ОСОБЕННОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИТОВ

А.В. Былим, Л.А. Сараев, В.А. Сахабиев, [1]

В предлагаемой работе разработаны модели упругопластического деформирования композитов описывающие их нелинейное поведение за пределом упругости. Эти модели являются обобщением результатов работы [5], полученных в предположении одновременного пластического течения во всех точках одного из компонентов, и учитывают возникновение и развитие эон пластического течения в отдельных областях одного из компонентов.

1. Пусть двухкомпонентная матричная смесь занимает в пространстве объем V, ограниченный поверхностью S.

Предполагается, что компоненты материала соединены между собой с идеальной адгезией.Первый компонент является упругопластическим

$$\sigma_{ij} = 2\mu_1(\varepsilon_{ij} - e^p_{ij}) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{pp}, \tag{1}$$

а второй – идеально упругим

$$\sigma_{ij} = 2\mu_2\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda_2\varepsilon_{pp}. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{ij}(r)$ – компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_{ij}(r)$, $e^p_{ij}(r)$ – компоненты тензора полных и пластических деформаций, μ_s,λ_s – параметры Ламе изотропных компонентов $(s = 1, 2)$, $r = (x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор координат, а пластические деформации удовлетворяют условию несжимаемости:$\varepsilon^p_{kk} = 0$. Пластические свойства материала первого компонента задаются поверхностью текучести Мизеса

$$s_{ij}(r)s_{ij}(r) = k_1^2(r) \tag{3}$$

с ассоциированным законом течения

$$s_{ij}(r) = k_1(r)\frac{\dot{e}^p_{ij}(r)}{\sqrt{\dot{e}^p_{kl}(r)\dot{e}^p_{kl}(r)}} \tag{4}$$

(точкой обозначено дифференцирование по времени).

Структура такого двухкомпонентного композиционного материала описывается случайной изотропной функцией координат $\kappa_2(r)$, равной единице в объеме V_2 и нулю

[1]Былим Анна Владимировна, Сараев Леонид Александрович, Сахабиев Виталий Ансарович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета

вне этого объема. Кроме того, геометрические особенности возникающих и развивающихся в объеме включений зон пластического течения описывает дополнительная индикаторная функция $\kappa_p(r)$, равная единице в объеме V_p, $(0 \le V_p \le V_1)$ и нулю вне этого объема.

С помощью этих функций локальный закон Гука для среды можно записать в виде

$$\sigma_{ij}(r) = 2\mu_1\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{qq}(r) + (2[\mu]\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}[\lambda]\varepsilon_{qq}(r))\kappa_2(r) - 2\mu_1 e^p_{ij}(r)\kappa_p(r). \quad (5)$$

Здесь $[f] = f_2 - f_1$.

Все индикаторные функции, напряжения, полные и пластические деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими случайными полями, и их математические ожидания заменяются средними значениями по полному объему V,объемам компонентов V_s $(s = 1, 2)$ и объему V_p:

$$< f >= \frac{1}{V}\int\limits_V f(r)dr, < f >_{s,p} = \frac{1}{V_{s,p}}\int\limits_{V_{s,p}} f(r)dr$$

угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Запишем определяющую систему уравнений, состоящую из закона Гука (5), уравнений равновесия

$$\sigma_{iq,q}(r) = 0 \quad (6)$$

и формул Коши

$$2\varepsilon_{ij}(r) = u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r), \quad (7)$$

связывающих компоненты тензора малых упругопластических деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(r)$. Граничными условиями для замкнутой системы (5), (6), (7) являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности S объема V:

$$f(r)|_{r\in S} =< f > . \quad (8)$$

Для установления макроскопических определяющих уравнений и вычисления эффективных характеристик рассматриваемого композиционного материала необходимо статистически осреднить по объемам V и V_p уравнения (3), (4), (5):

$$< s_{ij}s_{ij} >_p = k_1^2, 4\mu_1^2 < (e_{ij} - e^p_{ij})(e_{ij} - e^p_{ij}) >_p = k_1^2, \quad (9)$$

$$< \sigma_{ij} >= 2\mu_1 < \varepsilon_{ij} > +\delta_{ij}\lambda_1 < \varepsilon_{qq} > +c_2(2[\mu] < \varepsilon_{ij} >_2 + \delta_{ij}[\lambda] < \varepsilon_{qq} >_2) - 2\mu_1 c_p < e^p_{ij} >_p . \quad (10)$$

