АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ УСТОЙЧИВОГО СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha = \frac{2}{3}$

С.Я. Шатских, Е.М. Кнутова [1]

Работа посвящена изучению асимптотических свойств устойчивого сферически симметричного распределения с показателем 2/3, заданного в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость почти наверное условных распределений к гауссовским. Найдены явные выражения для бесконечномерных условных квантилей и их функций распределения.

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$ и борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(H)$. Выберем в H ортонормированный базис $\{e_j\}, j = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\mu_{2/3}\{\cdot\}$– устойчивое сферически симметричное распределение в H с характеристическим функционалом

$$\psi_{\mu_{2/3}}(y) = \exp\left\{ -\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < y, e_j >^2 \right)^{\frac{2}{3}} \right\}, \ \ y \in H,$$

где $\lambda_j > 0, \ \ j = 1, 2, ...; \ \ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty.$

Обозначим через $x_j =< x, e_j >, \ \ j = 1, 2, ...;$ и рассмотрим $W_{1...N}^{(2/3)}(x_1, ..., x_N)$ - конечномерную проекцию меры $\mu_{2/3}\{\cdot\}$ с характеристической функцией

$$\psi_{1...N}^{2/3}(y_1, ..., y_N) = \exp\left\{ -\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2 < y, e_j >^2 \right)^{\frac{2}{3}} \right\}$$

и плотностью [1]

$$w_k\left(\rho_k; \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2(\pi)^{\frac{k}{2}+1} \prod\limits_{j=1}^{k} \lambda_j} \rho_k^{-k} G_{1,2}^{2,1}\left(B\rho_k^{-2} \left| \begin{array}{c} 1 - \frac{k}{2} \\ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \end{array} \right. \right), \tag{1}$$

[1] Шатских Сергей Яковлевич, Кнутова Елена Михайловна, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

где $G_{1,2}^{2,1}(\cdot|\cdot)$– функция Мейера, $B = 2^2/\,3^3$, $\rho_k^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{x_j^2}{\lambda_j^2}$.

ЛЕММА. $W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_k) =$

$$= \frac{1}{2} + \operatorname{sgn}(x_i)\frac{1}{2}\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t}{1+\rho_k^2 t}; \frac{1}{2}, \frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt},$$

где $I(u;\alpha,\beta)$– бета-распределение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как [2, с. 313]

$$G_{1,2}^{2,1}\left(x \middle| \begin{array}{c} a \\ b\,,\,c \end{array}\right) = \Gamma\left(b-a+1\right)\Gamma\left(c-a+1\right)x^{(b+c-1)/2}e^{x/2}W_{\lambda,\,\mu}(x),$$

где $W_{\lambda,\,\mu}(x)$– функция Уиттекера, $\lambda = a - \frac{b+c+1}{2}$, $\mu = \frac{b-c}{2}$, то

$$w_k\left(\rho_k; \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{3}\right)}{2(\pi)^{\frac{k}{2}+1}\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}\rho_k^{-k}\exp\left(\frac{1}{2}B\rho_k^{-2}\right)W_{-\frac{k}{2},\,1/6}\left(B\rho_k^{-2}\right).$$

Используя представление функции Уиттекера [3, с. 24]

$$W_{\lambda,\,\mu}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}\int\limits_0^\infty e^{-xu}u^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1+u)^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}du,$$

получаем

$$w_k\left(\rho_k; \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}(\pi)^{\frac{k}{2}+1}\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}\int\limits_0^\infty e^{-Bu}u^{\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}(1+\rho_k^2 u)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}du. \tag{2}$$

Положим в формуле (2) $k-1$ вместо k:

$$w_{k-1}\left(\rho_{k-1}; \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)\lambda_i}{3^{\frac{3}{2}}(\pi)^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt, \tag{3}$$

где $\rho_{k-1}^2 = \rho_k^2 - \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}$.

Условная плотность (отношение правых частей формул (2) и (3)) имеет вид:

$$w_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_k) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\lambda_i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)}\frac{\int_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}(1+\rho_{k-1}^2 t+\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}dt}{\int_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i B\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} (1+\rho_{k-1}^2 t + \frac{x_i^2}{\lambda_i^2} t)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} dt}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{x_i} (1+\rho_{k-1}^2 t + \frac{s_i^2}{\lambda_i^2} t)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} ds_i = \frac{t^{-1/2}}{2} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} B\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2} t}{1+\rho_k^2 t}; \frac{1}{2}, \frac{k}{2}-\frac{1}{6} \right),$$

где $B(\cdot;\cdot,\cdot)$ – неполная B-функция, то, изменяя порядок интегрирования, получаем следующее представление интегральной функции распределения:

$$W_{i|1\ldots\hat{i}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k) = \int\limits_{-\infty}^{x_i} w_{i|1\ldots\hat{i}\ldots k}^{(2/3)}(s_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k) ds_i =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x_i) \frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2} t}{1+\rho_k^2 t}; \frac{1}{2}, \frac{k}{2}-\frac{1}{6} \right) dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} dt}, \qquad (4)$$

где $I(u;\alpha,\beta) = \frac{B(u;\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$– бета-распределение. Лемма доказана.

