О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧЕЧНОГО НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

А.Н. Степанов[1]

Рассматривается теоретическое обоснование использования параметрической модели точечного направленного излучателя и приводятся условия, при удовлетворении которых вместо реальных излучателей конечных размеров может быть использован эквивалентный точечный направленный излучатель.

Для описания и изучения полей гидроакустических источников чаще всего используется модель точечного ненаправленного излучателя — монополя. Потенциал поля звукового давления ψ_0 монополя в неограниченном однородном пространстве является функцией Грина для уравнения Гельмгольца в этом пространстве и имеет вид $\psi_0 = \exp(ikr)/r$, где r — расстояние от излучателя до точки наблюдения, $k = \frac{\omega}{c}-$ волновое число, $\omega-$ круговая частота излучателя, $c-$ скорость звука в среде. Применение этой модели для описания и анализа гидроакустических полей подробно рассмотрено в [1].

Однако у реальных излучателей в той или иной мере обнаруживается зависимость амплитуды и фазы сигнала от направления линии наблюдения на источник. Для описания направленных свойств излучателей, а также расчета и анализа полей, создаваемых ими в водоемах, используется несколько различных моделей. В частности, ряд непараметрических моделей основан на построении с помощью потенциала ψ_0 функции Грина рассматриваемой области и последующем интегрировании по объему или по поверхности, занятой излучателем. Непараметрические модели имеют очевидное неудобство — в общем случае излучатель сложно описать с помощью некоторой системы числовых характеристик. Существуют модели, основанные на дискретном размещении небольшого количества монополей разной мощности вдоль некоторой линии или по некоторому объему. В качестве параметров таких моделей выступают мощности отдельных монополей и геометрические характеристики их расположения в пространстве. Однако в результирующие выражения для полей таких модельных источников в различных областях эти параметры входят нелинейным образом, что значительно затрудняет решение обратных задач, связанных с определением параметров моделей на основании измерений амплитуды и фазы создаваемых ими полей.

Одной из достаточно удобных для решения прямых и обратных задач гидроакустики моделей, которые используются для описания направленных свойств произвольных излучателей конечных размеров, является параметрическая модель точечного направленного излучателя (мультипольная модель). Теоретическим обоснованием использования этой модели могут служить следующие соображения. Пусть в

[1] Степанов Анатолий Николаевич, кафедра информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета

однородном неограниченном пространстве находится монохроматический источник конечных размеров. Построим вокруг этого источника сферу S_0 радиуса r_0 так, чтобы источник целиком находился внутри сферы. Колебания источника создадут на сфере волновой потенциал $\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)$, где r_0, θ, φ — сферические координаты точек сферы. Тогда для потенциала ψ в области Ω вне сферы S_0 получаем внешнюю задачу Дирихле: найти функцию $\psi(M)$, $M \in \Omega$, удовлетворяющую всюду в области Ω уравнению Гельмгольца

$$\triangle\psi(M) + k^2\psi(M) = 0, M \in \Omega \tag{1}$$

и принимающую на сфере S_0 заданное значение

$$\psi(r_0, \theta, \varphi) = \tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi), \tag{2}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа. Кроме того, на бесконечности искомый потенциал ψ должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial\psi(M)}{\partial r} + ik\psi(M) = o(1/r). \tag{3}$$

Решение задачи (1)–(3) в предположении о том, что функция $\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)$ достаточно гладкая, – известно, единственно и может быть записано в форме

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^* \frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)}(kr_0)} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, r \geq r_0, \tag{4}$$

где $h_n^{(1)}$ — сферические функции Бесселя третьего рода порядка n; $P_n^{|m|}$ — присоединенные полиномы Лежандра. Коэффициенты C_{nm}^*, входящие в (4), существенно зависят от радиуса r_0 сферы S_0, на которой ставилась внешняя задача Дирихле

$$C_{nm}^* = C_{nm}^*(r_0) = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \sin\theta \, d\theta d\varphi. \tag{5}$$