Здесь константы $c_s = V_s V^{-1}$ – объемные содержания компонентов, причем $< \kappa_s >= c_s$. Соотношения (9) и (10) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $< \varepsilon_{ij} >_2$, $< \varepsilon_{ij} >_p$,$< e^p_{ij} >_p$ через макроскопические деформации $< \varepsilon_{ij} >$ и остаточные деформации e^*_{ij}. Это достигается статистическим осреднением определяющей системы уравнений, при этом будем пренебрегать флуктуациями пластических деформаций в объеме V_p. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\sigma_{ij}(r) = 2(< \mu > +[\mu]\kappa_2'(r))\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}(< \lambda > +[\lambda]\kappa_2'(r))\varepsilon_{qq}(r) - 2\mu_1\kappa_p(r) < e^p_{ij} >_p . \quad (11)$$

Величины $<\varepsilon_{ij}>_s$ найдем, используя известное соотношение

$$<\varepsilon_{ij}>_s=<\varepsilon_{ij}>+c_s^{-1}<\kappa_s'\varepsilon_{ij}'> \tag{12}$$

Для вычисления случайных моментов $<\kappa_s'\varepsilon_{ij}'>$ введем тензор Грина, следуя методу обобщенного сингулярного приближения теории случайных полей и используя сделанные ранее предположения

$$G_{ik}(r)=\frac{1}{8\pi<\mu>}(\delta_{ij}r_{,pp}-\frac{<\lambda>+<\mu>}{<\lambda>+2<\mu>}r_{,ik}) \tag{13}$$

Заменим систему (6), (7), (11) с граничными условиями (8) системой интегральных уравнений равновесия, ядрами которых служат вторые производные тензора Грина

$$\varepsilon_{ij}'(r)=\int\limits_V G_{ik,lj}(r-r_1)\tau_{kl}'(r_1)dr_1, \tag{14}$$

где $\tau_{ij}(r)=-(2[\mu]\varepsilon_{ij}(r)+\delta_{ij}[\lambda]\varepsilon_{qq}(r))\kappa_2'(r)+2\mu_1\kappa_p(r)<e_{ij}^p>_p$, здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V.

Подстановка уравнений (14) в соотношение (12) с учетом свойств изотропности функции $\kappa_2(r)$, $\kappa_p(r)$ приводит к уравнениям относительно величин $<\varepsilon_{ij}>_2$, $<\varepsilon_{ij}>_p$ решая которые найдем

$$<e_{ij}>_2=\frac{1-\alpha[m]c_2}{1-\alpha[m][c]}<e_{ij}>-\frac{\alpha m_1c_p}{1-\alpha[m][c]}<e_{ij}^p>_p, \tag{15}$$

$$<\varepsilon_{qq}>_2=\frac{1-\gamma[q]c_2}{1-\gamma[q][c]}<\varepsilon_{qq}>, \tag{16}$$

$$<e_{ij}>_p=\frac{1+\alpha[m]c_1}{1-\alpha[c][m]}<e_{ij}>-\frac{\alpha m_1}{1-\alpha[m]c_2}(\frac{\alpha[m]c_2c_p}{1-\alpha[m][c]}-1+c_p)<e_{ij}^p>_p. \tag{17}$$

Здесь

$$\alpha=\frac{2}{15}\frac{4-5<\nu>}{1-<\nu>};\beta=\frac{1}{15}\frac{1}{1-<\nu>};\gamma=\frac{1}{3}\frac{1+<\nu>}{1-<\nu>},$$

$$m_s=\frac{\mu_s}{<\mu>},q_s=\frac{K_s}{<K>},K_s=\lambda_s+\frac{2}{3}\mu_s,[m]=m_2-m_1,[q]=q_2-q_1.$$

Подставляя найденные компоненты тензоров деформаций (15), (16), (17) в соотношения (10) и выделяя девиаторную и объемную части, получим эффективный закон Гука рассматриваемого композиционного материала

$$<s_{ij}>=2\mu^*<e_{ij}>-2\mu^p<e_{ij}^p>_p,<\sigma_{qq}>=3K^*<\varepsilon_{qq}>. \tag{18}$$