Введём обозначения:

$$l_\infty^2(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}; \qquad \Gamma \equiv \left\{ x \in H : 0 < l_\infty^2(x) < +\infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. 1^0. $\exp\left(-r^{2/3}\right) = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2\sigma^2}{2}\right) \frac{2^{3/2}}{3\pi\sigma^2} K_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma^{-1}\right) d\sigma;$ (5)

2^0. $\mu_{2/3}\{\Gamma\} = 1;$

3^0. $\mu_{2/3}\left\{l_\infty^2(x) \le u\right\} = G(u),$

где G(u) - распределение, плотность которого

$$g(u) = \frac{\sqrt{2}}{3\pi u^{\frac{3}{2}}} K_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\right),$$

а $K_\nu(\cdot)$– модифицированная функция Ганкеля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1^0. Формула (5) есть не что иное, как представление Шенберга для характеристической функции сферически симметричного устойчивого распределения с $\alpha = \frac{2}{3}$ [4, с. 37].

В самом деле, обозначим

$$J = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2\sigma^2}{2}\right) \frac{2^{3/2}}{3\pi\sigma^2} K_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma^{-1}\right) d\sigma.$$

Тогда после замены $u = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma^{-1}$ получаем

$$J = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^\infty \exp\left\{ - \left[\frac{r^2}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] \frac{1}{u^2} \right\} K_{\frac{1}{3}}(u) du.$$

Поскольку [5, с. 353]

$$\int_0^\infty e^{-\frac{p}{x^2}} K_{\frac{1}{3}}(cx) dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \exp\left[-3 \left(\frac{c^2 p}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \right],$$

то

$$J = \exp\left(-r^{2/3}\right).$$

Отметим, что необходимость использования функции Ганкеля становится естественной при рассмотрении доказательства пункта 3^0 данной теоремы. Кроме того, укажем на возможность доказательства формулы (5) на основе одной теоремы В.М. Золотарева [6, с. 201, теорема 2.10.1].

2^0. Прежде всего отметим, что $\Gamma \in \mathcal{B}(H)$ как множество сходимости последовательности $\mathcal{B}(H)$-измеримых функций [7, с. 271].

Рассмотрим в H гауссовскую меру $\mu_G\{\cdot\}$ с характеристическим функционалом

$$\psi_{\mu_G}(y) = exp\left\{ -\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 < y, e_j >^2 \right\}, \; y \in H.$$

Тогда последовательность линейных функционалов

$$< x, e_1 > \cdot \lambda_1^{-1}, < x, e_2 > \cdot \lambda_2^{-1}, ..., < x, e_j > \lambda_j^{-1}, ..., \;\; x \in H$$

относительно меры $\mu_G\{\cdot\}$ является последовательностью независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. На основе усиленного закона больших чисел А.Н. Колмогорова [7, с.418] можно утверждать, что

$$\mu_G \left\{ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2} = 1 \right\} = 1.$$

Откуда, используя критерий фундаментальности почти наверное [7, с. 271], для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_G \left\{ \sup_{K\geq 0} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} = 0. \qquad (6)$$

С другой стороны, рассматривая представление (5) устойчивого сферически симметричного распределения в виде смеси гауссовских, будем иметь

$$\mu_{2/3} \left\{ \sup_{K\geq 0} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \mu_{2/3} \left\{ \max_{0\le K\le M} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \cdot \int_0^\infty \mu_G^\sigma \left\{ \max_{0\le K\le M} \left| \tfrac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} \tfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3\pi\sigma^2} K_{\frac{1}{3}} \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma^{-1} \right) d\sigma, \tag{7}$$

где $\mu_G^\sigma\{\cdot\}$ - гауссова мера в R^{N+M} с характеристической функцией

$$\psi_{\mu_G^\sigma}(y_1,...,y_{N+M}) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^{N+M} y_j^2 \right).$$

Введём обозначения

$$A_{N,M}(\varepsilon) = \mu_G^1 \left\{ \max_{0\le K\le M} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} u_j^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} u_j^2 \right| > \varepsilon \right\},$$

$$B_N(\varepsilon) = \mu_G \left\{ \sup_{k\ge 0} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\}.$$

Тогда для натуральных N и M и для любого $\varepsilon > 0$:

$$B_N(\varepsilon) \ge A_{N,M}(\varepsilon),$$

$$\mu_G^\sigma \left\{ \max_{0\le K\le M} \left| \tfrac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} = A_{N,M}\left(\tfrac{\varepsilon}{\sigma^2}\right). \tag{8}$$

Поэтому, используя (7) и (8), получаем

$$\mu_{2/3} \left\{ \sup_{k\ge 0} \left| \tfrac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \int_0^\infty B_N\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^2}\right) K_{\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma^{-1} \right) d\sigma. \tag{9}$$

Так как ввиду (6) для любых $\varepsilon > 0$ и $\sigma^2 > 0$

$$\lim_{N\to\infty} B_N\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^2}\right) = 0$$

и $0 \le B_N\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^2}\right) \le 1$, то на основе теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из неравенства (9) получаем

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{2/3} \left\{ \sup_{K\ge 0} \left| \frac{1}{N+K} \sum_{j=1}^{N+K} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2} \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Итак, последовательность

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{< x, e_j >^2}{\lambda_j^2}\right\}, \quad N = 1, 2, ...;$$

фундаментальна п.н. по мере $\mu_{2/3}\{\cdot\}$. Следовательно, $\mu_{2/3}\{\Gamma\} = 1$.