Однако можно показать, что входящее в (4) отношение $C_{nm}^*(r_0)/h_n^{(1)}(kr_0)$ не зависит от радиуса r_0 этой сферы. Для этого построим из того же самого центра, из которого строилась сфера S_0, другую сферу S_1 радиуса $r_1 < r_0$. Рассуждая далее получим, что решение задачи Дирихле, поставленной на сфере S_1, имеет аналогичный (4), но зависящий от коэффициентов $C_{nm}^*(r_1)$ вид. Вычисляя значение $\psi(r_0, \theta, \varphi)$ на сфере S_0 для второго решения и подставляя их в соотношения (5), после разложения $\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)$ в ряд по сферическим гармоникам и выполнения ряда преобразований получим, что

$$C_{nm}^*(r_0)/h_n^{(1)}(kr_0) = C_{nm}^*(r_1)/h_n^{(1)}(kr_1).$$

Поскольку радиусы r_0 и r_1 выбирались произвольным образом, из последнего соотношения можно сделать вывод о независимости отношения $C_{nm}^*(r)/h_n^{(1)}(kr)$ от радиуса сферы r, на которой ставится задача Дирихле. Введя обозначение $C_{nm} = C_{nm}^*(r)/h_n^{(1)}(kr)$, получим, что потенциал ψ волнового поля принимает вид

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} h_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{6}$$

Можно считать, что (6) представляет собой потенциал поля модельного направленного точечного излучателя, эквивалентного исходному реальному излучателю конечных размеров. Эквивалентность эта понимается в том смысле, что акустическое поле такого точечного излучателя совпадает с полем исходного излучателя конечных размеров всюду вне любой сферы, центр которой совпадает с точечным источником и которая целиком содержит в себе исходный источник. А направленные свойства модельного излучателя полностью определяются параметрами C_{nm}, входящими в (6) и имеющими смысл моментов элементарных мультиполей, из которых состоит разложение. Ряд (6) содержит бесконечное число параметров. Однако на практике, как и при использовании Тейлоровского разложения, ограничиваются конечным числом слагаемых. Исходя из физических соображений в большинстве случаев можно ограничиться элементами до второго порядка включительно. Это соответствует удержанию в разложении монополя, трех диполей и пяти квадруполей и тогда направленные свойства модели описываются с помощью 18 параметров C_{nm}, $n = 0, 1, 2; m = -n \dots n$.

Выше доказана независимость параметров модели C_{nm} от радиуса сферы S, на которой ставится задача Дирихле. Однако при использовании точечной модели вместо излучателя конечных размеров возникает вопрос о выборе в габаритах излучателя центра приведения для построения из него сферы S, или, что тоже самое, для размещения в этом центре точечного модельного излучателя с потенциалом в виде (6). Этот вопрос имеет два аспекта. Во-первых, необходимо выяснить, как влияет произвол в выборе центра приведения на поле, создаваемое точечным излучателем с заданными параметрами C_{nm}. Во-вторых, необходимо выяснить, как влияет произвол в выборе центра приведения на значения параметров модели C_{nm}, которые рассчитываются по созданному исходным излучателем полю. Второй вопрос является предметом отдельного рассмотрения, а ниже формулируются критерии применимости модели точечного направленного источника при решении прямой задачи.

Принято считать, что если различие в полях для предельно разнесенных в габаритах излучателя положений центра приведения невелико, то выбор его положения в габаритах исходного излучателя может быть осуществлен произвольным образом, и, следовательно, источник конечных размеров может быть заменен точечным, расположенным в произвольно выбранном в его габаритах центре приведения. Этот подход для монопольной модели приводит к известным условиям малости характерного линейного размера излучателя L по сравнению с длиной волны λ и расстоянием r до точки приема $L/r \ll 1$ и $kL^2/r \ll 1$ [3]. Представляет интерес получение аналогичных ограничений и для мультипольной модели. Кроме того, в целом ряде практических задач требуется получить количественные ограничения на линейный размер L в зависимости от расстояния r до точки приема и волнового числа k.

