложимый k-тор. Тогда $H^1(U, S) = 0$ для любого открытого подмножества $U \subset \mathbf{A}^n_k$.

Это следует из равенства $H^1(k, S) = 0$. $\triangle$

Вернемся к диаграмме 2. Предложение 1 и его следствие показывают, что δ_1 является эпиморфизмом, а γ_4 – изоморфизмом. Для нашей функции $f : U \to T$ с условиями $f(a) = 1$, $f(b) = x \in T(k)$ существует $y \in T(k)$ такой, что $\gamma_3(y) = fg$, $g \in Im(\beta_1)$. Функция $\gamma_3(y)$ – постоянная, поэтому $\gamma_3(y) = f(a)g(a) = g(a)$. Отсюда $f(b)g(b) = g(a)$, или $x = g(a)g(b)^{-1}$. Это показывает, что $< 1 >= \beta(S(k))$, и мы получаем теорему Кольо-Телена и Сансюка.

Теорема. Пусть T – k-тор. Последовательность (1) определяет изоморфизм групп

$$T(k)/R \cong H^1(k, N(\bar{k})).$$

Всякий R-класс параметризуется множеством $S(k)$. $\triangle$

Следствие 1. Группа $T(k)/R$ периодична и ее экспонента делит степень $(L:k)$, где L/k – минимальное поле разложения тора T. $\triangle$

Следствие 2. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа над полем k. Тогда группа $G(k)/R$ периодична и имеет ограниченный показатель.

Доказательство. Пусть $x \in G(k)$, $x = x_s x_u$ – разложение Жордана в произведение полупростой и унипотентной части. Многообразие унипотентной группы изоморфно аффинному пространству, поэтому все унипотентные элементы x_u R-эквивалентны единице. Таким образом, x эквивалентен x_s. Элемент x_s лежит в некотором торе группы G, поэтому, по следствию 1, его порядок ограничен степенью поля разложения этого тора. Но минимальные поля разложения торов группы G имеют ограниченную степень. $\triangle$

Предложение 2. Пусть $T \in C(L/k)$ и группа Галуа Π расширения L/k метациклическая. Тогда $T(k)/R = 0$.

Доказательство. Мы видели в главе II, что в данном случае Π-модуль Пикара $\hat{N}$ является прямым слагаемым перестановочного модуля. Поэтому имеем равенство $H^1(k, N(\bar{k})) = H^1(L/k, N(L)) = 0$. В частности, на всех вещественных торах, а значит, и на всех связных линейных группах G, определенных над полем вещественных чисел, R-эквивалентность нулевая. $\triangle$

17.2. Торы специального вида. Рассмотрим теперь случай норменных гиперповерхностей $T = R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$, где L/k – расширение Галуа с группой Π. Вялая резольвента модуля $\hat{T}$ находится в два приема

$$0 \to I \to \mathbf{Z}[\Pi] \to \mathbf{Z} \to 0,$$

$$0 \to \hat{N}^0 \to \Lambda \to I \to 0,$$

где Λ – свободный Π-модуль, а $I^0 = \hat{T}$. Из этих последовательностей следует, что Π-модуль $\hat{N}$ является вялым, т.е. $H^{-1}(\Pi', \hat{N}) = 0$ для всех подгрупп Π' группы Π. Имеем равенства

$$H^1(L/k, N(L)) = H^1(L/k, \hat{N}^0 \otimes L^*) = H^0(L/k, I \otimes L^*) = H^{-1}(L/k, L^*),$$

откуда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $T = R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$ и L/k – нормально, тогда

$$T(k)/R = H^{-1}(L/k, L^*). \quad \triangle$$

Использование теорем двойственности Тейта и Накаямы позволяет в случае локальных и числовых полей получать более деликатные соотношения.

Теорема 2. Пусть T – тор над $\wp$-адическим полем k. Тогда

$$T(k)/R = H^1(k, N) = H^1(k, \hat{N})$$

и, следовательно, группа $T(k)/R$ – конечна. $\triangle$

Пусть k – поле алгебраических чисел конечной степени над $\mathbf{Q}$, $(L:k) < \infty$, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, M – произвольный Π-модуль. Положим

$$Ш^q(L/k, M) = Ш^q(\Pi, M) = \mathrm{Ker}\,[H^q(\Pi, M) \to \prod_v H^q(\Pi_v, M)],$$

$\Pi_v = \mathrm{Gal}\,(L_\omega/k_v)$ – группа разложения, $\Pi_v \subset \Pi$. Пусть $\hat{N}$ – вялый Π-модуль, т.е. $H^{-1}(\Pi', \hat{N}) = 0$ для всех подгрупп Π' групп Π. Для соответствующего L/k-тора

N имеем равенства $H^1(\Pi_v, N(L_\omega)) = 0$ для всех точек v поля k, неразветвленных в L. Это следует из цикличности группы Π_v и двойственности Тейта-Накаямы: $H^1(\Pi_v, N(L_\omega)) \cong H^1(\Pi_v, \hat{N})^\vee$. Поэтому произведение $\prod_v H^1(\Pi_v, N)$ на самом деле конечно, что позволяет ввести для вялых торов следующее определение:

$$Ч^1(L/k, N) = Ч^1(\Pi, N) = Coker[H^1(\Pi, N) \to \prod_v H^1(\Pi_v, N)].$$

Если $H^q(\Pi_v, M) = 0$ почти для всех нормирований v, то можно определить и $Ч^q(\Pi, M)$ аналогичным способом.

Изоморфизмы двойственности Тейта-Накаямы, локальные и глобальные, позволяют написать следующую точную последовательность конечных абелевых групп

$$0 \to Ш^2(L/k, \hat{N})^\vee \to H^1(L/k, N) \to Ч^1(L/k, \hat{N})^\vee \to 0 \qquad (1)$$

или дуальную ей

$$0 \to Ч^1(L/k, N) \to H^1(k, \hat{N})^\vee \to Ш^2(L/k, N) \to 0,$$

см. Кольо-Телен и Сансюк [1].

Теорема 3. Пусть T – тор, определенный над числовым полем k. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to Ш^2(L/k, \hat{N})^\vee \to T(k)/R \to Ч^1(L/k, \hat{N})^\vee \to 0,$$

где $[\hat{N}] = p(T)$. В частности, группа $T(k)/R$ конечна.

Доказательство состоит в соединении изоморфизма теоремы п.17.1 с последовательностью (1). $\triangle$

Вернемся к торам $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m)$ теоремы 1. Учитывая, что

$$H^q(\Pi', \hat{N}) \cong H^{q+2}(\Pi', \mathbf{Z}),\ \Pi' \subset \Pi,$$

имеем следующее утверждение.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 имеется точная последовательность

$$0 \to Ш^4(\Pi, \mathbf{Z})^\vee \to T(k)/R \to Ч^3(\Pi, \mathbf{Z})^\vee \to 0. \quad \triangle$$

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Пусть $L = L_1 \otimes_k L_2$ – свободный композит двух квадратичных расширений глобального поля k, $\Pi = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(L : k) = 4$, $T = T^{(1)}_{L/k}(G_m)$, $\dim T = 3$. Пусть s – количество точек v поля k таких, что $\Pi_v = \Pi$. Известно, что $H^3(\Pi, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H^4(\Pi, \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. Отображение ограничения $H^4(\Pi, \mathbf{Z}) \to H^4(\Pi', \mathbf{Z})$, где Π' – подгруппа порядка 2 в Π есть одна из трех проекций $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, поэтому $Ш^4(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$. Имеем изоморфизм $T(k)/R \cong Ч^3(\Pi, \mathbf{Z})$. Группа $Ч^3(\Pi, \mathbf{Z})$ изоморфна $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{s-1}$, если $s > 1$, и 0 при $s = 1$. Пусть, например, $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$. Тогда $s = 1$, ибо 2 – это единственная простая точка, для которой $\Pi_2 = \Pi$, поэтому $T(\mathbf{Q})/R = 0$. Однако $T(\mathbf{Q}_2)/R \neq 0$, ибо

$$T(\mathbf{Q}_2)/R = H^1(\Pi_2, N) = H^1(\Pi, \hat{N}) = H^3(\Pi, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Более того, пусть $k_n = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, .., \sqrt{p_n})$, где p_i – простые числа, удовлетворяющие условию $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, т.е. p_i являются квадратами в поле $\mathbf{Q}_2$. Поле k_n целиком

содержится в поле $\mathbf{Q}_2$, тогда простой идеал (2) поля $\mathbf{Q}$ полностью распадается в k_n в произведение n идеалов первой степени. По-другому, 2-адическое нормирование поля $\mathbf{Q}$ имеет n неэквивалентных продолжений на поле k_n. Поскольку $k_n \subset \mathbf{Q}_2$, то $(k_n(\sqrt{-1},\sqrt{2}) : k_n) = (\mathbf{Q}_2(\sqrt{-1},\sqrt{2}) : \mathbf{Q}_2) = (L : \mathbf{Q}) = 4$. Порядок группы $T(k_n)/R$ равен 2^{n-1}, он неограничен.

17.3. Исследование группы $\mathbf{T(k(t))}$. Вернемся к теореме п.17.1. Главная трудность в ее доказательстве состояла в проверке того, что включение группы $\beta(S(k))$ в класс $< 1 >$ на самом деле является равенством. Мы применим теперь несколько иной подход к доказательству соотношения $< 1 >= \beta(S(k))$, но он позволил вычислить R-эквивалентность и на некоторых полупростых группах. Во-первых, заметим, что вычисление $T(k)/R$ достаточно проводить для анизотропных торов, ибо всякий k-тор T бирационально эквивалентен прямому произведению $T_0(k) \times_k T_1$, где T_0 – разложим, T_1 – анизотропен и $T_0(k)/R = 0$.

Предложение. Пусть T – тор, анизотропный над k, X – его гладкая проективная модель. Тогда $X(k) = T(k)$.

Доказательство. Достаточно построить проективное k-многообразие Y (не обязательно гладкое), содержащее T и такое, что $T(k) = Y(k)$. Тогда теория разрешения особенностей Хиронаки позволяет построить гладкую проективную модель Z тора T, доминантные морфизмы $Z \to X$ и $Z \to Y$, причем $Z(k) = T(k)$. Многообразие Y можно построить следующим образом. Пусть $T \in C(L/k)$, П-модуль $\hat{T}$ есть фактор свободного П-модуля, поэтому тор T вкладывается в $R_{L/k}(G_m)^n$. Пусть $R^{(1)}_{L/k}(G_m)$ – ядро норменного отображения $R_{L/k}(G_m) \to G_m$. Тор T анизотропен, поэтому $T \subset R^{(1)}_{L/k}(G_m)^n$. Имеем вложение $R_{L/k}(G_m) \subset R_{L/k}(\mathbf{P}^1)$ и проективное замыкание Y_1 тора $R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$ в $R_{L/k}(\mathbf{P}^1)$ имеет вид $N_{L/k}(x_1\omega_1 + .. + x_n\omega_n) = t^n$, где $\omega_1, .., \omega_n$ – базис расширения L/k. Ясно, что $Y_1(k) = R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)(k)$. Поэтому замыкание Y тора T в $R_{L/k}(\mathbf{P}^1)^n$ обладает тем же свойством. $\triangle$

Вернемся к последовательности (1) п.17.1. Пусть $k(t)$ – поле рациональных функций от одной переменной t, $F = L(t)$. Имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & N(L) & \to & S(L) & \to & T(L) & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & N(F) & \to & S(F) & \to & T(F) & \to & 1, \end{array}$$

из которой получаем диаграмму когомологий с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} S(k) & \to & T(k) & \to & H^1(L/k, N(L)) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\ S(k(t)) & \to & T(k(t)) & \to & H^1(L/k, N(F)) & \to & 0. \end{array} \qquad (1)$$

Группа F^*, рассматриваемая как П-модуль, есть прямая сумма П-модуля L^* и перестановочных П-модулей $\hat{S}_i$, порожденных неприводимыми нормированными многочленами из $L[t]$, $F^* = L^* \oplus \sum \hat{S}_i$. Из представления $N(F) = \hat{N}^0 \otimes F^*$ следует, что

$$H^1(L/k, N(F)) = H^1(L/k, \hat{N}^0 \otimes F^*) = H^1(L/k, \hat{N}^0 \otimes L^*) = H^1(L/k, N(L)),$$

ибо П-модуль $\hat{N}$ является вялым, значит $H^1(L/k, \hat{N}^0 \otimes \hat{S}_i) = 0$. Все сказанное означает, что естественное отображение $\gamma : H^1(L/k, N(L)) \to H^1(L/k, N(F))$ является изоморфизмом. Из (1) имеем тогда изоморфизм

$$T(k)/\beta(S(k)) \simeq T(k(t))/\beta S(k(t)),$$

или

$$T(k(t)) = T(k)\beta(S(k(t))). \qquad (2)$$

Теперь будем считать, что тор T является анизотропным, X – его гладкая проективная модель, $T(k) = X(k)$ по предложению. Тогда для $f \in T(k(t))$ рациональное отображение $f : \mathbf{P}^1 \to T$ определено для всякой точки $a \in \mathbf{P}^1(k)$. Пусть $g \sim 1$, т.е. существует $h : \mathbf{P}^1 \to T$, $h(0) = 1$, $h(\infty) = g$. Из равенства (2) следует, что $h(t) = g_1 s(t)$, где $s(t) \in \beta(S(k(t)))$. Итак, все элементы из $T(k)$, строго эквивалентные 1, лежат в $\beta(S(k))$. Итерируя этот процесс, получаем соотношение $< 1 >= \beta(S(k))$.

Аналог равенства (2) удается сконструировать и для некоторых полупростых групп G, что позволяет вычислить $G(k)/R$.

§18. УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ

18.1. Редукция к анизотропному ядру. В отличие от торов для некоммутативных алгебраических групп G хороших формул для вычисления группы $G(k)/R$ в общем случае пока не найдено. Первое, что напрашивается, это рассмотреть связные редуктивные группы G, обладающие борелевской подгруппой B, также определенной над k. В этом случае B есть полупрямое произведение k-тора T и унипотентной группы N. Произведение $N \times T \times N$ изоморфно открытой части в G, поэтому $G(k)/R = T(k)/R$. Можно продолжить изучение группы $G(k)/R$ в этом направлении. Каждая редуктивная группа G есть почти прямое произведение тора и полупростой группы. Вся трудность состоит в вычислении $G(k)/R$ для полупростой группы. Пусть T – максимальный k-разложимый тор в полупростой k-группе G, размерность r тора T называется k-рангом группы G. Если $r > 0$, группа G называется *изотропной*, в противном случае – *анизотропной*. Изотропность равносильна существованию унипотентного элемента в группе $G(k)$, отличного от единицы. Пусть $r > 0$ и $Z(T)$ – централизатор тора T в G. Минимальная параболическая k-подгруппа P группы G, содержащая $Z(T)$, есть полупрямое произведение ZN, где N – унипотентна. Произведение $N \times Z \times N$ изоморфно открытому подмножеству в G, откуда $G(k)/R = Z(k)/R$. Далее, полупростая часть группы Z является k-анизотропной (анизотропное ядро группы G). Таким образом, вычисление группы $G(k)/R$ по модулю центрального тора сводится к аналогичным расчетам для анизотропной полупростой группы. Существенным продвижением в вопросе вычисления группы $G(k)/R$ для полупростых алгебраических групп явилось открытие связи между исследованиями бирациональных характеристик линейных групп и результатами В.П.Платонова [2,3] по проблеме Таннака-Артина. Рассмотрим эти соотношения более подробно.