3^0. Вначале вычислим вероятность

$$\mu_{2/3}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\}.$$

Так как

$$\mu_{2/3}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} = \underset{\left\{\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2 \le u\right\}}{\int\cdots\int} w_k\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}; \frac{2}{3}\right) dx_1...dx_k,$$

то, используя выражение (2) для плотности и известную формулу для вычисления кратного интеграла от сферически симметричной функции [8, с. 403]:

$$\underset{\left\{\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^2 \le R^2\right\}}{\int\cdots\int} f\left(\sqrt{x_1^2 + ... + x_k^2}\right) dx_1...dx_k = 2\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^R r^{k-1} f(r) dr,$$

получаем

$$\mu_{2/3}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} =$$

$$= 2\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{\sqrt{uk}} r^{k-1}\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}(\pi)^{\frac{k}{2}+1}}\int\limits_0^{\infty} e^{-Bs} s^{\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}(1 + r^2 s)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} ds dr =$$

$$= \frac{2^{\frac{4}{3}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} e^{-Bs} s^{\frac{k}{2}-\frac{1}{3}}\int\limits_0^{\sqrt{uk}} r^{k-1}(1 + r^2 s)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} dr ds.$$

С помощью замены $\frac{r^2 s}{1+r^2 s} = t$ вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^{\sqrt{uk}} r^{k-1}(1 + r^2 s)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{3}} dr = \frac{1}{2}s^{-\frac{k}{2}}\int\limits_0^{\frac{uks}{1+uks}} t^{\frac{k}{2}-1}(1-t)^{-\frac{2}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}s^{-\frac{k}{2}} B\left(\frac{uks}{1+uks}; \frac{k}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Применяя бета-распределение I, будем иметь

$$\mu_{2/3}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}\le u\right\}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-Bs}s^{-\frac{1}{3}}B\left(\frac{uks}{1+uks};\frac{k}{2},\frac{1}{3}\right)ds=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi}\int\limits_0^\infty e^{-Bs}s^{-\frac{1}{3}}I\left(\frac{uks}{1+uks};\frac{k}{2},\frac{1}{3}\right)ds.$$

Воспользуемся асимптотической формулой Л.Н. Большева для бета-распределения [9, с. 28]

$$I(x;a,b)=1-P(2y,2a)+\frac{\gamma(y,a)}{6(2b+a-1)^2}+r(y,b,a),$$

где $P(x,n)=1-F_n(x)$ – интеграл вероятностей χ^2; $F_n(x)$–функция распределения χ^2 с n степенями свободы;

$$y=\frac{x(2b+a-1)}{2-x},\quad \gamma(y,a)=\frac{y^a e^{-y}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(2y^2-(a-1)y-(a^2-1)\right)}.$$

Если $a=const$ и $b\to\infty$, то остаток $r(y,b,a)=O(b^{-4})$ равномерно по $x\in]0,1[$.

Применяя известное соотношение

$$I(x;a,b)=1-I(1-x;b,a),$$

получаем равенство

$$I\left(\frac{uks}{1+uks};\frac{k}{2},\frac{1}{3}\right)=1-I\left(\frac{1}{1+uks};\frac{1}{3},\frac{k}{2}\right)=P\left(2y_k,\frac{2}{3}\right)-\frac{\gamma\left(y_k,\frac{1}{3}\right)}{6(k-\frac{2}{3})^2}+O\left(\frac{16}{k^4}\right),$$

где при $k\to\infty$

$$y_k=\frac{k-\frac{2}{3}}{1+2uks}\to\frac{1}{2us},$$

$$\frac{\gamma\left(y_k,\frac{1}{3}\right)}{6(k-\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{k-\frac{2}{3}}{1+2uks}}e^{-\frac{k-\frac{2}{3}}{1+2uks}}}{6\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2(k-\frac{2}{3})^2}{(1+2uks)^2}+\frac{2(k-\frac{2}{3})}{3(1+2uks)}+\frac{8}{9}\right)}\to 0.$$

Итак,

$$\lim_{k\to\infty}I\left(\frac{uks}{1+uks};\frac{k}{2},\frac{1}{3}\right)=P\left(\frac{1}{us},\frac{2}{3}\right). \tag{10}$$

Тогда, ввиду ограниченности $I(x;\alpha,\beta)$,

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{2/3}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}\le u\right\}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi}\int\limits_0^\infty e^{-Bs}s^{-\frac{1}{3}}P\left(\frac{1}{us},\frac{2}{3}\right)ds=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi}\int\limits_0^\infty e^{-Bs}s^{-\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int\limits_0^{\frac{1}{us}}x^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{x}{2}}dx\right]ds=$$

$$= 1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-Bs} s^{-\frac{1}{3}} \int\limits_0^{\frac{1}{us}} x^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{x}{2}} dx ds,$$