Пусть исходный излучатель имеет характерный линейный размер L. Выберем в габаритах излучателя в качестве двух центров приведения точки O и O', расположенные на расстоянии L друг от друга. Построим в точках O и O'декартовы системы координат $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ с направлениями осей OZ и $O'Z'$, которые совпадают с направлением вектора OO'. Тогда связь между декартовыми системами координат можно задать в виде $\{x' = x, y' = y, z' = z - L\}$. Кроме того, построим в тех же самых точках две сферические системы координат с полярными осями, направления которых также совпадают с направлением вектора OO'. Используя соотношения, связывающие декартовы и сферические координаты, получим связь между сферическими системами координат

$$r' = \mu r, \quad \cos\theta' = (\cos\theta - d)/\mu, \quad \sin\theta' = \sin\theta/\mu, \quad \varphi' = \varphi, \tag{7}$$

где $\mu = \sqrt{1 - 2d\cos\theta + d^2}$, $d = L/r < 1$. Причем анализ параметра $\mu = \mu(d,\theta)$ показывает, что для любых значений θ и d справедлива оценка $1 - d \le \mu(d,\theta) \le 1 + d$.

Пусть модельный источник размещен в центре приведения O. Тогда потенциал поля в произвольной точке $M(r,\theta,\varphi)$ вне источника имеет вид (6). Если теперь модельный источник поместить в центр приведения O', то потенциал поля в той же самой точке примет вид

$$\psi(r',\theta',\varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} h_n^{(1)}(kr') P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{im\varphi'}, \tag{8}$$

где r', θ', φ' связаны с r, θ, φ соотношениями (7). Критерий малости различий между (6) и (8) должен включать в себя два требования [3]:

1)относительная разность амплитуд между (6) и (8) для любых точек поля должна быть мала

$$\frac{\Big||\psi(r',\theta',\varphi')| - |\psi(r,\theta,\varphi)|\Big|}{|\psi(r,\theta,\varphi)|} = \left|1 - \frac{|\psi(r',\theta',\varphi')|}{|\psi(r,\theta,\varphi)|}\right| < \varepsilon_1; \tag{9}$$

2)абсолютная разность (набег) фаз между (6) и (8) для любых точек поля должна быть мала

$$|\arg(\psi(r',\theta,\varphi')) - \arg(\psi(r,\theta,\varphi))| < \varepsilon_2, \tag{10}$$

где ε_1 и ε_2 – произвольные достаточно малые положительные числа, определяющие допустимую для рассматриваемой задачи степень различия между полями. Исходя из физического смысла этих параметров в дальнейших рассуждениях будем считать, что значения ε_1 и ε_2 выбираются так, чтобы $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\varepsilon_2 \ll 1$, например, 0.05 или 0.1, что соответствует часто встречающейся в практических задачах точности расчетов или экспериментов порядка 5–10 %.

Используя сформулированные требования (9) и (10), вначале рассмотрим отдельные частные случаи мультиполей до второго порядка включительно. Пусть в (6) и (8) все C_{nm} кроме C_{00} равны нулю. Т.е. будем считать, что рассматриваемый источник является монополем. Тогда амплитудное требование критерия (9) с учетом того, что $h_0^{(1)}(x) = -i\exp(x)/x$ и $P_0^0(x) = 1$, дает $|1 - r/r'| = |1 - 1/\mu| < \varepsilon_1$. Принимая во внимание ограничения (7) на μ, получим $d < L/r < \varepsilon_1/(1+\varepsilon_1) \approx \varepsilon_1$. Пусть далее $C_{00} = |C_{00}|\exp(i\alpha)$, тогда $\arg(\psi(r,\theta,\varphi)) = \alpha + 3\pi/2 + kr$ и фазовое требование критерия (10) дает $|\arg(\psi(r',\theta',\varphi')) - \arg(\psi(r,\theta,\varphi))| = |kr - kr'| = kr|1-\mu| < \varepsilon_2$. Выполняя элементарные преобразования, найдем, что ограничение на набег фазы приводит к условию $kL < \varepsilon_2$. Следствием одновременного выполнения полученных ограничений $d < \varepsilon_1$ и $kL < \varepsilon_2$ являются упомянутые выше условия выхода за прожекторную зону излучателя.