18.2. Группа Уайтхеда простой алгебры. Пусть A – простая центральная алгебра конечного ранга над полем k. Известно, что ее ранг $(A : k)$ всегда является квадратом целого числа. Пусть $Nrd(a)$ – приведенная норма элемента $a \in A$. Отображение $Nrd : A^* \to k^*$ является гомоморфизмом, пусть $SL(A)$ – ядро этого норменного отображения. Уравнение $Nrd = 1$ определяет связную полупростую группу над полем k, которую мы обозначим SL_A, $SL_A(k) = SL(A)$, $SL_A(F) = SL(A \otimes_k F)$, $F \supset k$. Алгебра A всегда обладает сепарабельным полем разложения F конечной степени k, т.е. F есть конечное сепарабельное расширение поля k такое, что алгебра $A_F = A \otimes_k F$ изоморфна алгебре квадратных матриц $M(n, F)$. Если F – поле разложения алгебры A, то $SL(A_F)$ изоморфна группе $SL(n, F)$. Это показывает, что k-группа SL_A является внутренней k-формой группы SL_n. Известно, что алгебра A есть полное кольцо матриц $M(m, D)$ над некоторым телом D, число $\sqrt{(D : k)}$ называется *индексом* алгебры A. Коммутант $[A^*, A^*]$ содержится в $SL(A)$, фактор-группа

$SL(A)/[A^*, A^*]$ называется *группой Уайтхеда* и обозначается $SK_1(A)$. В.П.Платонов в 1975 г. впервые обнаружил несовпадение групп $[A^*, A^*]$ и $SL(A)$ для некоторых алгебр A и разработал методику вычисления группы $SK_1(A)$ в ряде случаев [2,3]. Напомним классический результат: над числовыми или $\wp$-адическими полями имеем равенство $SK_1(A) = 0$. Первый контакт между группой $SK_1(A)$ и бирациональной геометрией группы SL_A был установлен, основываясь на следующей теореме стабильности в K-теории, Платонов [2], Басс [1]. Возможно, это и есть ее истинное предназначение.

Теорема. Пусть A – простая центральная конечномерная алгебра над произвольным полем k. Тогда для чисто трансцендентного расширения F поля k имеем равенство

$$SK_1(A \otimes_k F) = SK_1(A). \quad \triangle$$

В более явном виде эта теорема может быть записана в форме равенства

$$SL(A \otimes_k F) = SL(A)[A_F^*, A_F^*],$$

или

$$SL_A(F) = SL_A(k)[A_F^*, A_F^*]. \tag{1}$$

Имеем полную аналогию с равенством (2) п.17.3, если в качестве F взять поле $k(t)$. Всякая рациональная функция $f(t) \in F$ определяет рациональное отображение $f : \mathbf{P}^1 \to SL_A$. Пусть $< 1 >$ – класс R-эквивалентности в группе $SL(A)$, содержащий единицу. Очевидно, $[A^*, A^*] \subset < 1 >$. Для доказательства обратного включения имеется аналог предложения п.17.3. Если D – тело, то отображение $f : \mathbf{P}^1 \to SL_D$ определено во всех точках из $\mathbf{P}^1(k)$. И те же рассуждения, как в п.17.3, приводят к следующей теореме, Воскресенский [7].

Теорема. Класс R-эквивалентности $< 1 >$ в группе $SL(D)$ совпадает с коммутантом $[D^*, D^*]$. Таким образом, естественное отображение

$$SK_1(D) \to SL(D)/R$$

является изоморфизмом. $\triangle$

Следствие 1. Для любой простой центральной алгебры A над полем k характеристики нуль

$$SK_1(A) = SL(A)/R.$$

В самом деле, пусть $A = M(m, D)$. Соотношение $SK_1(A) = SK_1(D)$ хорошо известно. С другой стороны, SL_A обладает открытым подмножеством U, изоморфным произведению $N \times_k V \times_k N$, где N – унипотентна, а $V(k)$ есть подгруппа в клеточно-диагональной группе $(D^*)^m$, состоящая из элементов приведенной нормы 1, V – анизотропное ядро группы SL_A. Поскольку U открыто, а поле k бесконечно, то естественное отображение $U(k)/R \to SL(A)/R$ является биекцией по предложению 3 п.16.2. Далее, $U(k)/R = V(k)/R$, поскольку N – унипотентна. Группа $V(k)$ представима в виде произведения $SL(D) \times (D^*)^{n-1}$, поэтому $V(k)/R = SL(D)/R$. $\triangle$

Следствие 2. Для того чтобы многообразие SL_A было k-рациональным, необходимо, чтобы $SK_1(A \otimes_k L) = 0$ для любого расширения L поля k. $\triangle$

Следствие 3. Если $SK_1(A \otimes_k L) \neq 0$ для какого-нибудь расширения $L \supset k$, то многообразие SL_A не является даже стабильно-рациональным $\triangle$

Следствие 4. Если k – локально-компактное или глобальное поле, то

$$SL(A)/R = 0. \quad \triangle$$

18.3. Примеры Платонова. Свои результаты по вычислению групп $SK_1(A)$ Платонов получил, изучая специальную алгебру $A(R_1, R_2)$. Напомним ее определение. Алгебра A над полем E называется циклической, если она является скрещенным произведением циклического расширения F поля E и группы Галуа Π расширения F/E. Если $\Pi =< \sigma >$, то σ индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом алгебры A, порожденным элементом $g \in A^*$, причем $g^{[F:E]} = a \in E$, Ван-дер-Варден [1]. Обозначим ее, следуя Платонову, через $A(a, F)$. Платонов выбирает в качестве основного поля E поле $k((x))((y))$ формальных степенных рядов от y над полем $k((x))$ с полем констант k. Далее выбираются циклические расширения R_1 и R_2 поля констант некоторых степеней n_1 и n_2. Тогда композиты ER_1 и ER_2 являются циклическими расширениями степеней n_1 и n_2 поля E. Пусть $A(x, ER_1)$ и $A(y, ER_2)$ – циклические алгебры над полем E, которые для краткости обозначаются $A(x, R_1)$ и $A(y, R_2)$ соответственно. Платонов показывает, что тензорное произведение $A(R_1, R_2) = A(x, R_1) \otimes_k A(y, R_2)$ является телом тогда и только тогда, когда $R_1 \otimes_k R_2$ есть поле. Далее всегда будет предполагаться, что $A(R_1, R_2)$ является телом. Поле E можно рассматривать как полное дискретно нормированное поле с кольцом целых элементов $k((x))[[y]]$ и полем вычетов $k((x))$. Пусть $O(A(R_1, R_2))$ – кольцо целых элементов в $A(R_1, R_2)$ относительно $(k((x)))[[y]]$, P – простой идеал в $O(A(R_1, R_2))$. Тело вычетов $\overline{A(R_1, R_2)} = O(A(R_1, R_2))/P$ есть уже тело над полем $k((x))$. В $k((x))$ выбирается кольцо целых $k[[x]]$ и производится дальнейшая редукция. В результате получается поле $\overline{O(A(R_1, R_2))/P} = R_1R_2$. Поскольку элементы из $SL(A(R_1, R_2))$ лежат в кольце $O(A(R_1, R_2))$, то двойная редукция определяет эпиморфизм групп

$$f : SL(A(R_1, R_2)) \to T(k),$$

где $T(k) = \{\alpha \in L \mid N_{L/k}(\alpha) = 1\}$, $L = R_1R_2$, и $T(k)$ есть множество k-точек тора $R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$. Эпиморфизм f определяет эпиморфизм

$$g : SL(A(R_1, R_2)) \to T(k)/R = H^{-1}(L/k, L^*),$$

и $\operatorname{Ker} g$ содержит коммутант $[A(R_1, R_2)^*, A(R_1, R_2)^*]$, что проверяется прямым вычислением редукции коммутанта и сравнением этой редукции со строением группы $H^{-1}(L/k, L^*)$. Обратное включение следует из конгруэнц-теоремы Платонова, которая утверждает, что $(1 + P) \cap SL(A) \subset [A^*, A^*]$. Таким образом, $\operatorname{Ker} g = [A^*, A^*]$, и мы получаем следующий факт.

Теорема. Пусть R_1, R_2 – циклические расширения поля k, причем $(L : k) = (R_1 : k)(R_2 : k)$, $L = R_1R_2$. Тогда

$$SL(A(R_1, R_2))/R = SK_1(A(R_1, R_2)) = T(k)/R = H^{-1}(L/k, L^*),$$

где $T = R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$. $\triangle$

Варьируя поле L, используя свойства группы $T(k)/R$, можно строить группы $SK_1(A(R_1, R_2))$ с различными отклонениями от тривиальности.

Детальное исследование группы $SK_1(A)$ для произвольных центральных простых алгебр над дискретно нормированными полями провел Драксл [1]. При некоторых ограничениях на поля вычетов им получены значительно более общие формулы, сводящие нахождение группы $SK_1(A)$ к вычислению некоторых групп когомологий.

18.4. Группа Уайтхеда изотропной группы. Обратим теперь внимание на то, что группа $SK_1(A)$ может быть описана совершенно в других терминах. Пусть $A = M(m, D)$, $m \geq 2$, D – тело. В группе $SL(A)$ подгруппа $[A^*, A^*]$ порождается трансвекциями, т.е. элементами из унипотентных радикалов параболических

подгрупп группы $SL(A)$. Пусть теперь G – связная полупростая группа, определенная над полем k и являющаяся k-изотропной. Обозначим через $G(k)^+$ подгруппу в $G(k)$, порожденную элементами унипотентных радикалов параболических k-подгрупп. Группа $G(k)^+$ является нормальным делителем в $G(k)$, фактор-группа $G(k)/G(k)^+$ называется группой Уайтхеда группы G и обозначается $Wh(G,k)$. Очевидно, что $G(k)^+ \subset < 1 >$, и мы имеем эпиморфизм $Wh(G,k) \to G(k)/R$ для связных полупростых изотропных групп G. В случае неодносвязных групп G простые примеры показывают, что этот эпиморфизм не обязан быть изоморфизмом. Гипотеза Кнезера-Титса о совпадении $G(k)^+ = G(k)$ для связных односвязных групп G была опровергнута в общем случае Платоновым, однако для некоторых полей специального вида она верна. Подозрение, что группа $G(k)/R$ совпадает с $Wh(G,k)$ в случае связных односвязных групп G, также оказалось ложным. Это следует из работ группы минских математиков, изучающих группу $Wh(G,k)$, (Монастырный [1], Платонов и Рапинчук [1], Янчевский [1]). Ими получен следующий результат.

Теорема. Пусть G – связная односвязная алгебраическая группа классического типа, определенная и изотропная над бесконечным полем k характеристики, отличной от двух. Если $G \neq Spin(\Phi_n, D)$, где Φ_n – невырожденная косоэрмитова форма индекса Витта, равного 1, то

$$G(k)/R = Wh(G,k).$$

В случае группы $G = Spin(\Phi_n, D)$, где Φ_n имеет индекс 1, имеется изоморфизм

$$G(k)/R = Wh(G,k)/\{\pm 1\}. \quad \triangle$$

18.5. R-эквивалентность над полями специального типа. Мы уже видели, что для связных линейных групп, определенных над полем вещественных чисел, R-эквивалентность тривиальна.

Пусть теперь k есть поле $\wp$-адических чисел и G – связная односвязная полупростая группа над полем k. Тогда G есть прямое произведение простых односвязных k-групп H и каждая группа H имеет вид $R_{L/k}(W)$, где W – абсолютно простая односвязная L-группа, а L – некоторое конечное расширение поля k. Если группа W является анизотропной, то, по теореме М.Кнезера [1], она имеет вид SL_D, где D – некоторое тело конечного ранга над полем L. Поскольку над $\wp$-адическим полем группа Уайтхеда $SK_1(D)$ тривиальна, то, по теореме п.18.2, $W(L)/R = SK_1(D) = 0$. Если же группа W изотропна над L, то $W(L)$ порождается L-унипотентными элементами, Платонов [1], и поэтому снова $W(L)/R = 0$. Но тогда и $H(k)/R = 0$. Отсюда имеем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть k-поле $\wp$-адических чисел и G – связная односвязная полупростая группа над k. Тогда $G(k)/R = 0$. $\triangle$

Пусть теперь G – произвольная связная линейная алгебраическая k-группа. В §17 было показано, что при изучении R-эквивалентности можно ограничиться рассмотрением редуктивных групп. Итак, пусть G – связная редуктивная группа над полем k, T – ее радикал, S – производная подгруппа. Известно, что T есть центральный тор, S – полупростой нормальный делитель, обе группы определены над полем k, Борель [3]. Отображение $m : T \times S \to G$, определяемое умножением в G, есть эпиморфизм с конечным ядром. Пусть $\tilde{S}$ – односвязная накрывающая группы S, определенная над полем k, а $\tilde{T}$ есть k-тор, эпиморфно отображающийся на T, причем $\tilde{T}(k)/R = 0$. Такой тор легко строится из вялой резольвенты тора T. Комбинируя эпиморфизм $g : \tilde{S} \to S$ и $f : \tilde{T} \to T$ с изогенией m, получаем эпиморфизм

$h : \tilde{T} \times_k \tilde{S} \to G$, ядро которого изоморфно группе $\tilde{T} \times_G \tilde{S} = U$. Для любого поля L, содержащего k, имеем

$$U(L) = \{(t, s) \in \tilde{T}(L) \times \tilde{S}(L) \mid f(t) = g(s)\}.$$

Имеется точная последовательность k-групп

$$1 \to T_0 \times_k \pi \to U \to W \to 1,$$

где $W = T \times_G S$ – конечная групповая k-схема, $T_0 = \mathrm{Ker}\,(f)$, $\pi = \mathrm{Ker}\,(g)$. Теорема 1 показывает, что $\tilde{G}(k)/R = 0$, где $\tilde{G} = \tilde{T} \times_k \tilde{S}$. Нами доказана

Теорема 2. Пусть k – поле $\wp$-адических чисел и G – связная редуктивная группа над k. Существует точная последовательность k-групп

$$1 \to U \to \tilde{G} \to G \to 1, \tag{1}$$

в которой $\tilde{G}(k)/R = 0$, а U – подгруппа, лежащая в центре группы $\tilde{G}$, и U является расширением конечной группы с помощью тора. $\triangle$

Последовательность (1) определяет точную последовательность когомологий

$$\tilde{G}(k) \xrightarrow{f} G(k) \to H^1(k, U(\bar{k})), \tag{2}$$

из которой следует, что $Im(f)$ содержит коммутант $[G(k), G(k)]$ группы $G(k)$. Поскольку $\tilde{G}(k)/R = 0$, то $Im(f) \subset < 1 >$. Сверх того, над полем $\wp$-адических чисел группа $H^1(k, U)$ конечна. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Над полем $\wp$-адических чисел k группа $G(k)/R$ коммутативна и конечна для любой связной линейной алгебраической k-группы G. $\triangle$

Перейдем к алгебраическим группам G над числовым полем k. Приведенная выше схема исследования группы $G(k)/R$ в случае локального поля годится и для числового поля, однако доказательства встречающихся объектов более деликатны. Вместо теоремы 1 мы имеем следующую эргодическую теорему Маргулиса [1].

Теорема 4. Пусть G – связная односвязная полупростая почти простая алгебраическая группа, определенная над числовым полем k. Тогда всякая нормальная подгруппа группы $G(k)$ либо имеет конечный индекс в $G(k)$, либо содержится в центре группы $G(k)$. $\triangle$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, из теоремы 4 следует

Теорема 5. Пусть G – связная односвязная полупростая группа над числовым полем k. Тогда группа $G(k)/R$ конечна. $\triangle$

Изучая последовательность, аналогичную последовательности (2), в которой группа $\tilde{G}$ имеет односвязную полупростую часть, Жилле [1] устанавливает следующий факт.

Теорема 6. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа над числовым полем k. Тогда группа $G(k)/R$ конечна . $\triangle$

Интересно было бы выяснить, всегда ли $G(k)/R = 0$ для связных односвязных полупростых групп G над числовым полем. В книге Платонова и Рапинчука [1] показано, что это так для всех односвязных групп , за исключением некоторых форм типов A_n, ${}^3D_4$, ${}^6D_4$, E_6, которые не разобраны. Интересен также вопрос о k-рациональности многообразий SL_D, где D – центральное тело конечного ранга над полем $\wp$-адических или алгебраических чисел k. Над этими полями $SK_1(D) = 0$. Будет ли в этом случае $SK_1(D \otimes_k F) = 0$ и для любого расширения F поля k ?