поскольку

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{3}{2}}\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-Bs} s^{-\frac{1}{3}} ds = \frac{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\pi\sin\left(\pi/3\right)} = 1.$$

Обозначим

$$G(u) = 1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-Bs} s^{-\frac{1}{3}} \int\limits_0^{\frac{1}{us}} x^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{x}{2}} dx ds.$$

Плотность распределения $G(u)$ есть функция

$$g(u) = G'(u) = \frac{u^{-\frac{4}{3}}}{3^{\frac{3}{2}}\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-Bs - \frac{1}{2us}} s^{-\frac{2}{3}} ds.$$

Так как [10, с. 354]

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x} - \gamma x} dx = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right), \quad \mathrm{Re}\beta > 0, \mathrm{Re}\gamma > 0 \ ,$$

где

$K_{\nu}(\cdot)$ – модифицированная функция Ганкеля;

$$\nu = \frac{1}{3},\ \gamma = B,\ \beta = \frac{1}{2u},$$

то

$$g(u) = \frac{\sqrt{2}}{3\pi u^{\frac{3}{2}}} K_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Итак, пользуясь тем фактом, что из сходимости почти наверное следует сходимость по распределению, учитывая пункт 2^0, будем иметь:

$$\mu_{2/3}\{l_{\infty}^2(x) \le u\} = G(u).$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. При замене переменной $u = 2x$ в интеграле плотность $g(u)$ преобразуется к виду

$$2g(2x) =,$$

где $g\left(x; \frac{1}{3}, 1\right)$ – плотность одномерного устойчивого распределения с показателем $\alpha = 1/3$ [6, с. 188].

ТЕОРЕМА 2.

1^0. Для любого $x \in \Gamma \equiv \left\{x \in H : 0 < l_{\infty}^2(x) < +\infty\right\}$,

$$\lim_{k\to\infty} W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_k) = \Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_{\infty}(x)}\right) \tag{11}$$

2^0. Случайная величина

$$\Phi\left(\frac{<x,e_i>}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)$$

не зависит от σ-алгебры, порождённой семейством $\{<x,e_k>,\quad k=1,2,...;k\neq i\}$.

3^0. Для любого $x^0\in\Gamma$ такого, что $l_\infty^2(x^0)\neq 0$,

$$\lim_{N\to\infty} q^0_{i|1\ldots\hat{\imath},\ldots,N}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_N) = <x^0,e_i> \frac{l_\infty(x)}{l_\infty(x^0)} \tag{12}$$

для всех $x\in\Gamma$.

4^0. Если $<x^0,e_i>\ >0$, то

$$\mu_{2/3}\left\{q^0_{i|1\ldots\hat{\imath},\ldots,k,\ldots}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k,...)\leq u\right\} = \begin{cases} G\left(u^2\frac{l_\infty^2(x^0)}{<x^0,e_i>^2}\right), & u\geq 0;\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

Если $<x^0,e_i>\ <0$, то

$$\mu_{2/3}\left\{q^0_{i|1\ldots\hat{\imath},\ldots,k,\ldots}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k,...)\leq u\right\} = \begin{cases} 1, & u\geq 0;\\ 1-G\left(u^2\frac{l_\infty^2(x^0)}{<x^0,e_i>^2}\right), & u<0.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1^0. Согласно [11], для всех $x\in(0,1)$ выполняется двойное неравенство

$$\Phi\left(x\sqrt{N-\frac{1}{2}}\right)\leq\frac{1}{2}\left[1+I\left(x^2;\frac{1}{2},\frac{N}{2}\right)\right]\leq\Phi\left(\frac{x\sqrt{N}}{\sqrt{1-x^2}}\right), \tag{13}$$

для всех достаточно больших натуральных N.

Полагая в (13)

$$x^2=\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t}{1+\rho_k^2 t},\quad \frac{N}{2}=\frac{k}{2}-\frac{1}{6},$$

получим:

$$\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{t(k-\frac{5}{6})}}{\sqrt{1+\rho_k^2 t}}\right)\leq\frac{1}{2}\left[1+I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t}{1+\rho_k^2 t};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]\leq\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{t(k-\frac{1}{3})}}{\sqrt{1+\rho_{k-1}^2 t}}\right). \tag{14}$$

Используя (14), получаем следующую двойную оценку для условной функции распределения:

$$\begin{aligned}\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2 t}}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}\leq\\ \leq W^{(2/3)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)\leq\\ \leq\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-1/3)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_{k-1}^2 t}}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}.\end{aligned} \tag{15}$$

Оценим модуль разности

$$I=\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}\right|\le$$

$$\le\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)\right|dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}.$$

Разобьём интеграл в числителе на два и разделим почленно на знаменатель:

$$\frac{\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)\right|dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}+$$

$$+\frac{\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)\right|dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}.$$

Обозначим первую дробь через I_1, а вторую – через I_2. Тогда

$$I\le I_1+I_2. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что

$$I_2\le\frac{\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)\right|dt}{\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}\le$$

$$\le\sup_{t\ge\frac{1}{\sqrt{k}}}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{t\ge\frac{1}{\sqrt{k}}}\left|\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}-\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2t}}\right|. \tag{17}$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\ge\frac{1}{\sqrt{k}}}\left|\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}-\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2 t}}\right|=0.$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$h_k(t)=\frac{t(1-\frac{5}{6k})}{\frac{1}{k}+\frac{\rho_k^2}{k}t}.$$