Пусть теперь в (9) и (10) равны нулю все C_{nm} кроме C_{10}, т.е. будем считать, что рассматриваемый источник является диполем, ось которого перпендикулярна плоскости OXY декартовой системы координат. Так как

$$h_n^{(1)}(x) = \frac{-(i+x)\exp(ix)}{x^2},$$

а $P_1^0(x) = x$, то из амплитудного требования (9) находим

$$\left|1 - \frac{1}{\mu^3}\sqrt{\frac{1 + k^2r^2\mu^2}{1 + k^2r^2}}\frac{|\cos\theta - d|}{|\cos\theta|}\right| < \varepsilon_1. \tag{11}$$

Отсюда видно, что для данного диполя не может быть получено равномерное, подходящее для любых углов θ условие, обеспечивающее малость относительной разности амплитуд, т.к. существует плоскость $\theta = \pi/2$, в которой излучение диполя равно нулю. Исключая из рассмотрения эту плоскость, для всех остальных точек пространства можно получить неравномерное ограничение $d < \varepsilon_1/(4+\gamma)/(1+\varepsilon_1)$, где $\gamma = 1/\cos(\pi/2 - \theta)$.

Для получения равномерного условия амплитудное требование критерия (9), в знаменателе которого находится обращающийся в нуль модуль потенциала, необходимо ослабить. Можно предложить следующую формулировку условия малости относительной разности амплитуд: ограничение (9) должно выполняться только для тех точек пространства, для которых $|\psi(r,\theta,\varphi)| \geq \varepsilon_1$. А для тех точек, в которых амплитуда поля для одного из центров приведения очень мала $|\psi(r,\theta,\varphi)| < \varepsilon_1$, достаточно потребовать, чтобы также мала была амплитуда и для другого центра $|\psi(r',\theta',\varphi')| < M\varepsilon_1$, где M — некоторая константа. Используя это ослабленное амплитудное требование, из соотношения (11) можно получить завышенное для подавляющего большинства точек поля, но равномерное ограничение $d < \varepsilon_1^2$, которое справедливо для $kr \geq 1$.

Пусть далее $C_{10} = |C_{10}| \exp(i\alpha), \operatorname{tg}\beta = 1/kr, \operatorname{tg}\beta' = 1/kr'$. Тогда $\arg(\psi(r,\theta,\varphi)) = \pi + \alpha + \beta + kr$, и фазовое требование для диполя приводит к $kr|1-\mu| + |\beta - \beta'| < \varepsilon_2$. Отсюда следует ограничение $2kL < \varepsilon_2$. Для двух других разновидностей диполей с осями, перпендикулярными плоскостям OXZ и OYZ, плоскости, в которых излучение поля обращается в нуль для обоих центров приведения одновременно, совпадают. Поэтому аналогичные вычисления приводят к одинаковому, но теперь уже равномерному ограничению $d < \varepsilon_1/4/(1+\varepsilon_1)$ для амплитудного требования и к ограничению $2kL < \varepsilon_2$ для фазового.