§19. АЛГЕБРЫ С ИНВОЛЮЦИЯМИ И ГРУППЫ ПРИСОЕДИНЕННОГО ТИПА

19.1. Алгебры с инволюциями. Напомним сначала ряд фактов из области алгебр с инволюциями. Будем считать, что основное поле k имеет характеристику нуль , поскольку только этот случай нас будет интересовать в дальнейшем. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра над полем k, $Z = Z(A)$ – ее центр. *Инволюцией* τ алгебры A называется нетождественное k-линейное отображение $\tau : A \to A$ с условиями

$$\tau(ab) = \tau(b)\tau(a), \quad \tau^2 = Id$$

(нетривиальный антиавтоморфизм.) Ясно, что центр Z при инволюции переходит в себя. Говорят, что τ является инволюцией *первого рода*, если ее ограничение на центр тривиально, и инволюцией *второго рода* в противном случае. Алгебру A с заданной инволюцией τ обозначим через $(A,\ \tau)$. Если F - поле, содержащее поле k, то инволюция τ продолжается до инволюции на алгебре $A_F = A \otimes_k F$, и мы снова имеем алгебру с инволюцией $(A_F,\ \tau)$ над полем F. Алгебра A полупроста тогда и только тогда, когда полупроста алгебра $\bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$. Центр Z полупростой алгебры A есть коммутативная полупростая k-алгебра, т.е. прямая сумма полей. Говорят, что алгебра A абсолютно проста, если $\bar{A}$ есть простая $\bar{k}$-алгебра. В этом случае алгебра $\bar{A}$ изоморфна матричной алгебре $M(n, \bar{k})$. С другой стороны, говорят, что полупростая алгебра A является простой над полем k, если она не является прямой суммой своих подалгебр. Это будет тогда и только тогда, когда центр Z алгебры A является полем. Пусть (A, τ) и (A', τ') – две алгебры с инволюциями над одним и тем же полем k. Изоморфизмом алгебр с инволюциями называется изоморфизм алгебр $f : A \to A'$, переводящий τ в τ', т.е. такой, что $f(\tau(x)) = \tau'[f(x)]$. Автоморфизмы алгебры (A_F, τ), т.е. автоморфизмы алгебры A_F, перестановочные с инволюцией τ, образуют группу $\mathrm{Aut}\,(A_F, \tau)$. Функтор $F \to \mathrm{Aut}\,(A_F, \tau)$ представим k-схемой, которую мы обозначим просто $\mathrm{Aut}\,(A, \tau)$ и будем называть группой автоморфизмов пары $\mathrm{Aut}\,(A, \tau)$. Группа $\mathrm{Aut}\,(A, \tau)$ является линейной алгебраической k-группой. Подробное исследование группы $\mathrm{Aut}\,(A, \tau)$ провел А.Вейль [2], показавший, что на этом пути мы получаем полный набор присоединенных групп классического типа. Этот же метод позволяет описать и почти простые односвязные группы классического типа, Платонов и Рапинчук [1]. Рассмотрим эти связи более подробно.

19.2. Неразложимые алгебры с инволюциями. Пусть (A, τ) – полупростая k-алгебра с инволюцией. Алгебра $\bar{A}$ является прямой суммой матричных алгебр, и инволюция τ должна либо переводить в себя данное слагаемое, либо переставлять его с другим слагаемым. Поэтому простейшие алгебры с инволюциями (A, τ) над алгебраически замкнутым полем k имеют вид (M_n, τ), либо $(M_n \oplus M_n, \tau)$, где M_n – матричная алгебра порядка n над полем k, а τ переводит одно прямое слагаемое в другое. Будем называть их неразложимыми алгебрами с инволюцией. Инволюции τ неразложимых алгебр над замкнутым полем легко вычисляются. В самом деле, пусть φ – другая инволюция алгебры A. Тогда произведение $\tau \cdot \varphi$ является автоморфизмом алгебры A, сохраняющим центр, и по классической теореме Сколема - Нетер автоморфизм $\tau \cdot \varphi$ является внутренним. Таким образом, существует некоторый элемент $g \in A^*$ такой, что

$$\tau(x) = g\varphi(x)g^{-1}. \tag{1}$$

Применяя к обеим частям равенства (1) оператор τ и учитывая, что $\tau^2 = Id$, получаем соотношение $\varphi(g) = zg$, где z – элемент центра алгебры A. Из формулы (1) тогда

имеем $\tau(g) = zg$ или, снова применяя оператор τ, получаем уравнение $z\varphi(z) = 1$. Теперь рассмотрим отдельно два случая.

I. Инволюция τ первого рода.

В этом случае $Z = k$, уравнение $z\varphi(z) = 1$ принимает вид $z^2 = 1$. Имеем две возможности:

а) $z = 1$. В качестве инволюции φ возьмем отображение $x \to {}^t x$ в алгебре M_n. Условие (1) принимает вид $\tau(x) = g\ {}^t x g^{-1}$, ${}^t g = g$. Тогда матрица g симметрическая, а поскольку она невырождена и поле k алгебраически замкнуто, то $g = {}^t a \cdot a$, $a \in \mathrm{GL}(n,k)$. Из равенства (1) имеем соотношение

$$a^{-1}\tau(x)a = \tau({}^t a\ {}^t x\ {}^t a^{-1}) = \tau({}^t(a^{-1}xa)),$$

которое может быть записано в виде

$$Int(a^{-1}) \cdot \tau = \varphi \cdot Int(a^{-1}).$$

Это показывает, что отображение $x \to a^{-1}xa$ определяет изоморфизм алгебр с инволюциями (M_n, τ) и (M_n, φ);

б) если z = -1, то имеем $\tau(x) = g \cdot {}^t x \cdot g^{-1}$, ${}^t g = -g$. Из невырожденности матрицы g следует, что $(-1)^n = 1$, т.е. число n является четным, $n = 2m$. Из общей теории симплектических пространств известно, что для матрицы g найдется такая невырожденная матрица b, что $g = bJ\ {}^t b$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица Грама симплектического базиса пространства V^{2m}, на котором действует алгебра M_{2m}. Матрица J также определяет инволюцию $\omega : M_{2m} \to M_{2m}$ алгебры M_{2m} по формуле

$$\omega(x) = J\ {}^t x J^{-1}, \quad {}^t J = -J.$$

Таким образом,

$$\tau(x) = g\ {}^t x g^{-1} = (bJ)\ {}^t(b^{-1}xb)(bJ)^{-1},$$

что можно переписать в виде $b^{-1}\tau(x)b = \omega(b^{-1}xb)$, или

$$Int(b^{-1}) \cdot \tau = \omega \cdot Int(b^{-1}).$$

Итак, алгебры (M_{2m}, τ) и (M_{2m}, ω) изоморфны.

II. Инволюция τ второго рода.

В этом случае $A = M(n) \oplus M(n)$, $\tau : (x,y) \to (x',y')$ – инволюция, нетривиально действующая на центре $Z = k \oplus k$ алгебры A, $\tau(a,b) = (b,a)$, если $a, b \in k$. Мы имеем стандартную инволюцию $\omega : A \to A$, действующую по правилу $\omega(x,y) = ({}^t y,\ {}^t x)$. Соотношение (1) принимает вид

$$\tau(x,y) = (g_1,g_2)\omega(x,y)(g_1,g_2)^{-1},$$

кроме того

$$\omega(g_1,g_2) = (a,b)(g_1,g_2), \quad a,b \in k; \quad (a,b)\omega(a,b) = (1,1),$$

откуда $ab = 1$. Запишем элемент (a,a^{-1}) в виде дроби $(a,1)/\omega(a,1)$, тогда $\omega(ag_1,g_2) = (ag_1,g_2)$. Пусть $ag_1 = u_1$, $g_2 = u_2$, ${}^t u_2 = u_1$, ${}^t u_1 = u_2$. Поэтому

$$\tau(x,y) = (u_1,\ {}^t u_1)\omega(x,y)(u_1,\ {}^t u_1)^{-1}.$$

Пусть $v_1^2 = u_1$, тогда $\omega(v_1,\ {}^tv_1) = (v_1,\ {}^tv_1)$ и

$$\tau(x,y) = (v_1,\ {}^tv_1)\omega(v_1,\ {}^tv_1)\omega(x,y)\omega(v_1,\ {}^tv_1)^{-1}(v_1,\ {}^tv_1)^{-1},$$

или

$$(v_1,\ {}^tv_1)^{-1}\tau(x,y)(v_1,\ {}^tv_1) = \omega(v_1^{-1}xv_1,\ {}^tv_1^{-1}y\ {}^tv_1).$$

Итак, алгебры (A,τ) и (A,ω) изоморфны. Сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Предложение 1. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Тогда неразложимая полупростая ассоциативная алгебра A с инволюцией τ изоморфна одной из трех алгебр:

$I.$ $$A = M_n,\quad \tau : x \to {}^tx,$$

$II.$ $$A = M_{2n},\quad \tau : x \to J\ {}^txJ^{-1},$$

$III.$ $$A = M_n \oplus M_n,\quad \tau : (x,y) \to ({}^ty,\ {}^tx).\ \triangle$$

19.3. Автоморфизмы неразложимых алгебр с инволюциями.

$$I.\ \ A = M_n,\quad \tau : x \to {}^tx,\quad Z = k = \bar{k}.$$

Автоморфизмы φ алгебры (M_n,τ) являются внутренними: $\varphi = Int(g),\quad g \in \mathrm{GL}(n,k)$, причем $\varphi\cdot\tau = \tau\cdot\varphi$. Последнее условие эквивалентно соотношению

$$g\cdot\ {}^tx\cdot g^{-1} = {}^t(gxg^{-1}),$$

откуда ${}^tgg = \lambda E,\quad \lambda \in k^*$. Ясно, что $Int(g) = Int(\mu g),\quad \mu \in k^*$. Поэтому можно считать, что ${}^tgg = E$. Матрицы g такого вида составляют ортогональную группу $O(n)$ с двумя связными компонентами $O^+(n)$ и $O^-(n)$, состоящими из матриц с определителем $+1$ и -1 соответственно. Группа $G = \mathrm{Aut}\,(M_n,\tau)$ есть фактор-группа $PO(n)$ группы $O(n)$ по ее центру . Ее связная компонента G_0 есть фактор группы $O^+(n)$ по своему центру, $G_0 = PO^+(n)$. Если n – нечетно и $n \geq 3$, то центр группы $O(n)$, состоящий из матриц $\pm E$, имеет по одному элементу в каждой из связных компонент. Поэтому в этом случае группа G связна и ее можно отождествить с $O^+(n)$. Если n – четно и $n \geq 4$, то центр группы $O(n)$ содержится в $O^+(n)$. Значит, группа G имеет две связные компоненты G_0 и G_1, $G_0 = PO^+(n)$.

$$II.\ \ A = M_{2n},\quad \tau : x \to J\ {}^txJ^{-1},\quad Z = k.$$

Как и в случае I, все автоморфизмы алгебры (A,τ) являются внутренними. Автоморфизм φ равен $Int(g)$, причем в качестве g может быть взят элемент из M_{2n}, удовлетворяющий соотношению $gJ\ {}^tg = J$. Матрицы g такого вида образуют связную алгебраическую группу $Sp(2m)$, называемую симплектической группой . Группа $G = \mathrm{Aut}\,(M_{2m},\tau)$ является фактор-группой $PSp(2m)$ группы $Sp(2m)$ по ее центру.

$$III.\ \ A = M_n \oplus M_n,\quad \tau : (x,y) \to ({}^ty,{}^tx),\quad Z = k \oplus k.$$

Отображение $\varphi_0 : (x,y) \to (y,x)$ коммутирует с инволюцией τ, следовательно, $\varphi_0 \in G = \mathrm{Aut}\,(A,\tau)$. Если $\varphi \in G$, то $\varphi\varphi_0$ сохраняет центр Z, поэтому $\varphi\varphi_0$ есть

внутренний автоморфизм алгебры A/Z, $\varphi\varphi_0 = Int(g_1, g_2)$. Из условия $(\varphi\varphi_0)\tau = \tau(\varphi\varphi_0)$ следует, что $g_2 = {}^t g_1^{-1}$. Таким образом, связная компонента G_0 группы G есть проективная группа $PGL(n)$, а вторая компонента G_1 есть смежный класс $\varphi_0 G_0$.

19.4. Формы алгебр с инволюциями. Пусть теперь k – произвольное поле характеристики нуль, (A, τ) – полупростая алгебра с инволюцией над полем k. Известно, что алгебра A есть прямая сумма подалгебр, являющихся простыми алгебрами над k. Инволюция τ преобразует каждое прямое слагаемое в себя или переставляет его с другим слагаемым. Поэтому достаточно изучить случай, когда A – простая k-алгебра с инволюцией τ, либо A есть прямая сумма $B \oplus C$ двух простых k-алгебр, переставляемых инволюцией τ.

I. Рассмотрим сначала этот последний случай:

$$A = B \oplus C, \quad \tau(B) = C.$$

Пусть F – центр алгебры B, F – поле , $(F : k) = d$, $(B : F) = n^2$. Алгебра $\bar{B} = B \otimes_k \bar{k}$ является прямой суммой d алгебр, изоморфных $M_n(\bar{k})$, $B = R_{F/k}(M_n(F))$,

$$A = R_{F/k}(M_n(F)) \oplus R_{F/k}(M_n(F)) = R_{F/k}(M_n(F) \oplus M_n(F))$$

– форма прямой суммы d алгебр типа III п.19.3.

II. Пусть A – простая k-алгебра, F – ее центр, F^+ – множество элементов из F, инвариантных относительно инволюции τ. Тогда F^+ является полем,

$$k \subset F^+ \subset F, \quad (F^+ : k) = d, \quad (A : F) = n^2.$$

а) $(F : F^+) = 2$. Тогда алгебра $\bar{A}$ есть прямая сумма $2d$ алгебр, изоморфных $M_n(\bar{k})$. Поскольку центр F есть поле, то он неразложим над k, поэтому ни одно из $2d$ слагаемых алгебры $\bar{A}$ не инвариантно относительно τ. Поэтому алгебра A есть $R_{F^+/k}(R_{F/F^+}(M_n(F)))$, где $R_{F/F^+}(M_n(F))$ – нетривиальная форма алгебры с инволюцией $M_n \oplus M_n$ типа III п.19.3.

б) $F = F^+$, $(F : k) = d$, $(A : F) = n^2$.

Тогда $\bar{A}$ есть прямая сумма d алгебр $M_n(\bar{k})$, каждая из которых стабильна относительно действия инволюции τ. Тогда A есть форма прямой суммы простых алгебр M_n с инволюциями вида $x \to {}^t x$ или $x \to J\ {}^t x J^{-1}$, $A = R_{F/k}(M_n(F))$.

Вернемся снова к общему случаю полупростой k-алгебры (A, τ) с инволюцией. Пусть G – группа автоморфизмов пары (A, τ), G_0 – ее связная компонента единицы. Группа $\bar{G}_0 = G_0 \otimes_k \bar{k}$ является связной компонентой группы автоморфизмов пары $(\bar{A}, \tau)$. Автоморфизмы из группы $\bar{G}_0$ преобразуют каждое слагаемое алгебры $\bar{A}$ в себя. Поэтому группа $\bar{G}_0$ является прямым произведением групп типов, рассмотренных в п.19.3, а это классические группы $PO^+(n)$, $Sp(2m)$ или $PGL(n)$. Если n и m больше единицы ($n \geq 3$ для $PO^+(n)$), то все прямые множители группы $\bar{G}_0$ являются связными полупростыми группами с тривиальным центром. А.Вейль называет невырожденной алгебру (A, τ) с полупростой компонентой G_0 и доказывает следующую теорему.

Теорема. Пусть (A, τ) – невырожденная k-алгебра с инволюцией, G_0 – связная компонента единицы в группе ее автоморфизмов. Тогда G_0 – полупростая алгебраическая группа с тривиальным центром. Если поле k алгебраически замкнуто, то G_0 есть прямое произведение групп вида $PO^+(n)$, $Sp(2m)$, $PSL(n)$ и обратно, любое произведение таких групп с ограничениями на m и n, указанными выше, есть связная компонента группы автоморфизмов некоторой невырожденной k-алгебры с инволюцией. $\triangle$

Если поле k не замкнуто, то группа G_0 есть k-форма некоторого произведения простых групп, отмеченных выше. В книге Платонова и Рапинчука [1] достаточно подробно изучена эта ситуация.