В пределе

$$\lim_{t\to\infty}h_k(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{5}{6k}}{\frac{1}{kt}+\frac{\rho_k^2}{k}}=\frac{1-\frac{5}{6k}}{\frac{\rho_k^2}{k}}.$$

Найдём первую и вторую производные функции $h_k(t)$

$$h_k'(t)=\frac{(1-\frac{5}{6k})(\frac{1}{k}+\frac{\rho_k^2}{k}t)-\frac{\rho_k^2}{k}(1-\frac{5}{6k})t}{(\frac{1}{k}+\frac{\rho_k^2}{k}t)^2}=\frac{(1-\frac{5}{6k})\frac{1}{k}}{(\frac{1}{k}+\frac{\rho_k^2}{k}t)^2}>0,\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

$$h_k''(t)=-\frac{2(1-\frac{5}{6k})\frac{1}{k}\cdot\frac{\rho_k^2}{k}}{(\frac{1}{k}+\frac{\rho_k^2}{k}t)^3}<0,\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

Функция $h_k(t)$ возрастает и выпукла вверх, $h_k(0)=0$. Обозначим

$$\alpha_k=\sup_{t\ge\frac{1}{\sqrt{k}}}\left|\frac{1}{l_\infty(x)}-\frac{\sqrt{t(k-5/6)}}{\sqrt{1+\rho_k^2 t}}\right|.$$

Учитывая монотонность и асимптотическое стремление $h_k(t)$ к $\dfrac{1-\frac{5}{6k}}{\frac{\rho_k^2}{k}}$, можно утверждать, что

$$\alpha_k=\begin{cases}\frac{1}{l_\infty(x)}-\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k}}(k-5/6)}}{\sqrt{1+\rho_k^2\frac{1}{\sqrt{k}}}}, & \text{если } l_\infty^2(x)\ge\frac{1-\frac{5}{6k}}{\frac{\rho_k^2}{k}}.\\ \max\left\{\frac{1}{l_\infty(x)}-\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k}}(k-5/6)}}{\sqrt{1+\rho_k^2\frac{1}{\sqrt{k}}}};\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-5/6k}}{\sqrt{\frac{1}{kt}+\frac{\rho_k^2}{k}}}-\frac{1}{l_\infty(x)}\right\}, & \text{если } l_\infty^2(x)\le\frac{1-\frac{5}{6k}}{\frac{\rho_k^2}{k}}.\end{cases}$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k}}(k-5/6)}}{\sqrt{1+\rho_k^2\frac{1}{\sqrt{k}}}}=\frac{1}{l_\infty(x)};\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1-5/6k}}{\sqrt{\frac{\rho_k^2}{k}}}=\frac{1}{l_\infty(x)},$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0.$$

Следовательно, ввиду неравенства (17),

$$\lim_{k\to\infty}I_2=0. \tag{18}$$

Оценим теперь I_1, учитывая, что $\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right) - \Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2 t}}\right)\right| \leq 2$.

$$I_1 \leq \frac{2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} dt}{\int\limits_1^{\infty} e^{-Bt} t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}} (1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{t}{1+\rho_{k-1}^2 t}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}} dt}{\int\limits_1^{\infty} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{t}{1+\rho_{k-1}^2 t}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}} dt}. \tag{19}$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{1+\rho_{k-1}^2 t} = \frac{1}{\rho_{k-1}^2}$ и функция $\frac{t}{1+\rho_{k-1}^2 t}$ монотонно возрастает по t, а в нуле равна нулю, то числитель (19) можно оценить сверху следующим выражением:

$$\left(\frac{1}{\rho_{k-1}^2}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} dt,$$

а знаменатель (19) можно оценить снизу, положив $t = 1$:

$$\left(\frac{1}{1+\rho_{k-1}^2}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}} \int\limits_1^{\infty} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} dt. \tag{20}$$

Интеграл в (20) есть положительная константа (обозначим её C).

Таким образом,

$$I_1 \leq \frac{2\left(\frac{1}{\rho_{k-1}^2}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} dt}{\left(\frac{1}{1+\rho_{k-1}^2}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}}} = \frac{2}{C}\left[\left(1+\frac{1}{\rho_{k-1}^2}\right)^{\rho_{k-1}^2}\right]^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6k}}{\frac{1}{k}\rho_{k-1}^2}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} dt.$$

Причем

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\rho_{k-1}^2}\right)^{\rho_{k-1}^2}\right]^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6k}}{\frac{1}{k}\rho_{k-1}^2}} = e^{\frac{1}{2l_\infty^2(x)}} = \mathrm{const}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} e^{-Bt} t^{-\frac{2}{3}} dt = 0, \ \text{ так как } \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

Итак,

$$\lim_{k\to\infty} I_1 = 0. \tag{21}$$

Собирая вместе (18) и (21), ввиду (16), получаем

$$\lim_{k\to\infty} I = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{t(k-1/3)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_{k-1}^2 t}}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}\right|=0.$$

Итак, верхняя и нижняя оценки условной функции распределения в (14) стремятся к одной и той же величине $\Phi\left(\dfrac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)$. Утверждение 1^0 теоремы 2 доказано.