Здесь

$$\mu^*=<\mu>(1-\frac{\alpha c_1c_2[m]^2}{1-\alpha[m][c]}),K^*=<K>(1-\frac{\gamma c_1c_2[q]^2}{1-\gamma[q][c]}) \tag{19}$$

– эффективные модули сдвига и объемного растяжения (сжатия),

$$\mu^p=\mu_1\frac{1+\alpha c_1[m]}{1-\alpha[m][c]}. \tag{20}$$

Выражения для μ^*, K^* совпадают с известными формулами сингулярного приближения для двух компонентных сред [7]. Остаточные деформации e^*_{ij} связаны с макроскопическими пластическими деформациями соотношением

$$< e^p_{ij} >= c_p < e^p_{ij} >_p = \frac{\mu^*}{\mu^p} e^*_{ij}. \tag{21}$$

Определим теперь поведение композита за пределом упругости. Для этого воспользуемся полученным уравнением (9) и условием того, что квадраты среднего значения величины всегда меньше среднего значения ее квадрата: $< z >^2 \leq < z^2 >$.Таким образом, получаем верхнюю оценку для поверхности текучести материала в объеме V_1

$$(< e_{ij} >_p - < e^p_{ij} >_p)(< e_{ij} >_p - < e^p_{ij} >_p) = \frac{k_1^2}{4\mu_1^2}. \tag{22}$$

Подставляя в соотношение (22) формулу (17) и исключая деформации $< e_{ij} >_p$, $< e_{ij} >$, $< e^p_{ij} >$ с помощью формул (17), (18)-(20), находим закон нагружения рассматриваемой среды

$$< s_{ij} >= k^* \frac{< e^{\cdot *}_{ij} >}{\sqrt{< e^{\cdot *}_{kl} >< e^{\cdot *}_{kl} >}} + 2n^* e^*_{ij}. \tag{23}$$

Здесь

$$k^* = \frac{k_1}{m_1} \frac{1 - \alpha[m][c] - \alpha c_1 c_2 [m]^2}{1 + \alpha c_1 [m]} \tag{24}$$

– эффективный предел текучести;

$$n^* = \mu^* \left(\frac{k^*}{k_1 c_p} \frac{1 - \alpha[m][c]}{1 + \alpha c_1 [m]} (1 + \frac{\alpha m_1}{1 - \alpha[m] c_2} (\frac{\alpha c_2 c_p [m]}{1 - \alpha[m][c]} - 1 + c_p)) - 1 \right) \tag{25}$$

– коэффициент упрочнения.

Полученные уравнения (23) - (25) описывают нелинейное деформирование композиционного материала за пределом упругости.

Эффективный предел текучести k^* характеризует начальную поверхность текучести. Он является линейной функцией концентрации и при $c_1 = 1$ равен пределу текучести материала включений k_1. Коэффициент упрочнения n^* задает скорость перемещения и деформирования цилиндра Мизеса в шестимерном пространстве напряжений. При $c_1 = 1$ n^* обращается в нуль, что соответствует идеальной пластичности материала включений, при $c_1 = 0$ n^* обращается в бесконечность, что означает идеально-упругое поведение материала матрицы. Величина c_p изменяется от 0 до c_2 при увеличении интенсивности e^*_{ij}. Будем аппроксимировать эту зависимость экспоненциальным законом

$$c_p = c_1 (1 - e^{-\lambda e^*}), \tag{26}$$

где $e^* = \sqrt{e^* e^*}$. Величина λ характеризует скорость роста c_p.

Таким образом, согласно полученной модели, деформирование композита за пределом упругости происходит в два этапа и должно рассчитываться по двум моделям. А именно, до наступления в каждой точке упругопластического компонента пластического течения поведение композита описывается нелинейными уравнениями, а после наступления пластического течения в каждой точке упругопластического компонента – по закону линейного кинематического упрочнения.