19.5. Накрытие группы G_0. Пусть (A,τ) – простая алгебра с инволюцией над полем k, Z – ее центр и $k = Z^+$ – подполе τ-инвариантных элементов в поле Z. Алгебра A является центральной простой над полем Z. Связная компонента G_0 тривиально действует на Z, поэтому элементы группы $G_0(k)$ являются внутренними автоморфизмами алгебры A, коммутирующими с τ, $g = Int(a)$, $a \in A^*$. Условие коммутирования $g \cdot \tau = \tau \cdot g$ эквивалентно соотношению $\tau(a)a \in Z^*$, а из условия $Z^+ = k$ следует, что $\tau(a)a \in k$. Рассмотрим множество

$$Sim_k(A,\tau) = \{a \in A^* \mid \tau(a)a \in k\}.$$

Легко видеть, что $Sim_k(A,\tau)$ есть подгруппа группы A^*, и отображение $a \to Int(a)$ определяет гомоморфизм

$$Int : Sim_k(A,\tau) \to G(k) = \mathrm{Aut}_k(A,\tau)$$

с ядром Z^*, Z^* – центр группы $Sim_k(A,\tau)$. Функтор $L \to Sim_L(A_L,\tau)$ представляет линейную алгебраическую k-группу $Sim(A,\tau)$ и $Sim(A,\tau)(k) = Sim_k(A,\tau)$. Имеем точную последовательность связных алгебраических k-групп

$$1 \to R_{Z/k}(G_{m,Z}) \to Sim(A,\tau)_0 \xrightarrow{Int} G_0 \to 1. \qquad (1)$$

Поскольку $H^1(k, R_{Z/k}(G_m)) = 1$, то из (1) следует точная последовательность для k-точек

$$1 \to Z^* \to Sim(A,\tau)_0(k) \to G_0(k) \to 1.$$

Сверх того, поскольку тор $R_{Z/k}(G_{m,Z})$ – квазитривиален, то в последовательности (1) отображение Int имеет рациональное k-сечение, т.е. многообразия $Sim(A,\tau)_0$ и $G_0 \times_k R_{Z/k}(G_m)$ бирационально эквивалентны над полем k. Таким образом, если многообразие $Sim(A,\tau)_0$ не является стабильно рациональным над полем k, то и группа G_0 не может быть стабильно рациональной. Далее

$$G_0(k)/R = Sim(A,\tau)_0(k)/R. \qquad (2)$$

Продолжим исследование группы $Sim_k(A,\tau)$. Для $a \in Sim_k(A,\tau)$ элемент $\mu(a) = \tau(a)a$ называется *мультипликатором* элемента a. Отображение $a \to \mu(a)$ определяет групповой гомоморфизм

$$\mu : Sim_k(A,\tau) \to k^*,$$

который продолжается до гомоморфизма групповых схем

$$\mu : Sim(A,\tau) \to G_{m,k}.$$

Ядро гомоморфизма μ называется группой изометрий алгебры A и обозначается $Iso(A,\tau)$, $Iso(A,\tau)_0$ – ее связная компонента. Пусть $M(A,\tau)$ является образом группы $Sim(A,\tau)_0(k)$ в k^* при отображении μ. Покажем, следуя А.Вейлю, что многообразие $Iso(A,\tau)_0$ рационально над k. Будем говорить, что элемент x алгебры (A,τ) является четным, если $\tau(x) = x$, и нечетным, если $\tau(x) = -x$. Пространство A есть прямая сумма подпространств A^+ и A^- четных и нечетных элементов. Пусть u – элемент общего положения из $Iso(A,\tau)_0(k)$. Тогда

$$w = (1-u)(1+u)^{-1}$$

есть общий элемент пространства A^-. Обратно, если w – общий элемент из A^-, то формула

$$u = (1-w)(1+w)^{-1}$$

определяет общий элемент группы $Iso(A,\tau)_0(k)$. Имеем бирациональный изоморфизм $Iso(A,\tau)_0) \cong A^-$.

19.6. Теоремы Меркурьева. Рассмотрим точную последовательность групп

$$1 \to Iso(A,\tau)_0)(k) \to Sim(A,\tau)_0(k) \xrightarrow{\mu} M(A,\tau) \to 1, \qquad (1)$$

$M(A,\tau) \subset k^*$. Пусть $< 1 >$ – класс R-эквивалентности в группе $Sim(A,\tau)_0(k)$. Из рациональности группы $Iso(A,\tau)_0$ следует, что

$$Iso(A,\tau)_0(k) \subset \ < 1 > \ \subset Sim(A,\tau)_0(k).$$

Поэтому

$$Sim(A,\tau)_0(k)/R \cong M(A,\tau)/\mu(< 1 >).$$

Для описания группы $\mu(< 1 >)$ используется представление алгебры A в виде алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_D(V)$ с некоторым центральным телом D над Z и правым векторным D-пространством V. Существует невырожденная эрмитова форма h на V со свойствами

$$h(a(u),v) = h(u,\tau(a)v) \ \forall \ u,v \in V, \ a \in A.$$

Форма h определена однозначно с точностью до множителя из k^*. Группа $Sim(A,\tau)$ состоит из всех $a \in A^*$ таких, что для всех $u,v \in V$

$$h(a(u),a(v)) = \lambda h(u,v)$$

для некоторого $\lambda \in k^*$, $\lambda = \lambda(a)$. Элемент λ тогда равен $\mu(a) = \tau(a)a$. Инволюция τ называется гиперболической, если форма h гиперболична. Обозначим через $Hyp(A,\tau)$ подгруппу в k^*, порожденную нормами всех конечных расширений L/k таких, что $\tau_L = \tau \otimes 1 : A_L \to A_L$ является гиперболической инволюцией. Меркурьев [1] получил следующий результат.

Теорема 1. Имеется естественный изоморфизм

$$G_0(k)/R \cong Sim(A,\tau)_0(k)/R \cong M(A,\tau)/NZ^* \cdot Hyp(A,\tau),$$

где $NZ^* = (k^*)^2$, если τ – инволюция первого рода, $NZ^* = N_{Z/k}(Z^*)$, если τ – инволюция второго рода. $\triangle$

Произвольная связная полупростая группа присоединенного типа, определенная над полем k, изоморфна прямому произведению нескольких копий групп вида $G_1 = R_{F/k}(G)$, где поле F является конечным расширением поля k (поле k имеет характеристику нуль), и G является абсолютно простой группой присоединенного типа над полем F. Так как R-эквивалентность коммутирует с прямыми произведениями и $G_1(k)/R = G(F)/R$, то вычисление группы классов R-эквивалентности для полупростых групп присоединенного типа сводится к случаю абсолютно простых алгебраических групп.

В работе Сансюка [1] показано, что для связных присоединенных полупростых групп над числовым полем группа Шафаревича - Тейта тривиальна и справедлив принцип слабой аппроксимации. Поэтому бирациональный инвариант $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X})$

тривиален, где X – гладкая проективная модель группы G. Поскольку $\operatorname{Pic}\bar{X}$ – модуль конечного ранга, то $H^1(k, \operatorname{Pic}\bar{X}) = 0$ для произвольного поля k характеристики нуль. Однако предположение о рациональности многообразия G над полем k опровергнуто Меркурьевым, который показал, что существуют связные присоединенные группы, для которых бирациональный инвариант $G(k)/R$ отличен от нуля. Для торов условие $[\operatorname{Pic}\bar{X}(T)] = [0]$ является критерием стабильной рациональности, для полупростых групп G аналогичного условия явно недостаточно. Что дает с точки зрения стабильной рациональности одновременное выполнение условий: $[\operatorname{Pic}\bar{X}(G)] = [0]$ и $G(F)/R = 0 \ \ \forall\ F \supset k$? Ответа на этот вопрос я не знаю.

Изоморфизмы теоремы 1 позволили Меркурьеву вычислить группу классов R-эквивалентности почти для всех связных присоединенных полупростых групп классического типа. Приведем обзор его результатов.

Тип A_{n-1}.

Группы внутреннего типа. Произвольная абсолютно простая присоединенная k-группа G внутреннего типа A_{n-1}, $\ n \geq 2$, изоморфна группе $PGL_1(A)$, где A – центральная простая алгебра над полем k степени n. Поскольку G рациональна над k, то $G(k)/R = 0$.

Группы внешнего типа. Если n – нечетно, то в работе Воскресенского и Клячко [1] показано, что группа G рациональна над k, поэтому $G(k)/R = 0$. Для $n = 2$ алгебра A является кватернионной алгеброй над центром Z, $\ (Z : k) = 2$, $\ \tau$ – инволюция второго рода. Прямые вычисления показывают, что $G(k)/R = 0$.

Тип B_n.

Произвольная абсолютно простая присоединенная k-группа G_0 данного типа изоморфна группе $Sim(A, \tau)_0/G_{m,k}$, где A – центральная простая алгебра степени $2n+1$ над полем k с инволюцией τ первого рода. Инволюция τ присоединена к некоторой квадратичной форме q от $2n+1$ переменных, которая определена с точностью до скаляра. Группа G_0 равна проективной ортогональной группе

$$PO(q) \cong O^+(q) = Iso(A, \tau)_0,$$

которая k-рациональна, $G_0(k)/R = 0$.

Тип C_n.

Произвольная абсолютно простая присоединенная k-группа типа C_n изоморфна группе $Sim(A, \tau)_0/G_m$, где A – простая центральная алгебра степени $2n$ над полем k с симплектической инволюцией τ. Меркурьев показывает,что группа G_0 стабильно рациональна для нечетного n. Для этих n $\ G_0(k)/R = 0$.

Тип D_n. Присоединенная алгебраическая k-группа G_0 типа D_n, за исключением некоторых неклассических групп типа D_4, изоморфна группе $Sim(A, \tau)_0/G_{m,k}$, где $Sim(A, \tau)_0$ состоит из элементов $a \in Sim(A, \tau)$ таких, что $Nrd(a) = \mu(a)^n$. Пусть $C = C(A, \tau)$ – алгебра Клиффорда алгебры с инволюцией (A, τ) и L – центр в C, который является квадратичным расширением поля k, $\ L = k[x]/(x^2 - d)$, где $d = disc(\tau)$. Центр L – не обязательно поле. Если L распадается, т.е. $disc(\tau) \in (k^*)^2$, то алгебра C представима в виде произведения $C^+(A, \tau) \times C^-(A, \tau)$ двух центральных простых алгебр над полем k. Следующая теорема принадлежит Меркурьеву [1], за доказательством читатель отсылается к этой работе.

Теорема 2. Пусть A – центральная простая алгебра четной степени над полем k с ортогональной инволюцией τ. Если $disc(\tau)$ не является квадратом в поле k и $indC(A, \tau) \geq 4$, то группа $\operatorname{Aut}(A, \tau)_0(k)/R \neq 0$ и, следовательно, многообразие $\operatorname{Aut}(A, \tau)_0$ не является стабильно рациональным. $\triangle$

Для всякого $n \geq 3$ всегда можно построить над числовым полем k квадратичную форму q от $2n$ переменных с условиями: $disc(q) \notin k^2$ и $ind(C(A, \tau)) \geq 4$. Поэтому

над числовым полем k существуют стабильно нерациональные полупростые группы присоединенного типа D_n для всякого $n \geq 3$.

Теорема 3 (Меркурьев [1]). Пусть A – центральная простая алгебра степени 6 над полем k с ортогональной инволюцией τ, $C = C(A, \tau)$ – соответствующая алгебра Клиффорда.Тогда

1) если $disc(\tau) \in (k^*)^2$, то группа $G_0 = \mathrm{Aut}\,(A, \tau)_0$ рациональна и, следовательно, $G_0(k)/R = 0$;

2) если $disc(\tau) \notin (k^*)^2$, а C или расщепима, или $ind(C) = 2$ и A расщепима, то G_0 – стабильно рациональна и $G_0(k)/R = 0$;

3) если $ind(C) = 4$ или $ind(C) = 2$ и A не расщепима, то $G_0(k)/R \neq 0$ и, следовательно, многообразие G_0 не является стабильно рациональным. $\triangle$

Глава VII. ИНДЕКС-ФОРМУЛЫ В АРИФМЕТИКЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

Пусть k – числовое поле, O – кольцо целых элементов поля k, T – тор категории $C(L/k)$, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, расширение L/k имеет конечную степень. Будем считать, что группа T снабжена канонической целой структурой (см.§11). Таким образом, T есть O-схема и имеет смысл символ $T(B)$ для любой O-алгебры B, а группа классов $H(T) = T(A)/T(k)T(A^\infty)$ имеет минимальный порядок $h(T)$, где A – кольцо аделей поля k. Наша задача – вычислить порядок $h(T)$ этой группы для торов специального вида.

§20. АРИФМЕТИКА ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ ПОЛЯ

20.1. Отношение чисел классов. Уточним сначала высказывание о минимальности группы классов $H(T)$. Пусть X – произвольная групповая O-форма тора $T \otimes_O k$. Поскольку группа $X(O_\wp)$ компактна, а $T(O_\wp)$ – максимальная компактная подгруппа в $T(k_\wp)$, то $X(A^\infty) \subset T(A^\infty)$, и мы имеем эпиморфизм

$$\beta : H(X) \to H(T),$$

где

$$H(X) = X(A)/X(k)X(A^\infty) = T(A)/T(k)X(A^\infty).$$

Вычисление ядра эпиморфизма β приводит к следующему результату.

Предложение 1. Пусть X – произвольная групповая O-форма k-тора T. Тогда имеем точную последовательность абелевых групп

$$1 \to X(O) \to T(O) \to \prod_\wp T(O_\wp)/X(O_\wp) \to H(X) \to H(T) \to 1.$$

Доказательство. Естественное вложение группы $T(A^\infty)$ в $T(A)$ определяет гомоморфизм $\gamma : T(A^\infty) \to H(X)$ и $Im(\gamma) = Ker(\beta)$. Далее, $Ker(\gamma)$ есть группа $UX(A^\infty)$, где $U = T(k) \cap T(A^\infty) = T(O)$. Наконец,

$$T(A^\infty)/UX(A^\infty) = (T(A^\infty)/X(A^\infty))/(T(O)/X(O)).$$

Заметим, что произведение в среднем члене последовательности фактически конечно, поскольку $T(O_\wp) = X(O_\wp)$ почти для всех $\wp$. $\triangle$

Обратим внимание, что в случае, когда $T_0 = R_{F/k}(T)$, то

$$T(A_F)/T(F)T(A_F^\infty) \cong T_0(A_k)/T_0(k)T_0(A_k^\infty),$$

по-другому, $H(R_{F/k}(T)) = H(T)$. Рассмотрим простейший случай тора $G_{m,k}$. В этом случае $G_m(A_k) = I_k$ – группа иделей поля k, $H(G_{m,k}) = H(k)$ – группа классов идеалов поля k. Возьмем тор $T = R_{k/Q}(G_m)$. Из сказанного следует, что $H(T) = H(k)$. Данное обстоятельство позволяет написать ряд соотношений типа индекс-формул, имеющихся в группе классов идеалов $H(k)$ поля k. С тором $R_{F/k}(G_m)$ ассоциированы две естественные точные последовательности

$$1 \to G_{m,k} \to R_{F/k}(G_m) \to P \to 1,$$

$$1 \to N \to R_{F/k}(G_m) \xrightarrow{\alpha} G_{m,k} \to 1,$$

где α – норменное отображение, $N = R^{(1)}_{F/k}(G_m)$, $P = R_{F/k}(G_m)/G_{m,k}$. Тор P назовем проективной группой расширения F/k, $P(k) = F^*/k^*$. Торы N и P изогенны над полем k, если F/k – циклическое расширение, то N и P изоморфны.