2^0. Как показано в [12], случайная величина $W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots N}(x_i|x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_N)$ не зависит от случайных величин $x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots x_N$, непосредственно заданных на пространстве R^N с распределением $W_{1\ldots N}(x_1,\ldots,x_N)$. Это означает, что цилиндрическая случайная величина

$$W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots N}(<x,e_i>|<x,e_1>,\ldots,\widehat{<x,e_i>},\ldots,<x,e_N>)=W_{i,N}(x)$$

не зависит от $\mathcal{B}_{\hat{\imath},N}$ – σ-алгебры, порожденной линейными функционалами $\{<x,e_k>,\ k=1,2,\ldots,N;k\neq i\}$, относительно меры $\mu_{2/3}\{\cdot\}$ на H. Так как при $N\to\infty$ из сходимости почти наверное следует слабая сходимость, то и "предельная" случайная величина $\Phi\left(\frac{<x,e_i>}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)=W_i(x)$ не зависит от "предельной" σ-алгебры, порожденной линейными функционалами $<x,e_k>,k=1,..;k\neq i$. Действительно, ввиду того, что $\mathcal{B}_{\hat{\imath},m}\subseteq\mathcal{B}_{\hat{\imath},m+1}$, рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{B}_{\hat{\imath}}=\sigma(\bigcup\limits_{m=i}^{\infty}\mathcal{B}_{\hat{\imath},m})$. Для доказательства независимости ограничимся событиями из алгебры $\bigcup\limits_{m=i}^{\infty}\mathcal{B}_{\hat{\imath},m}$. Тогда для любого $B\in\bigcup\limits_{m=i}^{\infty}\mathcal{B}_{\hat{\imath},m}$, используя независимость $W_{i,N}$ от $\mathcal{B}_{\hat{\imath},m}$, $(N\geq m)$ и свойства симметрической разности $\oplus$, имеем:

$$\mu_{2/3}\{[W_{i,N}(x)\leq a]\oplus[W_i(x)\leq a]\}\geq\mu_{2/3}\{B\cap([W_{i,N}(x)\leq a]\oplus[W_i(x)\leq a])\}\geq$$

$$\geq\Big|\mu_{2/3}\{B\cap[W_{i,N}(x)\leq a]\}-\mu_{2/3}\{B\cap[W_i(x)\leq a]\}\Big|=$$

$$=\Big|\mu_{2/3}\{B\}\mu_{2/3}\{W_{i,N}(x)\leq a\}-\mu_{2/3}\{B\cap[W_i(x)\leq a]\}\Big|.$$

Как известно [13, с. 42], при $N\to\infty$ из сходимости $W_{i,N}(x)\to W_i(x)$ по вероятности $\mu_{2/3}\{\cdot\}$ следует

$$\mu_{2/3}\{[W_{i,N}(x)\leq a]\oplus[W_i\leq a]\}\to\ 0$$

для любого $a\in]-\infty,\infty[$, ввиду непрерывности функции распределения случайной величины $W_i(x)$. Поэтому, переходя к пределу в предыдущем неравенстве, получаем

$$\mu_{2/3}\{B\}\mu_{2/3}\{W_i(x)\leq a\}=\mu_{2/3}\{B\cap[W_i(x)\leq a\}.$$

Независимость доказана.

3^0. Рассмотрим уравнение

$$W^{(2/3)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k) = W^{(2/3)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i^0|x_1^0,...,\hat{x}_i^0,...,x_k^0), \qquad (22)$$

определяющее условную квантиль

$$x_i = q^0_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k),$$

проходящую через точку $(x_1^0,...,x_i^0,...,x_k^0)$; т.е.

$$x_i^0 = q^0_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_1^0,...,\hat{x}_i^0,...,x_k^0),$$

$$W^{(2/3)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(q^0_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k) \equiv W^{(2/3)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i^0|x_1^0,...,\hat{x}_i^0,...,x_k^0).$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (22), получаем:

$$\frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t}{1+\rho_{k-1}^2 t+\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}t};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+\rho_{k-1}^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}[1+(\rho_{k-1}^0)^2 t]^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}} I\left(\frac{\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}t}{1+(\rho_{k-1}^0)^2 t+\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}t};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)dt}{\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{k}{2}-\frac{5}{6}}(1+(\rho_{k-1}^0)^2 t)^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}}dt}, \qquad (23)$$

где $(\rho_{k-1}^0)^2 = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \frac{(x_j^0)^2}{\lambda_j^2}$.

Будем считать, что в уравнении (23) x_i- условная квантиль, т.е. уравнение (23) является тождеством по ρ_{k-1}^2. Единственность условной квантили следует из строгой монотонности $I(\cdot;\cdot,\cdot)$.