Довольно громоздкие вычисления для квадруполей, оси которых лежат в плоскости OXY, приводят к равномерному ограничению $d < \varepsilon_1/7/(1+\varepsilon_1)$, для квадруполей, одна из осей которых параллельна оси OZ — к неравномерному условию $d < \varepsilon_1/(7+\gamma)/(1+\varepsilon_1)$, где так же, как и для вертикального диполя $\gamma = 1/\cos(\pi/2 - \theta)$, и, наконец, для квадруполя, обе оси которого параллельны OZ, получается то же самое неравномерное условие что, и в предыдущем случае, но $\gamma = 12/(1 + 3\cos 2(\theta - \vartheta)), \vartheta = 1/2 \arccos(-1/3)$. Ослабленное амплитудное требование для всех разновидностей квадруполей дает точно такое же равномерное ограничение, что и для диполей: $d < \varepsilon_1^2$ при $kr \geq 1$. Фазовое требование для всех разновидностей квадруполей после не менее громоздких вычислений дает ограничение, так же совпадающее с ограничением для диполей $2kL < \varepsilon_2$.

Итак, рассмотрены все мультиполи до второго порядка включительно. Сравнивая между собой полученные для каждого из них ограничения, можно сделать следующий вывод: при одновременном выполнении условий $kr \geq 1$, $2kL < \varepsilon_1$ и $d < \varepsilon_1^2/(7+\varepsilon_1)/(1+\varepsilon_1)$ любой отдельно взятый мультиполь удовлетворяет ослабленному амплитудному и фазовому требованиям критерия точечности излучателя.

Отметим, что полученные для отдельных мультиполей ограничения, вообще говоря, являются довольно жесткими. Пусть, например, размер излучателя L равен 1 м, тогда в соответствии с ограничением на параметр d при не очень высокой точности $\varepsilon_1 = 0.1$ расстояние между точкой наблюдения и источником r должно быть не меньше чем 800 м, в то время как для монопольной модели достаточно 10 м. Остальные ограничения для низких частот не столь существенны. Так для частоты 10 Гц и скорости звука 1500 м/с требование $kr \geq 1$ выполняется уже на расстояниях 24 м и выше, а требование $2kL < \varepsilon_2$ удовлетворяется при $\varepsilon_2 = 0.1$ для размеров L

меньших, чем 1.2 м.

Жесткость полученных выше оценок обусловлена тем, что, как было выяснено выше, для ряда мультиполей существуют поверхности в пространстве, на которых модуль их потенциала обращается в нуль, и, следовательно, отношение модулей в основном амплитудном требовании критерия малости обращается в бесконечность. Если же такие поверхности отсутствуют, то в применении ослабленного амплитудного требования необходимости не возникает, и можно ожидать, что удастся получить равномерные ограничения с привлечением только основного амплитудного требования, и поэтому они окажутся не такими сильными. Предположение об отсутствии поверхностей, на которых модуль потенциала обращается в нуль оказывается полностью обоснованным в тех случаях, когда среди мультиполей, образующих модельный источник, находится монополь, момент C_{00} которого удовлетворяет некоторым условиям.

Для анализа влияния монопольной составляющей на изучаемые ограничения вначале рассмотрим более общий случай, когда потенциал модельного источника можно предствить в виде суммы $\psi = \psi_1 + \psi_2$, причем каждое слагаемое $\psi_j = |\psi_j(r,\theta,\varphi)|\exp(i\alpha_j(r,\theta,\varphi))$, $j = 1,2$ по отдельности удовлетворяет требованиям критерия, т.е.

$$\left|1 - \frac{|\psi_1(r',\theta',\varphi')|}{|\psi_1(r,\theta,\varphi)|}\right| < \varepsilon_1^*, \quad \left|1 - \frac{|\psi_2(r',\theta',\varphi')|}{|\psi_2(r,\theta,\varphi)|}\right| < \varepsilon_1^*,$$

и

$$|\alpha_1(r',\theta',\varphi') - \alpha_1(r,\theta,\varphi)| < \varepsilon_2^*, \quad |\alpha_2(r',\theta',\varphi') - \alpha_2(r,\theta,\varphi)| < \varepsilon_2^*,$$

где ε_1^* и ε_2^* — вспомогательные, подлежащие определению, параметры, имеющие тот же самый смысл, что и параметры ε_1 и ε_2. Задача состоит в том, чтобы подобрать такие значения параметров ε_1^* и ε_2^*, определяющих допустимые различия полей отдельных составляющих, чтобы общий потенциал излучателя $\psi = \psi_1 + \psi_2$ удовлетворял требованиям кретерия (9) и (10).