Пусть теперь F – нормальное расширение поля k, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(F/k)$. Имеем точную последовательность адельных групп

$$1 \to G_m(A) \to R_{F/k}(G_m)(A) \to P(A) \to 1.$$

Для $\wp$-адического поля $k_\wp$ имеем точную последовательность групп целых точек

$$1 \to G_m(O_\wp) \to R_{F/k}(G_m)(O_\wp) \to P(O_\wp) \to H^1(\Pi, (O_F \otimes_O O_\wp)^*) \to 1.$$

Из разложения в прямую сумму

$$F \otimes_k k_\wp = \bigoplus_{\bar\wp \mid \wp} F_{\bar\wp}$$

следует, что

$$H^1(\Pi, (O_F \otimes_O O_\wp)^*) = H^1(\Pi_{\bar\wp}, O^*_{\bar\wp}),$$

где $\bar\wp$ означает простой идеал кольца целых O_F поля F. Из теории $\wp$-адических полей известно, что группа $H^1(\Pi_{\bar\wp}, O^*_{\bar\wp})$ является циклической порядка $e_\wp$, где $e_\wp$ – индекс ветвления точки $\wp$ в поле F. Это показывает, что

$$H^1(\Pi, G_m(A_F^\infty)) = H^1(\Pi, I_F^\infty) = \bigoplus_\wp \mathbf{Z}/e_\wp\mathbf{Z} = \bigoplus_{\wp \in S} \mathbf{Z}/e_\wp\mathbf{Z},$$

где S – множество всех простых конечных дивизоров поля k, разветвленных в F. Имеем точную последовательность

$$1 \to G_m(A_k^\infty) \to R_{F/k}(G_m)(A_k^\infty) \to P(A_k^\infty) \to H^1(\Pi, I_F^\infty) \to 1,$$

которую можно переписать в виде

$$1 \to I_k^\infty \to I_F^\infty \xrightarrow{\varphi} P(A_k^\infty) \to \bigoplus_\wp \mathbf{Z}/e_\wp\mathbf{Z} \to 0. \tag{1}$$

Запишем еще аналогичную последовательность для групп целых точек

$$1 \to E(k) \to E(F) \to P(O) \to H^1(\Pi, E(F)) \to 0, \tag{2}$$

где $E(L)$ – группа единиц кольца $O(L)$. Эти последовательности связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \to & E(k) & \to & E(F) & \stackrel{\alpha}{\to} & P(O) & \stackrel{\alpha_1}{\to} & H^1(\Pi, E(F)) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 & & \\ 1 & \to & I_k^\infty & \to & I_F^\infty & \stackrel{\varphi}{\to} & P(A_k^\infty) & \stackrel{\alpha_2}{\to} & H^1(\Pi, I_F^\infty) & \to & 0. \end{array} \tag{3}$$

Пусть $U = Im(\varphi)$. Последовательность (1) распадается на две короткие точные последовательности:

$$1 \to I_k^\infty \to I_F^\infty \to U \to 1,$$

$$1 \to U \to P(A_k^\infty) \to \bigoplus_\wp \mathbf{Z}/e_\wp \mathbf{Z} \to 0,$$

которые определяют следующие две длинные точные последовательности:

$$1 \to P(k) \cap U \to P(O) \to \bigoplus_\wp \mathbf{Z}/e_\wp \mathbf{Z} \to P(A)/P(k)U \to H(P) \to 1,$$

$$1 \to E(k) \to E(F) \stackrel{\alpha}{\to} P(k) \cap U \stackrel{\beta}{\to} H(k) \stackrel{\gamma}{\to} H(F) \to P(A)/P(k)U \to 1, \tag{4}$$

используя рассуждения предложения 1. Последовательности (4) содержат достаточно весомую информацию. К примеру, вычислим ядро отображения γ. Из диаграммы (3) следует, что

$$P(k) \cap U = P(O) \cap U = \beta_1^{-1}(U) = \mathrm{Ker}\,(\alpha_2\beta_1) = \mathrm{Ker}\,(\beta_2\alpha_1).$$

Учитывая, что β_1 – мономорфизм, имеем

$$\mathrm{Ker}\,(\gamma) = (P(k) \cap U)/\alpha(E(F)) = \mathrm{Ker}\,(\beta_2\alpha_1)/\mathrm{Ker}\,(\beta_2).$$

Тем самым доказана

Теорема 1. Пусть F/k – нормальное расширение с группой Галуа Π, $\gamma : H(k) \to H(F)$ – естественное отображение групп классов идеалов. Тогда группа $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ изоморфна ядру естественного отображения

$$H^1(\Pi, E(F)) \to H^1(\Pi, I_F^\infty). \quad \triangle$$

Следствие. Если F/k – неразветвленное расширение, тогда $\mathrm{Ker}\,(\gamma) = H^1(\Pi, E(F))$. Далее, из (4) следует, что $H(P) = 1$, $H(F) = 1$. $\triangle$

Теорема 2. Числа классов полей k и F связаны соотношением

$$h(P) = \frac{h(F)[H^1(\Pi, E(F)]}{h(k)\prod e_\wp}.$$

Доказательство. Из (3) следуют равенства

$$h(P)\prod_\wp e_\wp = [P(A) : P(k)U][P(O) : P(k) \cap U],$$

$$[P(A) : P(k)U]h(k) = H(F)[P(k) \cap U : \alpha(E(F))].$$

Исключая из них число $[P(A) : P(k)U]$, получаем соотношение

$$h(k)h(P)\prod e_\wp = h(F)[P(O) : \alpha(E(F))].$$

Из (2) следует, что

$$[P(O) : \alpha(E(F))] = [H^1(\Pi, E(F))]. \ \triangle$$

Отметим еще, что в случае циклического расширения F/k справедливо равенство по Эрбрану

$$2^u[H^1(\Pi, E(F))] = (F : k)[\hat{H}^0(\Pi, E(F))], \tag{5}$$

где u – количество бесконечных точек ветвления поля k в F. $\triangle$

Предложение 2. Пусть F/k – неразветвлено. Тогда мы имеем точную последовательность

$$1 \ \to H^1(\Pi, E(F)) \to H(k) \to H(F) \to H(P) \to \ 1.$$

В самом деле, в этом случае $U = P(A_k^\infty)$. $\triangle$

Следствие. Если F/k – гильбертово поле классов, то $H(P) = H(F)$ и $H(k) = H^1(\Pi, E(F))$. $\triangle$

Пусть теперь $k = \mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел. Тогда $H(\mathbf{Q}) = 1$ и из (4) имеем

$$H(F) = P(A)/P(k)U, \quad P(k) \cap U = \alpha(E(F)).$$

Последовательность (4) принимает вид

$$1 \ \to E(\mathbf{Q}) \to E(F) \to P(\mathbf{Z}) \to \prod_p \mathbf{Z}/e_p\mathbf{Z} \to H(F) \to H(P) \to \ 1$$

или, учитывая соотношение (2), имеем

$$1 \ \to H^1(\Pi, E(F)) \to \prod_p \mathbf{Z}/e_p\mathbf{Z} \to H(F) \to H(P) \to \ 1. \tag{6}$$

Для циклического расширения $F/\mathbf{Q}$ порядок группы $H^1(\Pi, E(F))$ можно оценить по формуле (5). В этом случае $\hat{H}^0(\Pi, E(F)) = 1$, если (-1) является нормой единицы из $E(F)$, и $\hat{H}^0(\Pi, E(F)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ в противном случае. Число u равно 0 , если F – вещественно, и $u = 1$, если F – мнимо. Поэтому $[H^1(\Pi, E(F))] = (F : \mathbf{Q})$, если $u = 1$ или $u = 0$, но (-1) является нормой единицы; $[H^1(\Pi, E(F))] = 2(F : Q)$, если $u = 0$, но (-1) не является нормой. В качестве приложения рассмотрим два примера.

20.2. Индекс формулы в случае квадратичного расширения. Пусть $F/\mathbf{Q}$ – квадратичное расширение с дискриминантом d, a – количество различных простых чисел, входящих в дискриминант. Тогда $h(F) = 2^{a-1}h(P)$, если $d < 0$, или $d > 0$, но фундаментальная единица имеет норму, равную (-1). Если $d > 0$ и норма фундаментальной единицы равна 1 , то $h(F) = 2^{a-2}h(P)$. Если ввести в рассмотрение группу $H_0(F)$ классов идеалов в узком смысле, то числа классов $h(F)$ и $h_0(F) = [H_0(F)]$ связаны соотношением $h_0(F) = h(F)$, если $-1 = N_{F/Q}(\varepsilon)$ и $h_0(F) = 2h(F)$ в противном случае. Вышеприведенные соотношения можно записать в форме $h_0(F) = 2^{a-1}h(P)$. Можно получить и более точные соотношения. Вместо (6) можно записать точную последовательность

$$0 \ \to (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{a-1} \to H_0(F) \xrightarrow{\beta} H(P) \to \ 0.$$

Группа $\mathrm{Ker}\,(\beta) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{a-1}$ состоит из элементов группы $H_0(F)$, инвариантных относительно оператора $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(F/\mathbf{Q})$. Это в точности элементы порядка 2 в группе $H_0(F)$. Рассмотрим теперь тор N, в нашем случае он изоморфен P. Группа $H(N) = H(P)$ вкладывается в $H_0(F)$. Пусть $cl(\mathbf{a})$ – элемент из $H(N)$, рассматриваемый как элемент в $H_0(F)$, $\mathbf{a}$ – идеал, $N\mathbf{a} = 1$. Определим элементы в

$H(N)$, инвариантные относительно σ. Условие $cl(\mathbf{a})^\sigma = cl(\mathbf{a})$ равносильно равенству $\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{a}(\lambda)$, $\lambda \in F^*$, $N_{F/\mathbf{Q}}(\lambda) = 1$. Отсюда следует, что $\lambda = \alpha/\alpha^\sigma$, и мы имеем равенство $(\mathbf{a}(\alpha))^\sigma = \mathbf{a}(\alpha)$. Пусть $p_1, .., p_a$ – различные простые числа, входящие в дискриминант d, $p_i = \wp_i^2$. Умножая, при необходимости, элемент α на простые p_i, идеал $\mathbf{a}(\alpha)$ можно представить в виде $\wp_{i_1} \cdots \wp_{i_s}$, $1 \le s \le a$. Это дает возможность посчитать 2-ранг группы элементов второго порядка в $H(N)$, что совпадает с количеством инвариантов группы $H_0(F)$, делящихся на 4. Классический подход к этому вопросу изложен в книге Боревича и Шафаревича [1]. Рассмотрим еще один пример вычисления группы классов $H(P)$, приводящий к соотношениям, которые изучались Хассе [1].

20.3. Соотношения Хассе в случае мнимого расширения. Пусть F – абелево расширение поля $\mathbf{Q}$. По теореме Кронекера поле F есть подполе кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta_m)$, где ζ_m – первообразный корень уравнения $x^m = 1$. Если m – наименьшее натуральное число со свойством $F \subset \mathbf{Q}(\zeta_m)$, то m называется ведущим модулем расширения F/Q. Пусть $\mathbf{Q}(\zeta_m + \zeta_m^{-1})$ – вещественное подполе поля $\mathbf{Q}(\zeta_m)$, $k = F \cap \mathbf{Q}(\zeta_m + \zeta_m^{-1})$ – максимальное вещественное подполе поля F. Пусть $(F : k) = 2$, т.е. F – мнимое расширение поля k. Обозначим через d дискриминант расширения F/k, пусть $P = N = R^{(1)}_{F/k}(G_m)$ – одномерный тор над полем k. Группа $P(O_k) = N(O_k)$ состоит из целых элементов ζ поля F с условием $\zeta\bar{\zeta} = 1$, где $\bar{\zeta}$ – комплексно-сопряженный элемент. Отсюда $P(O_k) = W$ – группа всех корней из единицы в поле F. Последовательность (4) п.20.1 перепишем в виде

$$1 \to Ker(\gamma) \to H(k) \to H(F) \to P(A_k)/P(k)U \to 1,$$

$$Ker(\gamma) = Im(\beta) \cong (P(O_k) \cap U)/\alpha(E(F)).$$

Учитывая, что $W = N(O_k) \subset R_{F/k}(G_m)(O_k) = E(F)$, а $\alpha(\xi) = \xi/\bar{\xi} = \xi^2 \in W^2$, $\xi \in W$, имеем следующую фильтрацию:

$$W^2 = P(O_k)^2 \subset Im(\alpha) \subset P(O_k) \cap U \subset P(O_k) = W.$$

Пусть

$$Q = [Im(\alpha) : W^2], \quad R = [P(O_k) \cap U : Im(\alpha)], \quad S = [W : P(O_k) \cap U].$$

Заметим, что

$$QRS = 2, \quad R = [Ker(\gamma)], \quad RS = [H^1(F/k, E(F))].$$

Пусть a – количество различных простых в дискриминанте $d(F/k)$. Формула из теоремы 2 п.20.1 принимает вид

$$h(F) = 2^{a-1}\, Q\, h(k)\, h(P). \tag{1}$$

Если F/k – разветвлено, то $a \ge 1$, и формула (1) показывает, что число $h(F)/h(k)$ – целое. Однако и для $a = 0$ число $h(F)/h(k)$ – целое. В самом деле, поскольку F/k неразветвлено, k – вещественно, F – мнимо, то

$$N_{F/k} I_F^\infty = R_+^n \prod_\wp E(k_\wp), \quad n = (k : \mathbf{Q}), \quad (I_k^\infty : N_{F/k} I_F^\infty) = 2^n,$$

где R_+ – мультипликативная группа положительных вещественных чисел, I_k, I_F – группы иделей. Получаем цепочку эпиморфизмов

$$H(F) = I_F/F^* I_F^\infty \to k^* N_{F/k} I_F / k^* N_{F/k} I_F^\infty \to k^* I_k^\infty N_{F/k} I_F / k^* I_k^\infty = H(k),$$

причем равенство справа следует из теории полей классов, ибо $(I_k : k^* N_{F/k} I_F) = 2$. Имеем $h(F)/h(k) = 2^{a-1} Q\ h(P)$ – целое число. Обстоятельное исследование индекса Q проведено в книге Хассе [1]. Из соотношения $QRS = 2$ следует, что один из сомножителей равен 2 и знание его определяет все остальные. Пусть w – порядок группы корней W. Возможны два случая: $w \equiv 2 \ (mod\ 4)$ или $w \equiv 0 \ (mod\ 4)$. Во втором случае $F = k(i)$ и только делители двойки могут быть разветвленными в F.

Предложение 1. Если в поле k существует простой дивизор $\wp$, не делящий 2 и разветвленный в F, то $S = 2$ и, следовательно, $Q = R = 1$.

Доказательство. В нашем случае имеем сравнение $w \equiv 2 \ (mod\ 4)$. Пусть $\wp = \bar{\wp}^2$. В группе единиц $E(F_{\bar{\wp}})$ уравнение $\bar{\lambda} = -\lambda$ не имеет решения, следовательно, $W = P(O_k) \cap U, \quad S = 2.$ $\triangle$

Таким образом, главную трудность при определении индексов представляет случай, когда точки ветвления находятся среди делителей числа 2. Хассе [1] показал, что в этом случае реализуются все возможности: либо $S = 2$, либо $R = 2$, либо $Q = 2$. Рассмотрим частный случай кругового расширения:

$$F = \mathbf{Q}(\zeta_m), \quad k = \mathbf{Q}(\zeta_m + \zeta_m^{-1}),$$

где m – ведущий модуль, $(F : k) = 2$. Если $m = p^\alpha, \quad p \geq 2, \quad \alpha \geq 1$, то предложение 1 показывает, что $S = 2$. Если $m = 2^\alpha, \quad \alpha \geq 2$, тогда $\zeta_m = \lambda/\bar{\lambda}, \quad \lambda = 1 + \zeta_m$ не является локальной единицей в $F_{\bar{\wp}}, \quad \bar{\wp} \mid 2, \quad F_{\bar{\wp}}/k_{\bar{\wp}}$ – разветвленное расширение, следовательно, снова $S = 2$. Если $m = m_1 m_2, \ (m_1, m_2) = 1$, то из строения кругового многочлена следует, что $\varepsilon = 1 - \zeta_m$ является единицей поля F, и расчет показывает, что $\varepsilon/\bar{\varepsilon} = -\zeta_m$. Поскольку $(-\zeta_m)$ не является квадратом в F, то $Q = 2$. Это одна из теорем Хассе.

Теорема. Пусть $F = \mathbf{Q}(\zeta_m)$ – круговое расширение, k – максимальное вещественное подполе, $(F : k) = 2, \quad \gamma : H(k) \to H(F)$ – естественное отображение. Тогда γ является мономорфизмом, а $Q = 1$ или 2 в зависимости от того, примарно m или нет. $\triangle$

Если вместо тора P рассматривать изоморфный ему тор N и вложение $N \to R_{F/k}(G_m)$, то можно получить некоторые дополнительные формулы, связывающие числа $h(k),\ h(F),\ h(P)$.