Применяя теорему о среднем, получаем:

$$I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_{k-1}^2\tilde{t}_k+\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}\right) = I\left(\frac{\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k^0}{1+(\rho_{k-1}^0)^2\tilde{t}_k^0+\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k^0}\right), \qquad (24)$$

где $\tilde{t}_k = \tilde{t}_k(\rho_{k-1}^2, \frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}; k)$, $\tilde{t}_k^0 = \tilde{t}_k^0((\rho_{k-1}^0)^2, \frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}; k)-$ "промежуточные" точки, $\tilde{t}_k \in [0,+\infty[$, $\tilde{t}_k^0 \in [0,+\infty[$.

Отметим тот факт, что уравнение (24) при $\tilde{t} = \tilde{t}^0 = 1$ задаёт условную квантиль многомерного распределения Коши [4]:

$$C(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{[\pi(1+|x|^2)]^{-\frac{m+1}{2}}}, \;\; x\in R^k, \;\; |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}.$$

Пользуясь строгой монотонностью $I(\cdot;\cdot,\cdot)$ бета-распределения, из (24) получаем:

$$\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_{k-1}^2\tilde{t}_k+\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}=\frac{\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k^0}{1+(\rho_{k-1}^0)^2\tilde{t}_k^0+\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k^0}\ ,$$

откуда

$$x_i^2=(x_i^0)^2\frac{\tilde{t}_k^0}{\tilde{t}_k}\frac{1+\rho_{k-1}^2\tilde{t}_k}{1+(\rho_{k-1}^0)^2\tilde{t}_k^0}\ .$$

Итак,

$$q_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^0(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)=x_i^0\sqrt{\frac{\tilde{t}_k^0}{\tilde{t}_k}\frac{1+\rho_{k-1}^2\tilde{t}_k}{1+(\rho_{k-1}^0)^2\tilde{t}_k^0}}. \tag{25}$$

Отметим, что формула (25) содержит неизвестную функцию $\tilde{t}_k=\tilde{t}(\rho_{k-1}^2,\frac{(x_i^0)^2}{\lambda_i^2};k)$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{t}_k k=\infty$.

По теореме о среднем

$$W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)=\frac{1}{2}\left[1+I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_k^2\tilde{t}_k};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)\right].$$

Ввиду теоремы 2 (п. 1^0)

$$\lim_{k\to\infty}W_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}^{(2/3)}(x_i|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)=\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_k^2\tilde{t}_k};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)=2\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-1.$$

Неравенство (14) для $\tilde{t}_k$ можно переписать в виде:

$$2\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{\tilde{t}_k(k-5/6)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_k^2\tilde{t}_k}}\right)-1\le I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_k^2\tilde{t}_k};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)\le 2\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{\tilde{t}_k(k-1/3)}}{\lambda_i\sqrt{1+\rho_{k-1}^2\tilde{t}_k}}\right)-1;$$

или

$$2\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{1-\frac{5}{6k}}}{\lambda_i\sqrt{\frac{1}{\tilde{t}_k k}+\frac{\rho_k^2}{k}}}\right)-1\le I\left(\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\tilde{t}_k}{1+\rho_k^2\tilde{t}_k};\frac{1}{2},\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right)\le 2\Phi\left(\frac{x_i\sqrt{1-\frac{1}{3k}}}{\lambda_i\sqrt{\frac{1}{\tilde{t}_k k}+\frac{\rho_{k-1}^2}{k}}}\right)-1. \tag{26}$$

Предположим, что $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{t}_k k\ne\infty$, т.е. с точностью до подпоследовательности $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{t}_k k=\alpha=\mathrm{const}\ne\infty$. Переходя к пределу в двойном неравенстве (26), получим

$$2\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{l_\infty^2(x)+\frac{1}{\alpha}}}\right)-1\le 2\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i l_\infty(x)}\right)-1\le 2\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{l_\infty^2(x)+\frac{1}{\alpha}}}\right)-1.$$

Но тогда $l_\infty(x)=\sqrt{l^2_\infty(x)+\frac{1}{\alpha}}$, что невозможно. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde t_k k=\infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde t^0_k k=\infty$.

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} q^0_{i|1\dots\hat i\dots k}(x_1,\dots,\hat x_i,\dots x_k)=\lim_{k\to\infty} x^0_i\sqrt{\frac{\frac{1}{\tilde t_k k}+\frac{\rho^2_{k-1}}{k}}{\frac{1}{\tilde t^0_k k}+\frac{\left(\rho^0_{k-1}\right)^2}{k}}}=x^0_i\frac{l_\infty(x)}{l_\infty(x^0)}$$

для всех $x\in\Gamma$. При этом, ввиду пункта 2^0 теоремы 1, $\mu_{2/3}\{l^2_\infty(x)=0\}=0$.

4^0. Доказательство сразу следует из пункта 3^0 теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Определение. Будем говорить [14,15], что многомерное распределение обладает *свойством воспроизводимости* условных квантилей при сужении на условные квантили меньшей размерности, если

$$\begin{aligned} &q^0_{i|1\dots\hat\imath\dots k}(x_1,\dots,\hat x_i,\dots,q^0_{m|1\dots\hat\imath\dots\hat m\dots k}(x_1,\dots,\hat x_i,\dots,\hat x_m,\dots,x_k),\dots,x_k)=\\ &=q^0_{i|1\dots\hat\imath\dots\hat m\dots k}(x_1,\dots,\hat x_i,\dots,\hat x_m,\dots,x_k)\end{aligned}$$

для любого $i=1,\dots,k$ и для любого $m=1,\dots,k,m\neq i$.