Квадрат модуля потенциала ψ равен

$$|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

отсюда следует, что модуль потенциала обращается в нуль только при одновременном выполнении двух условий: $|\psi_1| = |\psi_2|$ и $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = -1$. Физически это означает, что в одной точке совмещены два совершенно одинаковых, но действующих в противофазе источника. Отвлекаясь от этого тривиального случая, будем считать, что модуль потенциала нигде (кроме бесконечности) в нуль не обращается: $|\psi(r,\theta,\varphi)| \geq P_{min}$, где P_{min} — наименьшее значение модуля потенциала в рассматриваемой области.

Пусть $\psi_j' = \psi_j(r',\theta',\varphi')$, $j = 1,2$. Оценим сверху величину $|\psi_1' + \psi_2'|^2$, считая выполненными требования нормировки $|\psi_j| \leq 1$ и пренебрегая величинами второго порядка малости, то есть квадратами величин ε_1^* и ε_2^* и их произведениями. Поскольку выполнены неравенства $|\psi_j'| < |\psi_j|(1 + \varepsilon_1^*)$, то можно записать

$$|\psi_1' + \psi_2'|^2 < (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(1 + 2\varepsilon_1^*) + 2|\psi_1'||\psi_2'|\cos(\alpha_{12} + \gamma_{12}),$$

где $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$, а $|\gamma_{12}| < 2\varepsilon_2^*$. В рамках принятой точности $\cos\gamma_{12} \approx 1$, поэтому

$$|\psi_1' + \psi_2'|^2 < (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(1 + 2\varepsilon_1^*) + 2|\psi_1'||\psi_2'|\cos\alpha_{12} + 4\varepsilon_2^*|\psi_1||\psi_2|.$$

В наихудшем для получения оценок случае, когда $\cos\alpha_{12} < 0$, правая часть неравенства увеличится, если $|\psi_j'|$ заменить на $|\psi_j|(1 - \varepsilon_1^*)$ и тогда

$$|\psi_1' + \psi_2'|^2 < (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(1 + 2\varepsilon_1^*) + 2|\psi_1||\psi_2|\cos\alpha_{12}(1 - 2\varepsilon_1^*) + 4\varepsilon_2^*|\psi_1||\psi_2|,$$

а так как в силу нормировки $2|\psi_1||\psi_2| \leq 2$, то

$$|\psi_1' + \psi_2'|^2 < |\psi_1 + \psi_2|^2 + 2(4\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_2^*),$$

откуда получим оценку

$$\left|1 - \frac{|\psi_1' + \psi_2'|}{|\psi_1 + \psi_2|}\right| < \frac{1}{P_{min}^2}(4\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_2^*). \tag{12}$$

Если по-прежнему требовать, чтобы для потенциала $\psi = \psi_1 + \psi_2$ выполнялось (9), то должно выполняться неравенство $(4\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_2^*)/P_{min}^2 < \varepsilon_1$. Чтобы найти вспомогательные параметры ε_1^* и ε_2^*, не хватает еще одного неравенства, которое в принципе можно получить из анализа фазового требования.

Необходимо отметить, что полученная оценка является достаточно грубой. Тем не менее она позволяет определить, как влияет наличие нескольких составляющих в одном модельном источнике на общую погрешность. Для иллюстрации этого влияния предположим, что $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^*$, а $P_{min}^2 = 1$. Тогда получим, что $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1/6$. Если составные части модельного источника соответствуют, например, монополю и диполю с моментом C_{11}, то из полученных выше ограничений следует, что параметр d должен удовлетворять условиям $d < \varepsilon_1^* = \varepsilon_1/6$ и $d < \varepsilon_1^*/4/(1+\varepsilon_1^*) \approx \varepsilon_1/24$. Таким образом, последнее неравенство является искомым ограничением на параметр d, при выполнении которого рассматриваемый модельный источник удовлетворяет амплитудному требованию. Аналогичные результаты получаются и для комбинации монополя и квадруполя с моментом C_{22}. В этом случае ограничение имеет вид $d < \varepsilon_1/42$. Из проведенного анализа следует, что комбинация нескольких мультиполей в одном модельном источнике, вообще говоря, приводит к более жестким по сравнению с одиночными мультиполями ограничениям.