§21. АРИФМЕТИКА НОРМЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Используем понятия и обзначения, введенные в гл.V. Пусть T – анизотропный k-тор, т.е. T не имеет рациональных характеров, определенных над полем k, кроме тривиального. Тогда $T^1(A) = T(A)$. Рассмотрим на $T(A)$ меру Тамагавы τ, определенную формулой 1 п.14.3. Имеем

$$\tau = L(1, \chi)^{-1}\ |\Delta_k|^{-\frac{\dim T}{2}} \prod_v \mu_v,$$

где $\mu_v = \omega_v$ для $v \mid \infty, \quad \mu_\wp = L_\wp(1, \chi)\omega_\wp, \quad \chi$ – характер целочисленного представления группы Галуа расширения L/k на модуле $\hat{T}$, где L – поле разложения тора $T, \quad \omega$ – форма объема на T, определенная над k. Пусть

$$\omega_\infty = \prod_{v \mid \infty} \omega_v.$$

Имеем

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^{h} a_i\ T(k)\ T(A^\infty),$$

откуда

$$\tau(T) = h(T)\ L(1,\chi)^{-1}\ |\Delta_k|^{-\frac{\dim T}{2}}\ \omega_\infty(T_\infty/T(O))\ \prod_\wp \mu_\wp(T(O_\wp)).$$

По формуле (2) и теореме 3 п.14.3 $\mu_\wp(T(O_\wp)) = 1$ для точек $\wp$ поля k, неразветвленных в L, и таких, что $\omega_\wp$ является канонической мерой на $T(k_\wp)$. По теореме Т.Оно

$$\tau(T) = [H^1(k,\hat{T})]/[Ш(T)].$$

Имеем равенство

$$[H^1(k,\hat{T})]\ |\Delta_k|^{\frac{\dim T}{2}} = \frac{h(T)\ [Ш(T)]}{L(1,\chi)}\ \omega_\infty(T_\infty/T(O))\ \prod_\wp\ L_\wp(1,\chi)\ \omega_\wp(T(O_\wp)). \qquad (1)$$

Пусть теперь $N = R^{(1)}_{F/k}(G_m)$. Нам удобнее на время перейти к тору $T = R_{k/Q}(N)$, определенному уже над $\mathbf{Q}$. Как мы видели, числа $h(T)$ и $h(N)$ совпадают. Пусть L – нормальное конечное расширение поля $\mathbf{Q}$, содержащее поле разложения тора N:

$$\Gamma = \mathrm{Gal}\,(L/Q),\quad \Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k),\quad \pi = \mathrm{Gal}\,(L/F),\quad \pi \subset \Pi \subset \Gamma.$$

Тогда $\hat{T} = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes_\Pi \hat{N}$. Формула (1) принимает вид

$$[H^1(\mathbf{Q},\hat{T})] = \frac{h(T)\ [Ш(T)]}{L(1,\chi,L/Q)}\ \omega_\infty(T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z}))\ \prod_p\ L_p(1,\chi)\ \omega_p(T(\mathbf{Z_p})).$$

Далее, $H^1(\mathbf{Q},\hat{T}) = H^1(k,\hat{N})$ и последовательность Π-модулей

$$0\ \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[\Pi/\pi] \to \hat{N} \to\ 0 \qquad (2)$$

показывает, что

$$H^1(k,\hat{N}) = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Hom}\,(\Pi,\mathbf{C}^*) \to \mathrm{Hom}\,(\pi,\mathbf{C}^*)]$$

есть ядро отображения ограничения. Ясно, что элемент φ из $\mathrm{Hom}\,(\Pi,\mathbf{C}^*)$ лежит в ядре ограничения тогда и только тогда, когда φ тривиален на подгруппе $\pi[\Pi,\Pi]$, где $[\Pi,\Pi]$ – коммутант группы Π. Таким образом, $[H^1(\mathbf{Q},\hat{T})] = [F_0 : k]$, где F_0 – максимальное абелево расширение поля k, содержащееся в F. Характер χ является индуцированным с характера χ_N представления $\hat{N}$ группы Π, поэтому $L(s,\chi,L/Q) = L(s,\chi_N,L/k)$ по предложению 5 п.13.1. Соотношение (2) показывает, что $\chi_N = \chi_1 - \chi_0$, где χ_0 – главный характер группы Π, а χ_1 – характер, индуцированный с главного характера ξ_0 подгруппы π. Предложения 4 и 5 п.13.1 показывают, что $L(s,\chi_N,L/k) = \zeta_F(s)/\zeta_k(s)$, где ζ_M – дзета-функция Дедекинда поля M. Предыдущая формула может быть переписана в следующем виде:

$$[F_0 : k] = \lim_{s\to 1} \frac{\zeta_k(s)}{\zeta_F(s)}\ h(N)\ [Ш(N)]\ \omega_\infty(T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z})\ \prod_p\ L_p(1,\chi)\ \omega_p(T(\mathbf{Z_p})). \qquad (3)$$

Для вычисления объема $\omega_\infty(T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z}))$ используем теорему 3 п.14.4. Нормируем инвариантную форму ω на T следующим образом. Из последовательности (2) имеем точную последовательность торов

$$1\ \to T \to R_{F/Q}(G_m) \xrightarrow{\psi} R_{k/Q}(G_m) \to\ 1,$$

где ψ есть норменное отображение $N_{F/k}$. Выберем в каждом из полей k и F целые базисы $\alpha_1, .., \alpha_m$ и $\beta_1, .., \beta_q$, $m = (k : \mathbf{Q})$, $q = (F : \mathbf{Q})$. Пусть $x = x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m$, $y = y_1\beta_1 + \cdots y_q\beta_q$ – общие элементы полей k и F соответственно. Формы

$$\alpha = \frac{dx_1 \wedge \ \cdots \wedge dx_m}{N_{k/Q}(x)} \quad u \quad \beta = \frac{dy_1 \ \wedge \cdots \wedge dy_q}{N_{F/Q}(y)}$$

являются формами объема на $R_{k/Q}(G_m)$ и $R_{F/Q}(G_m)$. Пусть ω – форма на $R_{F/Q}(G_m)$ такая, что $\beta = \psi^*(\alpha) \wedge \omega$. Тогда ее ограничение, снова ω, есть k-форма объема на T. Поскольку

$$\psi^*(\alpha) = \frac{\psi^*(dx_1 \wedge \ \cdots \wedge dx_m)}{N_{F/Q}(y)},$$

то получаем

$$dy_1 \ \wedge \cdots \wedge dy_q = \psi^*(dx_1 \ \wedge \cdots \wedge dx_m) \wedge \omega. \tag{4}$$

Выберем в вещественном пространстве $k \otimes_Q \mathbf{R}$ фундаментальную область для группы единиц $E(k)$, действующей мультипликативно на $k \otimes_Q \mathbf{R}$. В книге Боревича и Шафаревича [1] показано, что такую область можно выбрать в виде конуса с вершиной в начале координат. Пусть X_k – часть этого конуса с условием $|N_{k/Q}(x)| \leq 1$, аналогично определяется X_F. Объем $v(X_F)$ тела X_F конечен в обычной мере Лебега на $\mathbf{R}^q$ и равен

$$\lim_{s \to 1}(s-1)f(s),$$

где

$$f(s) = \sum \ |N_{F/Q}(y)|^{-s}$$

и $y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_q y_q$ пробегает все целые числа поля F, отличные от нуля и такие, что $(y_1, .., y_q)$ принадлежит конусу. Аналогично вычисляется объем $v(X_k)$. Формула (4) приводит нас к соотношению

$$\int_{X_F} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q = \int_{\psi(X_F)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \int_{T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z})} \omega,$$

откуда

$$\omega_\infty(T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z})) = \frac{\int_{X_F} \ dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q}{\int_{\psi(X_F)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m}. \tag{5}$$

Сравнивая области X_k и $\psi(X_F)$, получаем, как и в §14, соотношение

$$\int_{\psi(X_F)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \frac{[E(k) : N_{F/k}(E(F))]}{[(k \otimes_Q \mathbf{R})^* : N_{F/k}(F \otimes_Q \mathbf{R})^*]} \int_{X_k} \ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m. \tag{6}$$

Перейдем теперь к вычислению ряда $f(s)$, который участвует в вычислении интеграла

$$\int_{X_F} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q.$$

Заметим, что точки решетки $\mathbf{Z}^q$ в $\mathbf{R}^q$ представляют собой все целые числа поля F, а в конус X_F попадает по одному целому элементу из каждого класса ассоциированных. Из теоремы о равномерном распределении идеалов по классам и из свойств дзета-функции Дедекинда следует, что

$$\lim_{s \to 1}(s-1)f(s) = h(F)^{-1} \lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_F(s).$$

Таким образом

$$\int_{X_F} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q = h(F)^{-1} \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s). \tag{7}$$

Аналогично

$$\int_{X_k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = h(k)^{-1} \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_k(s). \tag{8}$$

Объединяя формулы (5) – (8), получаем соотношение

$$\lim_{s\to 1}\frac{\zeta_k(s)}{\zeta_F(s)}\,\omega_\infty(T(\mathbf{R})/T(\mathbf{Z})) = \frac{h(k)\ [(k\otimes_Q \mathbf{R})^* : N_{F/k}(F\otimes_Q \mathbf{R})^*]}{h(F)[E(k) : N_{F/k}(E(F))]}.$$

Далее

$$L_p(1,\chi) = \prod_{\wp|p}(1-\frac{1}{N\wp})\Big/\prod_{\bar\wp|p}(1-\frac{1}{N\bar\wp}),\quad \bar\wp|\wp|p,$$

где $\wp$ – простой идеал поля k, $\bar\wp$ – такой же идеал поля F,

$$\omega_p(T(\mathbf{Z}_p)) = mes(R_{F/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p))/mes(U),$$

где mes – мера, индуцированная канонической мерой неархимедова поля,

$$U = N_{F/k}(R_{F/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p)) \subset R_{k/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p).$$

Имеем

$$mes(R_{F/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p)) = \prod_{\bar\wp|p}(1-\frac{1}{N\bar\wp}),$$

$$mes(R_{k/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p)) = \prod_{\wp|p}(1-\frac{1}{N\wp}).$$

Таким образом,

$$L_p(1,\chi)\ \omega_p(T(\mathbf{Z})) = [R_{k/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p) : N_{F/k}(R_{F/Q}(G_m)(\mathbf{Z}_p))].$$

Пусть I_k, I_F – группы иделей полей k и F. С учетом всего сказанного, формулу (3) можно переписать в следующем виде.

Теорема.

$$\frac{h(F)}{h(k)\ h(N)} = \frac{[Ш(N)\ [I_k^\infty : N_{F/k} I_F^\infty]}{[F_0 : k]\ [E(k) : N_{F/k}E(F)]}.\ \triangle$$

Данную формулу для нормального расширения F/k получил Т.Оно [1], в общем случае она выведена в работе Катаямы [1]. Данные вычисления используют другую методику и проведены Фоминой [1].

Пример. Пусть F не является нормальным расширением поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, $[F:\mathbf{Q}] = 3$; $L/\mathbf{Q}$ – нормализация расширения $F/\mathbf{Q}$, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/\mathbf{Q})$ – симметрическая группа порядка 6 . Пусть d – дискриминант расширения $F/\mathbf{Q}$, $L = F(\sqrt{d})$. Поскольку $N = R^{(1)}_{F/Q}(G_m)$ – тор размерности 2, то он рационален над $\mathbf{Q}$, поэтому $Ш(N) = 1$. Далее имеем

$$[F_0 : \mathbf{Q}] = 1,\quad h(\mathbf{Q}) = 1,\quad [E(\mathbf{Q}) : N_{F/Q}E(F)] = 1.$$

Тогда

$$\frac{h(F)}{h(N)} = [I^{\infty}_{\mathbf{Q}} : N_{F/\mathbf{Q}} I^{\infty}_{F}] = \prod_{p|d} [\mathbf{Z}_p^* : N_{F/Q}(\mathbf{Z}_p \otimes O_F)^*].$$

Дополнение. Каноническая целая структура в алгебраическом торе над локальным полем.

В данном дополнении мы возвращаемся снова к описанию целых структур в алгебраическом торе, которые рассматривались в §10 моей статьи [11]. Особую роль в классификации целых структур играют так называемые минимальные или канонические целые модели. В работе [11] не хватало явного описания такой целой модели. Здесь мы заполняем этот пробел. Мы придерживаемся терминологии и обозначений §10 статьи [11].

Д1. Образующие алгебры Хопфа алгебраического тора. Пусть T – алгебраический тор над произвольным полем k, L/k – его минимальное поле разложения, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\hat{T}$ – Π-модуль рациональных характеров тора T. Известно, что $T = \mathrm{Spec}\, B$, где $B = (L[T])^{\Pi}$, $L[\hat{T}]$- групповое кольцо мультипликативной группы $\hat{T}$. Далее тор T есть L/k-форма тривиального тора $G^d_{m,k}$, $d = \dim T$, т.е. вложение $B \to L[\hat{T}]$ продолжается до изоморфизма $L \otimes_k B \simeq LB = L[\hat{T}]$. Выберем базис $\omega_1, ..., \omega_n$ расширения L/k, тогда мы имеем разложение в прямую сумму B-модулей

$$L[\hat{T}] = B\omega_1 \otimes \cdots \otimes B\omega_n. \tag{1}$$

Пусть $\chi \in \hat{T}$, из разложения (1) имеем равенство

$$\chi = f_1^{(\chi)}\omega_1 + \cdots + f_n^{(\chi)}\omega_n, \tag{2}$$

где $f_i^{(\chi)} \in B$. Очевидно, что алгебра $B = k[T]$ порождена координатными функциями $f_i^{(\chi)}$, когда χ пробегает всю группу $\hat{T}$. Конечная система образующих алгебры B может быть получена разложением каких-либо базисных характеров $\chi_1, .., \chi_d$ и им обратных $\chi_1^{-1}, .., \chi_d^{-1}$, $d = \dim T$.

Д2. Каноническая целая модель тора. Пусть теперь k – поле $\wp$-адических чисел, T – алгебраический тор, определенный над полем k, L/k – минимальное поле разложения тора T, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $O = O_k$ – кольцо целых элементов поля k с максимальным идеалом $\wp$. Расширение L/k обладает целым базисом $\omega_1, ..., \omega_n$ (кольцо целых элементов O_L есть свободный O_k-модуль ранга n). Рассмотрим кольцо A, порожденное функциями $f_i^{(\chi)}$ с коэффициентами в кольце целых O. Алгебра A не зависит от выбора целого базиса расширения L/k, она имеет конечный тип над кольцом O, $A \cap k = O$, $kA = k[T]$. Групповое кольцо $L[\hat{T}]$ снабжено естественной структурой алгебры Хопфа:

$$m^*(\chi_i) = \chi_i \otimes \chi_i,\ i^*(\chi_i) = \chi_i^{-1},\ e^*(\chi_i) = 1, \tag{1}$$

где $\chi_1, .., \chi_d$ – базис группы $\hat{T}$. Легкие вычисления показывают, что формулы (1) в координатах $x_k^{(m)}$, где $\chi_m = \sum_{k=1}^n x_k^{(m)}\omega_k$, выглядят следующим образом:

$$m^*(x_k^{(m)}) = \sum c_{ij}^k x_i^{(m)} \otimes x_j^{(m)};$$

$$i^*(x_k^{(m)}) = F_k^{(m)}/y_m,\ \chi_m^{-1} = \frac{F_1^{(m)}}{y_m}\omega_1 + ... + \frac{F_n^{(m)}}{y_m}\omega_n; \tag{2}$$

$$e^*(x_k^{(m)}) = c_k,\ 1 = \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_j.$$

Числа c_{ij}^k есть структурные константы расширения L/k:

$$\omega_i\omega_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k\omega_k,\ c_{ij}^k \in O. \tag{3}$$

Формулы (2), (3) показывают, что операторы Хопфа действуют на кольце A и определяют на нем структуру O-алгебры Хопфа. Схема $X = \operatorname{Spec} A$ имеет конечный тип над O, она является приведенной и строго плоской над O и $X \otimes_O k = T$. Группа $X(O)$ является компактной подгруппой в локально-компактной группе $X(k) = T(k)$. Далее, имеем важные включения

$$O_L[\hat{T}] \subset O_L A \simeq O_L \otimes_O A.$$

Пусть $\chi \in \hat{T}$, тогда χ определяет гомоморфизм

$$\chi : X(L) = T(L) \to L^*.$$

Рассмотрим ограничение отображения χ на максимальную компактную подгруппу U группы $T(k) \subset T(L)$. Группа $\chi(U)$ является компактной подгруппой в L^*, т.е. χ отображает группу U в O_L^*. Формулы (2) п.Д1 показывают тогда, что функции $x_j^{(i)}$ принимают на U значения из O. Таким образом, функции из O-алгебры A принимают на группе U значения в кольце O. Формулы (2) п.Д1 показывают также, что алгебра A не зависит ни от выбора целого базиса в L/k, ни от выбора базиса в группе $\hat{T}$.

Определение. Пусть A – построенная выше O-алгебра Хопфа в алгебре $k[T]$. Групповую схему $X = \operatorname{Spec} A$ назовем *канонической целой формой* k-тора T.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть k – поле $\wp$-адических чисел с кольцом целых элементов O, T – алгебраический k-тор, L/k – его минимальное поле разложения, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, $\hat{T}$ – Π-модуль рациональных характеров тора T. Существует канонически определяемая O-форма $X = \operatorname{Spec} A$ тора T, обладающая свойствами:

1) $A \subset k[T],\ A \cap k = O,\ k \otimes_O A \simeq kA = k[T]$;

2) A есть алгебра Хопфа конечного типа над O, индуцирующая строение алгебры Хопфа на $k[T]$;

3) алгебра A строго плоская над O;

4) $f(u) \in O\ \forall u \in U \quad u \quad \forall f \in A$;

5) $X(O) = U$ – максимальная компактная подгруппа локально-компактной группы $T(k)$, сверх того $X(O) = \operatorname{Hom}_\Pi(\hat{T}, O_L^*)$;

6) $O_L[\hat{T}] \subset O_L A$;

7) $\chi = f_1\omega_1 + ... + f_n\omega_n,\ f_i \in A,\ \chi \in \hat{T},\ \omega_1, .., \omega_n$ – целый базис расширения L/k.