Условные квантили $q^0_{i|1\dots\hat\imath\dots k}$ распределения (1), вообще говоря, не обладают свойством воспроизводимости. В самом деле, рассмотрим условные квантили $y_1=q_{1|2,3}(y_2,y_3)$ и $y_2=q_{2|3}(y_3)$, определяемые уравнениями

$$W^{(2/3)}_{1|2,3}(y_1|y_2,y_3)=W^{(2/3)}_{1|2,3}(1|1,1);$$

$$W^{(2/3)}_{2|3}(y_2|y_3)=W^{(2/3)}_{2|3}(1|1).$$

Вычисления показывают, что

$$q_{1|2,3}(q_{2|3}(0),0)\neq q_{1|3}(0).$$

Однако для бесконечномерных условных квантилей предельных распределений (11), суженных на многообразия, параметризованные бесконечным семейством условных квантилей меньшей размерности, свойство воспроизводимости выполняется.

Воспользуемся формулой (12):

$$\lim_{k\to\infty} q^0_{i|1\dots\hat\imath\dots k}(x_1,\dots,\hat x_i,\dots,x_k)=x_i\frac{l_\infty(x)}{l_\infty(x^0)}.$$

Рассмотрим сужение условной квантили предельного распределения (11) на многообразие Q, параметризованное бесконечным семейством условных квантилей:

$$\begin{aligned} x_{2n}&=q_{2n|1,3,\dots,\hat\imath,\dots,2k+1,\dots}(x_1,x_3,\dots,\hat x_i,\dots,x_{2k+1},\dots)=\\ &=x^0_{2n}\sqrt{\frac{\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\frac{x^0_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}}\ ,\ \ n=1,2,\dots\end{aligned}$$

Квадрат числителя (12) имеет вид:

$$l_\infty^2(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \left(\frac{x_k}{\lambda_k}\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k}}{\lambda_{2k}}\right)^2\right].$$

При сужении на многообразие Q получаем:

$$l_\infty^2(x)|_Q = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k}^0}{\lambda_{2k}}\right)^2 \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}^0}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2 \left[1 + \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k}^0}{\lambda_{2k}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}^0}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}^0}{\lambda_{2k-1}}\right)^2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \left(\frac{x_k^0}{\lambda_k}\right)^2 = \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}^0}{\lambda_{2k-1}}\right)^2} l_\infty^2(x^0).$$

Тогда

$$q^0_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k\ldots}(x_1, q^0_{2|1,3,\ldots,2k+1,\ldots}(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}, \ldots), x_3, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{2k-1},$$

$$q^0_{2k|1,3,\ldots,2k+1,\ldots}(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}, \ldots), x_{2k+1}, \ldots) =$$

$$= x_i^0 \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}}{\lambda_{2k-1}}\right)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{x_{2k-1}^0}{\lambda_{2k-1}}\right)^2} = q^0_{i|1,3,\ldots,2k+1,\ldots}(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}, \ldots),$$

где в каждой квантили элемент с индексом i пропущен.

Таким образом, свойство воспроизводимости для бесконечномерных условных квантилей предельных распределений (11) доказано.

Литература

[1] Золотарев В.М. О представлении плотностей устойчивых законов распределений специальными функциями // Теория вероятностей и её применения. М.: Наука, 1994. т.39, вып. 2,

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1970. т.2

[3] Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. М.: ФМ 1963.

[4] Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных распределений // Труды МИАН, Л.: Наука, 1976. т.141.

[5] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

[6] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
[7] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
[8] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФМ, 1963. т.3.
[9] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
[10] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963.
[11] Шатских С.Я. Двусторонние оценки неполной бета-функции, использующие интеграл вероятности. // Тезисы международной научной конференции "Методы теории функций, интегральные уравнения, специальные функции", Минск, 1996. ч.2.
[12] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости. // "Мера и интеграл", СамГУ. Самара, 1995.
[13] Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
[14] Shatskih S.Ya. Multivariate Cauchy distributions as locally gaussian distributions // Journal of Math. Sciences, N1, 1996. V.78
[15] Шатских С.Я., Кнутова Е.М. Воспроизводимость условных квантилей многомерного распределения Стьюдента // Известия РАЕН. сер. МММИУ, 1997. т.1, N1.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF CONDITIONAL QUANTILES OF STABLE SPHERICALLY SYMMETRIC DISTRIBUTION WITH EXPONENT $\alpha = \frac{2}{3}$

Shatskikh S.Ya., Knutova E.M.[2]

The paper is devoted to the study of asymptotic properties of stable spherically symmetric distribution with exponent $\alpha = \frac{2}{3}$ in Hilbertian space. Almost sure convergence of conditional distributions to normality is proved. Explicit expressions for infinite-dimensional conditional quantiles and for their distribution functions are found.

[2]Shatskikh Sergey Yakovlevich, Knutova Elena Mikhailovna, dept. of math. Samara state university