Теперь возвратимся к обсуждавшейся проблеме влияния монопольной составляющей на мультиполи, для которых приходилось привлекать ослабленное амплитудное требование. Пусть в (6) и (8) не равны нулю два момента C_{00} и C_{10}, а все остальные равны нулю. Другими словами, рассмотрим модельный источник, образованный двумя мультиполями — монополем и z-диполем. При этом будем считать, что $C_{00} = C_{10}$. Это предположение, во-первых, не имеет принципиального значения, т.к. в разложении потенциала по сферическим мультиполям всегда можно добавить и вычесть соответствующее монополю слагаемое с коэффициентом, равным коэффициенту C_{10} при z-диполе, а затем нужным образом сгруппировать слагаемые. А во-вторых (и это главное) выполнения указанного условия достаточно для того, чтобы модуль потенциала такого источника нигде кроме бесконечности в нуль не обращался.

Потенциал рассматриваемого источника имеет вид

$$\psi(r,\theta,\varphi) = C_{00}\left(h_0^{(1)}(kr)P_0^0(\cos\theta) + h_1^{(1)}(kr)P_1^0(\cos\theta)\right).$$

Пусть $a = 1/(kr)$, и мы по-прежнему ограничимся рассмотрением только таких точек пространства, для которых $kr \geq 1$, т.е. $0 < a \leq 1$. Тогда потенциал можно записать в виде

$$|\psi| = |C_{00}|\frac{|kr\cos\theta + i(kr + \cos\theta)|}{k^2r^2} = a|C_{00}|\sqrt{\cos^2\theta + (1 + a\cos\theta)^2}.$$

Наименьшее значение подкоренного выражения $(a^2+1)\cos^2\theta + 2a\cos\theta + 1$ равно $1/(1+a^2)$. Следовательно, для любых углов θ и значений параметра a значение этого выражения ограничено снизу $1/(1+a^2) \geq 1/2$. Откуда видно, что модуль потенциала нигде кроме бесконечности в нуль не обращается, и предположение об отсутствии поверхностей с нулевым модулем потенциала при наличии определенной монопольной составляющей в данном случае оказалось справедливым.

С учетом того, что $a' = 1/(kr') = 1/(kr\mu) = a/\mu$, найдем отношение квадратов модулей потенциалов

$$A^2 = \frac{|\psi'|^2}{|\psi|^2} = \frac{1}{\mu^2}\frac{(\cos\theta - d)^2/\mu^2 + (1 + a(\cos\theta - d)/\mu^2)^2}{\cos^2\theta + (1 + a\cos\theta)^2}.$$

Вновь пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$A^2 \approx \frac{1}{\mu^6}\left(1 - 2d\frac{\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (a^2+3)\cos\theta + a}{\cos^2\theta + (1 + a\cos\theta)^2}\right).$$

Замена $\cos^3\theta$ на $\cos^2\theta$ только увеличит числитель, а т.к. получившийся в результате замены квадратный трехчлен наибольшего значения достигает при $\cos\theta = 1$, то числитель ограничен величиной $a^2 + 3a + 4 < 8$, и с учетом ранее полученного ограничения на знаменатель находим оценку $A^2 > (1-32d)/\mu^6$ или $A > (1-16d)/(1+d)^3$. Теперь для рассматриваемой комбинации монополя и диполя с моментом C_{10} стандартным способом можно получить ограничение $1 - 19d > 1 - 24d > 1/(1+\varepsilon_1)$. Откуда следует условие $d < \varepsilon_1/24/(1+\varepsilon_1) \approx \varepsilon_1/24$, совпадающее с полученным выше ограничением для комбинации монополя и диполя с моментом C_{11}. Другими словами, в комбинации с монополем любые диполи ведут себя в смысле влияния на общую погрешность в амплитудном требовании (9) одинаково.