Доказательства требует только пункт 5. Пусть $T \subset GL(V)$, где V – векторное пространство над полем k некоторой размерности m. Выберем в V решетку M, инвариантную относительно действия группы U и такую, что $kM = V$. В базисе решетки M элементы группы U записываются матрицами из группы $GL(m, O)$. Мы имеем

$$X(O) = X(k) \cap GL(m, O) = U.$$

Далее

$$T(k) = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, L^*) \subset \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, L^*) = T(L) \simeq (L^*)^d,\ d = \dim T.$$

Группа

$$\mathrm{Hom}\,(\hat{T}, L^*) = U_L \simeq (O_L^*)^d$$

является максимальной компактной подгруппой в группе $T(L)$. Из соотношения $T(k) = (T(L))^{\Pi}$ следует, что

$$X(O) = U = U_L \cap T(k) = U_L^{\Pi} = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, L^*).\ \triangle$$

Замечание. В теореме 1 п. 10.3 в равенстве $X(O_F) = U_F$ следует считать поле F конечным неразветвленным расширением поля k.

Определение. Редукцией $T_\wp$ тора T по простому модулю будем называть редукцию его канонической целой модели X, $T_\wp = \mathrm{Spec}\,(O/\wp \otimes_O A)$.

Редукция есть групповая схема над конечным полем $r_k = O/\wp$. Редукцию назовем *очень хорошей*, если $T_\wp$ есть тор над r_k; *хорошей*, если $T_\wp$ – алгебраическая группа над r_k; *плохой*, если групповая схема $T_\wp$ не является приведенной.

Теорема 2. Если расширение L/k – неразветвлено, то каноническая целая модель k- тора T, разложимого над L, имеет вид $X = \mathrm{Spec}\,A$, где $A = (O_L[\hat{T}])^{\Pi}$. Схема X является тором над кольцом O, редукция $T_\wp$ очень хорошая.

Доказательство. Имеем вложение $O_L[\hat{T}] \subset O_L A$ и разложение $\chi = f_1\omega_1 + ... + f_n\omega_n$, $f_i \in A$, $\chi \in \hat{T}$, $\omega_1, .., \omega_n$ – целый базис расширения L/k. Для любого $\sigma \in \Pi$ имеем

$$\sigma\chi = f_1\sigma(\omega_1) + ... + f_n\sigma(\omega_n).$$

Ввиду неразветвленности расширения L/k определитель матрицы $(\sigma_i(\omega_j))$ обратим в кольце O_L, поэтому $f_i \in O_L[\hat{T}]$. $\triangle$

Д3. Каноническая целая форма тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$. Пусть $\omega_1, .., \omega_n$ – целый базис расширения F/k, L – нормализация поля F в k_s, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\Pi_1 = \mathrm{Gal}\,(L/F)$, $S = R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$, $\hat{S} = \mathbf{Z}[\Pi/\Pi_1] = \mathbf{Z}[\Pi] \otimes_{\Pi_1} \mathbf{Z}$. Выберем базис $\chi_1, .., \chi_n$ группы $\hat{S}$, на котором группа Π действует перестановками, Π_1 – стабилизатор элемента χ_1. Имеем разложения

$$\chi_1 = x_1\omega_1 + ... + x_n\omega_n, \tag{1}$$

$$\chi_i = \sigma_i\chi_1 = x_1\sigma_i(\omega_1) + ... + x_n\sigma_i(\omega_n),$$

$A = O[x_1, .., x_n, y^{-1}]$, $y = \chi_1 .. \chi_n$ – форма степени n от n переменных $x_1, .., x_n$. Схема $X = \mathrm{Spec}\,A$ есть O-форма тора S, причем $X(B) = (O_F \otimes_O B)^*$ для всякой коммутативной O-алгебры B; в частности, $X(O) = O_F^*$. Поскольку $O[x_1, .., x_n, y^{-1}]$ есть локализация кольца многочленов $O[x_1, .., x_n]$, то схема X является гладкой и связной.

Теорема 3. Редукция тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ по модулю $\wp$ является связной алгебраической группой над конечным полем $r_k = O/\wp$. $\triangle$

Изучим эту редукцию более подробно. Пусть E – максимальное неразветвленное расширение поля k, содержащееся в F, F/E – чисто разветвленное расширение, $k \subset E \subset F \subset L$, $(E : k) = f$, $(F : E) = e$, $ef = n$, O_E и O_F – кольца целых элементов полей E и F соответственно. Выберем целый базис в кольце O_F следующим образом. Пусть $\omega_1, ..., \omega_f$ – базис неразветвленного расширения O_E/O, а $1, \pi, ..., \pi^{e-1}$ – целый базис расширения O_F/O_E. Тогда $\omega_i\pi^j$ есть целый базис расширения F/k. Заметим теперь, что

$$S = R_{F/k}(\mathbf{G}_m) = R_{E/k}(R_{F/E}(\mathbf{G}_m)).$$

Пусть $Y = \operatorname{Spec} C$ есть каноническая целая модель E-тора $R_{F/E}(\mathbf{G}_m)$. Согласно разложению (1), O_E-алгебра C имеет вид

$$C = O_e[z_0, ..., z_{e-1}, u^{-1}],$$

где z_i – коэффициенты разложения

$$\chi_1 = z_0 + z_1\pi + ... + z_{e-1}\pi^{e-1},\ z_i \in E[R_{F/E}(\mathbf{G}_m)],$$

а U есть произведение e-различных характеров, сопряженных с χ_1 относительно поля E. Поскольку расширение E/k неразветвлено, то дискриминант базиса $\omega_1, ..., \omega_f$ есть единица кольца O, поэтому мы можем перейти от координат z_i к координатам $x_k^{(i)}$ по правилу $z_i = \sum_{k=1}^{f} x_k^{(i)}\omega_k$. По-другому, $X = R_{O_E/O_k}(Y)$. Выясним строение редукции $Y_{\wp_E}$ схемы Y. Мы знаем, что поля вычетов r_F и r_E совпадают, а $u \equiv z_0^e (\operatorname{mod} \wp_E)$. Поэтому

$$r_E \otimes_{O_E} C = r_E[z_0, z_1, ..., z_{e-1}, z_0^{-1}] = r_E[z_0, z_0^{-1}] \otimes r_E[z_1, ..., z_{e-1}],$$

т.е. групповая r_E-схема Y есть прямое произведение тора G_{m,r_E} и коммутативной r_E-группы U_E, бирегулярной аффинной r_E-группе $\mathbf{A}_{r_E}^{e-1}$. Рассматривая регулярное представление группы Y в базисе $1, \pi, ..., \pi^{e-1}$, мы видим, что группа $Y(r_E)$ представима треугольными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} z_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_1 & z_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{e-2} & z_{e-3} & \dots & z_0 & 0 \\ z_{e-1} & z_{e-2} & \dots & z_1 & z_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, группа U_E треугольна с 1 на главной диагонали, т.е. U_E – унипотентна. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Редукция $X_\wp = R_{r_E/r_k}(Y_{\wp_E})$ тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ представима в виде прямого произведения максимального тора $T_\wp = R_{r_E/r_k}(\mathbf{G}_m)$ размерности f и связной унипотентной группы $U_\wp = R_{r_E/r_k}(U_E)$ размерности $(e-1)f$. Очевидно, если $e \le p$, где p – характеристика поля r_k, то $U_\wp$ есть произведение аддитивных групп $\mathbf{G}_{a,r_k}$ в количестве $(e-1)f$ штук. $\triangle$

Если S – произвольный квазиразложимый k-тор, т.е. S есть прямое произведение торов вида $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$, то каноническая целая модель X-тора S есть произведение канонических целых моделей простейших торов $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$, и редукция $X_\wp$ есть произведение редукций множителей, описание которых имеется в теореме 4.

Д4. О редукции тора общего вида. При тех же обозначениях, как и в п.Д3, пусть T – произвольный k-тор, L – его минимальное поле разложения, $k \subset E \subset L$, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, $\Delta = \operatorname{Gal}(L/E)$, $\Gamma = \operatorname{Gal}(E/k)$, $\Gamma = \Pi/\Delta$, $\omega_i\pi^j$ – базис расширения O_L/O, $1 \le i \le f$, $0 \le j < e$. Разлагая характеры группы $\hat{T}$ по базисам расширений O_L/O и O_L/O_E, используя равенство 7 теоремы 1, можно построить канонические целые модели A и B торов T и $T \otimes_k E$ соответственно. Здесь A является O-алгеброй Хопфа в $k[T]$, B есть O_E-алгебра Хопфа в $E[T]$. Поскольку расширение E/k неразветвлено, то $B = A \otimes_O O_E$ и $A = B^\Delta$ – кольцо инвариантов группы Δ. Таким образом, основная трудность в изучении редукции тора T сводится к выяснению строения алгебры $r_E \otimes_O B$ и действия группы инерции Δ на ней.

Пусть I – идеал аугментации кольца $\mathbf{Z}[\Delta]$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to I\hat{T} \to \hat{T} \to \hat{T}/I\hat{T} \to 0. \tag{1}$$

Группа $I\hat{T}$ порождена элементами вида $(\sigma - 1)m$, где $\sigma \in \Delta,\ m \in \hat{T}$. Пусть $\tau \in \Pi$, тогда

$$\tau(\sigma - 1)m = (\tau\sigma\tau^{-1} - 1)(\tau m) \in I\hat{T},$$

ибо Δ – нормальная подгруппа в Π. Таким образом, группа $I\hat{T}$ является Π-модулем, значит фактор $\hat{T}/I\hat{T}$ также Π-модуль, но, поскольку модуль $\hat{T}/I\hat{T}$ инвариантен относительно операторов группы Δ, то группа $\hat{T}/I\hat{T}$ является Γ-модулем. Рассмотрим эпиморфизм $\hat{S} \to \hat{T}$ Π-модулей, где $\hat{S}$ – пермутационный модуль. Пусть A – каноническая целая модель тора T, B – такая же модель тора S. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} O_L[\hat{S}] & \xrightarrow{\alpha_1} & O_L B & \xrightarrow{\alpha_2} & r_L B \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 \\ O_L[\hat{T}] & \xrightarrow{\beta_1} & O_L A & \xrightarrow{\beta_2} & r_L A, \end{array}$$

где α_1 и β_1 – мономорфизмы, $\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ – эпиморфизмы. По теореме 4 мы имеем

$$r_L B = r_E B = r_E[\hat{S}/I\hat{S}] \otimes_{r_E} r_E[U_E].$$

Из коммутативности диаграммы тогда следует, что

$$r_L A = r_E A = r_E[\hat{T}/I\hat{T}] \otimes_{r_E} r_E[M_E],$$

где M_E – унипотентная часть в групповой схеме $X_\wp$. Изучим Γ-модуль $\hat{T}/I\hat{T}$. Наряду с последовательностью (1), рассмотрим еще одну точную последовательность

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{T} \xrightarrow{\psi} \hat{T}_2 \to 0,$$

где $\psi(t) = \sum_{\sigma \in \Delta} \sigma t \in \hat{T},\ \hat{T}_1 = \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Модули T_1 и T_2 не имеют кручения,

$$I\hat{T} \subset \hat{T}_1,\ \hat{T}_2 = \hat{T}/\hat{T}_1 = (\hat{T}/I\hat{T})/(\hat{T}_1/I\hat{T}),$$

по-другому, имеем точную последовательность Γ-модулей

$$0 \to \hat{T}_1/I\hat{T} \to \hat{T}/I\hat{T} \to \hat{T}_2 \to 0.$$

Заметим еще, что $\hat{T}_1/I\hat{T}$ есть не что иное, как $H^{-1}(\Delta, \hat{T})$ – конечный Γ-модуль. Поэтому кольцо инвариантов $(r_E[\hat{T}/I\hat{T}])^\Delta$ есть алгебра Хопфа групповой схемы $P_\wp$ мультипликативного типа, связная компонента которой есть r_k-тор, $R^0_\wp$, определяемый Γ-модулем $\hat{T}_2$, и фактор $R_\wp/R^0_\wp$ дуален Γ-модулю $H^{-1}(\Delta, \hat{T})$. Итак, мы получили достаточно полное описание мультипликативной части редукции тора T по простому модулю $\wp$.

Рассмотрим случай норменного тора $R^{(1)}_{F/k}(\mathbf{G}_m) = T$. Пусть $C = O[x_1, ..., x_n, y^{-1}]$ – целая форма тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m),\ y = N(x_1, ..., x_n)$ – норменный многочлен с целыми коэффициентами. Тор T определен уравнением $N(x_1, ..., x_n) = 1,\ n = (F : k)$. Поэтому целая форма X тора T определяется алгеброй $A = O[x_1, ..., x_n]/(y - 1),\ X = \mathrm{Spec}\, A$. Если расширение F/k – неразветвлено, то X снова тор над кольцом O. Пусть теперь $k \subset E \subset F,\ n = ef,\ e = (F : E) > 1$. Как мы видели в п.Д3, редукция $\bar{Y}$ группы $Y = \mathrm{Spec}\, C$ имеет вид $\bar{Y} = R_{r_E/r_k}(\mathbf{G}_m) \times_{r_k} N$. Имеем вложение

O-групп $X \to Y$, что позволяет рассматривать редукцию $\bar{X}$ как подгруппу в $\bar{Y}$. Группа N – унипотентна, поэтому она целиком содержится в $\bar{X}$. Пусть $\omega_1, ..., \omega_f$ – базис расширения r_E/r_k, $u_1, ..., u_f$ – соответствующие координатные функции. Норменная форма y, рассматриваемая на r_E, является e-й степенью норменной формы $z = z(u_1, ..., u_f)$: $y \equiv z^e (\mathrm{mod}\, \wp)$. Пусть $R = r_k[u_1, ..., u_f]/(z^e - 1)$, $Z = \mathrm{Spec}\, R$. Тогда редукция $\bar{X}$ тора $R^1_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ есть прямое произведение групповых схем над конечным полем r_k : $\bar{X} = Z \times_{r_k} N$. Если p не делит e, то $\bar{X}$ – алгебраическая группа над полем r_k, она несвязна при $e > 1$. Если $p|e$, то схема $\bar{X}$ не является приведенной, редукция плохая.

Если T – произвольный k-тор, то описание унипотентной части его редукции пока не завершено. Далее, поскольку кольцо O целых алгебраических чисел конечного расширения $L/\mathbf{Q}$ имеет целый базис, то метод пункта Д2 позволяет построить глобальную каноническую целую модель X тора T, определенного над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Здесь возникает ряд новых задач глобального характера, заслуживающих дальнейшего исследования.

Библиографические замечания

Как отмечалось во введении, при исследовании алгебраических групп, определенных над незамкнутым полем, имеется жесткая необходимость рассматривать их в качестве групповых объектов в категории схем. Конечно, имеется детальное изложение теории групповых схем в трудах семинара Гротендика и Демазюра [1], однако наша работа рассчитана, в первую очередь, на читателей, знакомых только с теорией алгебраических групп над замкнутым полем и имеющих обыкновение отождествлять данную группу с множеством ее геометрических точек, что дает лишь поверхностное представление о существе проблем в незамкнутом случае. Я думаю, что прочтение данной книги как раз и подтолкнет вдумчивого читателя к серьезному освоению и общей теории схем. Здесь же, стараясь сделать книгу по возможности независимой, автор собрал в главе I минимально необходимый материал из теории функторов, групповых схем и когомологий, требуемый для дальнейшего. Первая глава содержит также много принципиальных примеров, служащих не иллюстрацией к высказываемым утверждениям, а мотивирующих введение тех или иных понятий и указывающих направление дальнейших построений.

Особую роль в данной теории играют диагонализируемые группы и их формы. В гл.I диагональным группам отведено достаточно много места. Мы полностью следуем методу, изложенному в докладе Гротендика на семинаре по групповым схемам. Исходя из наших потребностей, мы ограничиваемся только группами над аффинными схемами. Большинство результатов, касающихся группы Брауэра схем, также принадлежит Гротендику [1].