2. Пусть теперь композиционный материал образован упругой матрицей V_1 и сферическими упругопластическими включениями V_2. Закон Гука такого композита имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu_1\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{pp}, \tag{27}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu_2(\varepsilon_{ij} - e^p_{ij}) + \delta_{ij}\lambda_2\varepsilon_{pp}. \tag{28}$$

Пластические свойства материала второго компонента задаются поверхностью текучести Мизеса с соответствующим ассоциированным законом течения

$$s_{ij}(r)s_{ij}(r) = k_2^2(r), s_{ij}(r) = k_2(r)\frac{\dot{e}^p_{ij}(r)}{\sqrt{\dot{e}^p_{kl}(r)\dot{e}^p_{kl}(r)}}. \tag{29}$$

Используя индикаторные функции координат $\kappa_2(r), \kappa_p(r)$, запишем закон Гука для среды

$$\sigma_{ij}(r) = 2\mu_1\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{qq}(r) + (2[\mu]\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}[\lambda]\varepsilon_{qq}(r))\kappa_2(r) - 2\mu_2 e^p_{ij}(r)\kappa_p(r). \tag{30}$$

Для установления эффективного закона деформирования среды необходимо статистически осреднить определяющую систему, состоящую из уравнений (29), уравнений равновесия (6) и соотношений Коши (7) с граничными условиями (8). Как и ранее, пренебрегая флуктуациями полных и пластических деформаций в объемах V_p и V, получим

$$\sigma_{ij}(r) = 2\mu_1\varepsilon_{ij}(r)+\delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{qq}(r)+(2[\mu]< \varepsilon_{ij} >_2+\delta_{ij}[\lambda]< \varepsilon_{qq} >_2)\kappa_2(r)-2\mu_2< e^p_{ij} >_p\kappa_p(r). \tag{31}$$

Введем тензор Грина

$$G_{ik}(r) = \frac{1}{8\pi\mu_1}(\delta_{ij}r_{,pp} - \frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}r_{,ik}), r = |r| \tag{32}$$

и, выполнив аналогичные преобразования, получим

$$< e_{ij} >_2 = \frac{1}{1-\alpha_1 c_1(m-1)}(< e_{ij} > + \frac{\alpha_1 c_1 m}{c_2}c_p < e^p_{ij} >_p), \tag{33}$$

$$< \varepsilon_{qq} >_2 = \frac{1}{1+\gamma_1 c_1(q-1)} < \varepsilon_{qq} >, \tag{34}$$

$$< e_{ij} >_p = \frac{1}{1-\alpha_1 c_1(m-1)}(< e_{ij} > + m(1-c_p)\alpha_1 < e^p_{ij} >_p). \tag{35}$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{15}\frac{4-5\nu_1}{1-\nu_1}, \gamma_1 = \frac{1}{3}\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}, \nu_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1+\mu_1)},$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, q = \frac{K_2}{K_1}, K_s = \lambda_s + \frac{2}{3}\mu_s.$$

Осреднив по полному объему V соотношение (30) и подставив полученные формулы (33) - (34), найдем эффективный закон деформирования композита

$$< s_{ij} > = 2\mu^*(< e_{ij} > - e^*_{ij}), < \sigma_{qq} > = 3K^* < \varepsilon_{qq} > . \tag{36}$$

Здесь

$$\mu^* = \mu_1(1 + \frac{c_2(m-1)}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}), K^* = K_1(1 + \frac{c_2(q-1)}{1+\gamma_1 c_1(q-1)}) \qquad (37)$$

– эффективные модули сдвига и объемного растяжения (сжатия). Остаточные деформации e^*_{ij} связаны с макроскопическими пластическими деформациями соотношением

$$< e^p_{ij} >= \frac{1}{m}(1 + (\alpha_1 c_1 + c_2)(m-1))e^*_{ij}. \qquad (38)$$

Выражения для μ^*, K^* совпадают с результатами, полученными в работах [6,7], по теории упругости композитов. Эти выражения показывают, что первый компонент играет роль связующей матрицы, а второй – роль отдельных включений, т.к. при $\mu_1 = 0, K_1 = 0$ величины $\mu^* \equiv K^* \equiv 0$ для любых c_1, c_2, а при $\mu_2 = 0, K_2 = 0$ величины μ^*, K^* тождественно в нуль не обращаются.