Теория форм считается хорошо известной, хотя вряд ли можно указать публикацию, где она была бы обстоятельно изложена. В работах А.Вейля [1] и Ленга-Тейта [1] теория форм впервые была выделена в специальную область исследований. Весьма обстоятельное изложение теории когомологий Галуа имеется в лекциях Серра [2]. Операция ограничения основного поля описана А.Вейлем в работе [3]. Наконец, весьма общий случай рассматривает Гротендик в своей теории спуска [2].

Расслоение на максимальные торы в редуктивной группе изучено в пионерской работе Шевалле [1], наше изложение этого вопроса следует пути, предложенному на семинаре Гротендика-Демазюра. Модуль рациональных характеров общего тора в полупростой группе вычислен автором [9]. Группа Пикара связной линейной алгебраической k-группы исследовалась автором [1] и Поповым [1]. Группа Брауэ-

ра линейной группы и ее компактификации подробно описана в совместной работе Кольо-Телена и Сансюка [1], а также в более поздней статье Сансюка [1].

В работах Манина и Шафаревича по теории поверхностей впервые появляется новый бирациональный инвариант $[\mathrm{Pic}\,\bar{X}]$, где X – гладкая проективная поверхность над незамкнутым полем k, Манин [1]. То, что строение модуля Галуа $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$ позволяет судить об арифметике поверхности X, было отмечено еще в книге Б.Сегре [2]. Автор [2] рассмотрел бирациональный инвариант $[\mathrm{Pic}\,\bar{X}]$ в случае, когда X есть гладкая проективная модель связной линейной алгебраической группы G, и исследовал его в серии дальнейших работ. Оказалось, что категория алгебраических торов является наиболее естественной областью применения инварианта $[\mathrm{Pic}\,\bar{X}(T)] = p_k(T)$. Так, класс $p_k(T)$ определяет многообразие T с точностью до стабильной эквивалентности, Воскресенский [5,6]. Далее, класс $p_k(T)$ допускает чисто алгебраическое определение. Оказалось, что модуль Пикара $\mathrm{Pic}\,\bar{X}(T)$ обладает любопытным свойством: $H^{-1}(\pi, \mathrm{Pic}\,\bar{X}(T)) = 0$ для любой подгруппы π группы разложения П тора T, Воскресенский[5,6]. Это позволило в категории модулей Галуа вскрыть существование канонической резольвенты для каждого модуля $\hat{T}$ конечного ранга и без кручения. Такая резольвента однозначно определяет класс $p_k(T)$. В работе Кольо-Телена и Сансюка [1] указанная резольвента названа вялой, поскольку расслоение, определяемое этой резольвентой, является вялым. Я согласен, что это очень удачное название. Теория вялых резольвент позволила значительно продвинуться в изучении полугруппы стабильной эквивалентности $Z(L/k)$ и ее максимальной подгруппы $Z^0(L/k)$, Воскресенский [5,6], Эндо и Мията [1-6], Кунявский [1], Чистов [1,2]. Группа $Z^0(L/k)$ оказалась изоморфной группе, ранее по другому поводу изучавшейся Дрессом [1]. Она имеет конечный тип, но не всегда конечна. В работе Чистова [2] показано, что полугруппа $Z(L/k)$, как правило, имеет бесконечное число образующих. Для торов T с циклическим полем разложения класс $p_k(T)$ обратим в полугруппе подобия модулей. Этот фундаментальный факт впервые установили Эндо и Мията [3]. Используя этот результат, Чистов [1] доказал теорему 1 п.5.3, дающую бирациональную классификацию торов с циклическим полем разложения (с точностью до стабильной рациональности). Ряд интересных результатов в этой области получил Ленстра [1], изучавший поля инвариантов конечных абелевых групп преобразований.

Введение бирациональных характеристик в область линейных алгебраических групп позволило сдвинуть с места старую проблему рациональности полей инвариантов конечных групп преобразований, действующих линейно на конечномерном пространстве. Первый пример $(\mathbf{Q}, 47)$ поля инвариантов, не являющегося рациональным над $\mathbf{Q}$, получил Суон [2]. В то же время по другому поводу этот же пример привел автор [2,3]. Автор заметил, что поля инвариантов конечных абелевых групп, линейно действующих на векторном пространстве V, естественно описываются как поля функций на некоторых торах, изогенных максимальным торам группы $GL(V)$ [4]. Это позволило использовать теорию бирациональных инвариантов в категории алгебраических торов и перевести задачу на язык модулей конечного ранга. Именно на этом языке выполнены работы Ленстра [1] и Эндо-Мията [3], завершившие классификацию полей инвариантов абелевых линейных конечных групп.

Первый пример нерационального поля инвариантов конечной группы G, действующей в линейном пространстве над замкнутым полем k, построил Солтман[1]. Он нашел способ вычислять неразветвленную группу Брауэра поля инвариантов $k(V)^G$ для некоторых групп G, и в ряде случаев она оказалась нетривиальной. Богомолов [1] предложил свою элегантную конструкцию. Очень интересен обзор Кольо-

Телена и Сансюка [2], в котором они изложили свое видение проблемы. Интересные результаты получил Берже [1], изучая факторы конечных групп, действующих на торических многообразиях. Более подробное изложение современного состояния классической задачи о приведении пары матриц к простейшему виду можно найти в статьях Форманека [1,2], показавшего, что поле рациональных функций на факторе $(M(n) \oplus M(n))/GL(n)$ можно реализовать как поле рациональных функций на явно описываемом алгебраическом торе. В статье Бессенрод и Ле Брюна [1] вычисления доведены до $n|420$. Для таких n фактор стабильно рационален.

Еще одно направление появилось в теории алгебраических групп в результате исследований Кольо-Телена и Сансюка [1] R-эквивалентности на алгебраических торах. Продолжая их исследования, автор заметил [7,8], что R-эквивалентность на унимодулярных группах простых алгебр тесно связана с результатами Платонова [2,3] по проблеме Таннака-Артина. Недавно Меркурьев [1] изобрел способ вычислять R-эквивалентность на полупростых группах присоединенного типа и показал, что среди них имеются нерациональные. Это опровергает одну известную гипотезу.

Вопросы арифметики алгебраических групп изложены в книге достаточно подробно с необходимыми комментариями. Отметим только, что необходимые сведения из теории алгебраических полей читатель может почерпнуть из сборника статей "Алгебраическая теория чисел" под ред. Касселса и Фрелиха и книги Боревича и Шафаревича "Теория чисел". Общие свойства дзета и L-функций схем достаточно подробно изложены в докладе Серра [1]. Локальные и глобальные дзета-функции алгебраического тора вычислены в книге Серра [3].

Завершая эту серию работ, я благодарю Елену Манько за огромный труд по весьма квалифицированному и безупречному набору текстов на компьютере.

ЛИТЕРАТУРА

АТЧ

1. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж.Касселса, А.Фрелиха. М.: Мир, 1969.

Басс Х.

1. Алгебраическая К-теория. М.: Мир, 1973.

Берже (Barge J.)

1. Cohomologie des groupes et corps d'invariants multiplicativs // Math. Ann., 1989. T.283. S.519-528.

Бессенрод, Ле Брюн (Bessenrodt C., Le Bruyn L.)

1. Stably rationality of certain PGL(n) quotients // Invent.Math., 1991. V.104. P.179-199.

Богомолов Ф.А.

1. Группа Брауэра фактор-пространств линейных представлений // Изв. АН СССР, серия матем., 1987. Т.51:3. С.485-516.

Боревич З.И., Шафаревич И.Р.

1. Теория чисел. М.:Наука, 1985.

Борель (Borel A.)

1. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
2. Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам, М.: Мир, 1973. С.9-59.

Ван-дер-Варден Б.Л.

1. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Вейль (Weil A.)

1. The field of definition of a variety // Amer. J. Math., 1956. V.56. P.509-524.
2. Алгебры с инволюциями и классические группы // Математика, 1963. Т.7:4. С.31-55.
3. Адели и алгебраические группы // Математика, 1964. Т.8:2. С.3-74.

Воскресенский В.Е.

1. Группа Пикара линейных алгебраических групп // Исслед. по теории чисел. Саратов: СГУ, 1969. С.7-16.
2. О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп // ДАН СССР, 1969. Т.188:5. С.978-981.
3. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп // Изв. АН СССР, серия матем., 1970. Т.34:1. С.3-19.
4. К вопросу о строении подполя инвариантов циклической группы автоморфизмов поля $\mathbf{Q}(x_1, .., x_n)$ // Изв. АН СССР, серия матем., 1970. Т.34:2. С.366-375.
5. Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраических торов // Proc. Internat. Congress of Math. Vancouver, Canada, 1974. V.1. P.343-347.
6. О бирациональных инвариантах алгебраических торов // УМН, 1975. Т.30:2. С.207-208.
7. О приведенной группе Уайтхеда простой алгебры // УМН, 1977. Т.32:6. С.247-248.
8. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.
9. Максимальные торы без аффекта в полупростых алгебраических группах // Матем. заметки, 1988. Т.44:3. С.309-318.
10. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, I // Вестник СамГУ, 1997. N2(4). С.18-98.
11. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, II // Вестник СамГУ, 1997. N4(6). С.5-68.
12. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, III // Вестник СамГУ, 1998. N2(8). С.5-54.

Воскресенский В.Е., Клячко А.А.

1. Торические многообразия Фано и системы корней // Изв. АН СССР, серия матем.,1984. Т.48:2. С.237-263.

Воскресенский В.Е., Фомина Т.В.

1. Целые структуры в алгебраических торах // Изв. РАН, серия матем., 1995. Т.59:5. С.3-18.

Гротендик (Grothendieck A.)

1. Le groupe de Brauer I,II,III // Dix exposes sur la cohomologie des schemas. North-Holland, Amsterdam, 1968. P.46-188.
2. Technique de descente et theoremes d'existence en geometrie algebriques // Semin. Bourbaki, 1959-1960, expose 195.

Гротендик, Демазюр (Grothendieck A., Demazure M.)

1. Schemas en groupes, I. Berlin: Springer, 1977.

Драксл (Draxl P.)

1. SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen // J.reine ang. Math., 1977. B.293/294. S.116-142.

Дресс (Dress A.)

1. The permutation class group of finite group // J.Pure and Appl. Algebra, 1975. V.6. P.1-12.

Жилле (Gille P.)

1. Un theoreme de finitude arithmetique sur les groupes reductifs // C.R. Acad. Sci. Paris, 1993. T.316, serie 1. P.701-703.

Катаяма (Katayama S.)

1. Isogenous tori and the class number formulae // J. Math. Kyoto Univ., 1991. V.31. P.679-694.

Кнезер (Kneser M.)

1. Galois Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen uber p-adischen Korpern // Math. Z., 1965. T.88. S.40 - 47; II. Ibid., 1965. T.89. S.250-272.

Кольо-Телен, Сансюк (Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J.)

1. La R-equivalence sur les tores // Ann. sci. Ec. Norm. Sup., 1977. V.10:2. P.175-230.
2. The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups // IX Escuela Latinoamericana de Math. Santiago de Chile, 1988.

Кунявский Б.Э.

1. О торах с биквадратичным полем разложения // Изв. АН СССР, серия матем., 1978. Т.42:3. С.580-587.

Ленг, Тейт (Lang S., Tate J.)

1. Principles homogeneous spaces over abelian varieties // Amer. J. Math., 1958. V.80. P.659-684.

Ленстра (Lenstra H.W., Jr.)

1. Rational functions invariant under a finite abelian group // Invent. Math., 1974. V.25. P.299-325.
2. Rational functions under a cyclic group // Queen's papers in pure and appl. Math., 1980. V.54. P.9.

Манин Ю.И.

1. Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES, 1966. V.30. P.55-113.
2. Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Маргулис Г.А.

1. Конечность фактор-групп дискретных подгрупп // Функц. анализ и его приложения, 1979. Т.13:3. С.28-39.

Меркурьев (Mercuriev A.)

1. R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups, preprint.

Монастырный А.П.

1. Спинорные фактор-группы и R-эквивалентность// ДАН БССР, 1991. Т.35:1. С.9-13.

Оно (Ono T.)

1. On some class number relations for Galois extension // Proc. Jap. Acad., 1985. A61, N10. P.311-312.

Платонов В.П.

1. Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера-Титса для алгебраических групп // Известия АН СССР, серия матем., 1969. Т.33:6. С.1211-1219; 1970. Т.34:4. С.775:777.
2. О проблеме Таннака-Артина // ДАН СССР, 1975. Т.221:5. С.1038-1041.
3. Проблема Таннака-Артина и приведенная К-теория// Известия АН СССР, серия матем., 1976. Т.40:2. С.227-262.

Платонов В.П., Рапинчук А.С.

1. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.

Попов В.Л.

1. Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения // Изв. АН СССР, серия матем. 1974. Т.38:2. С.294-322.

Сансюк (Sansuc J.-J.)

1. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres // J. reine und angew. Math., 1981. T.327. S.12-80.

Сегре (Segre B.)

1. Sur un probleme de M.Zariski // Colloque intern. d'algebre et de theorie des nombres, Paris, 1950. P.135-138.
2. Arithmetical questions on Algebraic Varieties, London, 1951.

Серр Ж.П.

1. Дзета-функция и L-функции // УМН, 1965. Т.20:6. С.19-26.
2. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
3. Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.

Солтман (Soltman D.J.)

1. Noether's problem over an algebaically closed fields // Invent.Math., 1984. V.77. P.71-84.

Суон (Swan R.G.)

1. Индуцированные представления и проективные модули // Математика, 1964. Т.8:2. С.3-27.
2. Invariant rational functions and a problem of Steenrod // Invent. Math., 1969. V.7. P.148-158.

Фомина Т.В.

1. Группа классов норменной гиперповерхности // Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб. Самарский ун-т, 1992. С.140-146.

Форманек (Formanek E.)

1. The center of 3×3 generic matrices // Lin. and Multilin. Alg., 1979. V.7. P.203-212.
2. The center of 4×4 generic matrices // J. Algebra, 1980. V.62. P.304-319.

Хассе (Hasse H.)

1. Uber die Klassenzahl abelscher Zahlkorper. Berlin, 1952.

Хиронака (Hironaka H.)

1. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero // Ann. Math., 1964. V.79. P.109-326.

Чистов А.Л.

1. О бирациональной эквивалентности торов с циклическим полем разложения // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1976. Т.64. С.153-158.

2. О числе образующих полугруппы классов алгебраических торов относительно стабильной эквивалентности// ДАН СССР, 1978. Т.242:5. С.1027-1029.

Шевалле (Chevalley C.)

1. On algebraic group varieties // J. Math. Soc.Japan, 1954. V.6. P.303-324.

Эндо, Мията (Endo S., Miyata T.)

1. Invariants of finite abelian groups // J. Math. Soc. Japan, 1973. V.25. P.7-26.
2. Quasi-permutation modules over finite groups // I. J.Math. Soc. Japan, 1973. V.25. P.347-421; II. J.Math. Soc. Japan, 1974. V.26. P.698-713.
3. On a classification of the function fields of algebraic tori // Nagoya Math. J., 1974. V.56. P.85-104.
4. On the progective class group of finite groups // Osaka J. Math., 1976. V.13. P.109-122.
5. On the class groups of dihedral groups // J. of Algebra, 1980. V.63:2. P.548-573.
6. Integral represantations with trivial first cohomology groups // Nagoya Math. J., 1982. V.85. P.231-240.

Янчевский В.И.

1. Приведенная унитарная К-теория. Приложения к алгебраическим группам // Матем.сб., 1979. Т.110:4. С.579-596.

BIRATIONAL GEOMETRY AND ARITHMETIC OF LINEAR ALGEBRAIC GROUPS, IV.

V. Voskresenskii [2]

The previous chapters have been published in the issues of Vestnik SamGU N2, N4, 1997 and N2 1998. In this part of the work the theory of R-equivalence on linear algebraic groups is stated. The class group of R-equivalence is also a birational invariant in the category of linear k-groups and this category is the most natural area of the application of R-equivalence. The concept of R-equivalence was introduced in the arithmetic of varieties by Manin [2]. This section contains the results of Colliot-Thelene and Sansuc on the computation of R-equivalence of algebraic tori and the author's result on investigation of R-equivalence on simply connected semisimple groups and on the connections between the class group of R-equivalence with Whitehead group $SK_1(A)$ which has been studiced by Platonov. The R-equivalence on the groups of adjoint type is described including recent results of Merkurjev. In conclusion the class numbers of algebraic tori of two most often encountered types are calculated. It leads to interesting index-formulas in the arithmetic of number fields.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 99-01-00014.

[2]Valentin Voskresenskii, departament of mathematics, Samara state university