В работе [4] показано хорошее соответствие выражений для μ^*, K^* экспериментальным данным по измерению модуля Юнга $E^* = \frac{9\mu^* K^*}{\mu^*+3K^*}$ эпоксидной смолы, наполненной стеклянными микросферами.

Для определения поведения композита за пределом упругости осредним соотношения (29) по объему зоны пластического течения V_p

$$< s_{ij}s_{ij} >_p = k_2^2, 4\mu_2^2 < (e_{ij} - e^p_{ij})(e_{ij} - e^p_{ij}) >_p = k_2^2 \qquad (39)$$

и, применив правила механического смешивания, получим

$$(< e_{ij} >_p - < e^p_{ij} >_p)(< e_{ij} >_p - < e^p_{ij} >_p) = \frac{k_2^2}{4\mu_2^2}. \qquad (40)$$

Исключая из уравнения (40) с помощью формул (33) - (38) деформации $< e_{ij} >_p, < e_{ij} >, < e^p_{ij} >$, находим закон нагружения рассматриваемой среды в виде (23), однако здесь эффективный предел текучести и коэффициент упрочнения вычисляются по формулам

$$k^* = \frac{k_2}{m}(1 + (\alpha_1 c_1 + c_2)(m-1)), \qquad (41)$$

$$n^* = \mu^*(\frac{k^*}{k_2 c_2}(1 + \alpha_1((m-1)c_1 - m(1-c_p)) - 1)). \qquad (42)$$

Таким образом, нелинейное деформирование композиционного материала, образованного идеально упругой матрицей и упругопластическими включениями, за пределом упругости описывается уравнениями (23), (41), (42).

Здесь эффективный предел текучести k^*, характеризующий начальную поверхность текучести, является линейной функцией концентрации и при $c_2 = 1$ равен пределу текучести материала включений k_2. Коэффициент упрочнения n^* задает скорость перемещения и деформирования цилиндра Мизеса в шестимерном пространстве напряжений. При $c_p = c_2$ (это соответствует наличию пластического течения в каждой точке включений) формула для n^* совпадает с аналогичной формулой работы [3]. При $c_2 = 1$ – n^* обращается в нуль, что соответствует идеальной пластичности материала включений, при $c_2 = 0$ – n^* обращается в бесконечность, что означает идеально-упругое поведение материала матрицы. Величина c_p изменяется от 0 до c_2 при увеличении интенсивности e^*_{ij}. Будем аппроксимировать эту зависимость экспоненциальным законом

$$c_p = c_2(1 - e^{\lambda e^*}), \qquad (43)$$

где $e^* = \sqrt(e^* e^*)$.

Величина λ характеризует скорость роста c_p и может быть рассчитана из экспериментальных данных по измерению эффективного предела текучести.

Литература

[1] Адамс Д.Ф. Упругопластическое поведение композитов. //Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов. М.:Мир, 1978. С.196-241.

[2] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.:Наука, 1997. 288С.

[3] Дудакаленко В.В., Мешков С.И., Сараев Л.А. К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред //Журнал прикл. механики и техн. физики. 1979. N5. С.150-154.

[4] Кристенсен Р.С. Введение в механику композитов / Пер. с англ. М.:Мир, 1982. 334С.

[5] Сараев Л.А. Сингулярное приближение в теории упругопластических сред с микроструктурой // Прикл. матем. и механика. 1983. Вып.3. С.522-524.

[6] Хорошун Л.П., Маслов С.И. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянныхкомпозиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1980. 156С.

[7] Шермергор Т.Д. Теория упругости микроненднородных сред М.:Наука, 1977. 399С.

THE PERSICULARITIES OF TWO-COMPONENT COMPOSITE MATERIALS ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION

Bilim A.V., Saraev L.A., Sahabiev V.A., [2]

In this paper the models of composite materials elastic-plastic deformation, describing nonlinear behaviour beyond the limit of elastisity are proposed. The composite materials effective characteristics are calculated. The proposed models take infe account the appearance and development of plastic yeilding zones in one of the components particular areas.

[2]Bilim Anna Vladimirovna, Saraev Leonid Alexandrovitch, Sahabiev Vitaly Ansarovitch, dept. of math. Samara state university