Теперь рассмотрим случай, когда модельный источник образован монополем и квадруполем, обе оси которого параллельны оси OZ декартовой системы координат, т.е. в (6) и (8) не равны нулю только два момента C_{00} и C_{20}. И вновь условие $C_{00} = C_{20}$ оказывается достаточным. Потенциал такого источника может быть записан в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = -C_{00}e^{ikr}\left(\frac{i}{kr} + \frac{3kr + i(3 + k^2r^2)(3\cos 2\theta + 1)}{4k^3r^3}\right),$$

и для модуля потенциала получим

$$|\psi| = \frac{a|C_{00}|}{4}\left(3ab + i\left((3a^2+1)b + 4\right)\right) = \frac{a|C_{00}|}{4}\sqrt{9a^2b^2 + ((3a^2+1)b+4)^2},$$

где $a = 1/(kr)$, $b = 3\cos 2\theta + 1$, $-2 \leq b \leq 4$. Покажем, что и в этом случае модуль потенциала нигде кроме бесконечности в нуль не обращается. В самом деле, подкоренное выражение $F = (9a^4 + 15a^2 + 1)b^2 + (24a^2 + 3)b + 16$ представляет собой квадратный трехчлен относительно b, который достигает своего минимума в точке $b = -4(3a^2+1)/(9a^4 + 15a^2 + 1)$. Эта точка находится левее промежутка изменения b при $a^2 < (\sqrt{117} - 9)/18 \approx 0,1$. Таким образом, для $0 < a < \sqrt{0,1}$ минимум подкоренного выражения в модуле потенциала достигается при $b = -2$ и равен $36a^4 + 12a^2 + 4 \geq 4$. Для всех остальных значений a точка минимума трехчлена попадает в область изменения b, и для них минимальное значение величины F, определяющееся простой подстановкой абсциссы точки минимума в соответствующее выражение, оказывается равным $144a^2/(9a^4 + 15a^2 + 1) \geq 14,4/25 \approx 0,5$.

Для упрощения записи вычислений введем для коэффициентов величины F обозначения $y_1 = 9a^4 + 15a^2 + 1$ и $y_2 = 24a^2 + 8$. Тогда в рамках принятой точности

$y_1' = 9a'^4 + 15a'^2 + 1 = (y_1 - 2d\cos\theta(15a^2+2))/\mu^4$, $y_2' = 24a'^2 + 8 = (y_2 - 16d\cos\theta)/\mu^2$ и $b' = 3\cos 2\theta' + 1 = (b - 8d\cos\theta)/\mu^2$. Теперь $|\psi'|^2$ можно записать в виде

$$|\psi'|^2 = \frac{1}{\mu^8}\left(y_1b^2+y_2b+16-2d\cos\theta\left((15a^2+2)b^2+8y_1b+8b+2y_2b+4y_2+64\right)\right),$$

где вновь отбрасывались слагаемые, пропорциональные d^2. Таким образом, отношение квадратов модулей потенциалов

$$A^2 = \frac{|\psi'|^2}{|\psi|^2} = \frac{1}{\mu^{10}}\left(1 - 2d\cos\theta\frac{(15a^2+2)b^2+2y_2b+8(y_1+1)b+4y_2+64}{y_1b^2+y_2b+16}\right).$$

Для сомножителя при $2d\cos\theta$ нужно найти оценку сверху. Чтобы ее получить, увеличим коэффициент $15a^2+2$ при b^2 до $2y_1 = 18a^4+30a^2+2$. Тогда в числителе образуется удвоенный знаменатель, после чего A^2 можно записать так

$$\mu^{10}A^2 = 1 - 2d\cos\theta\left(2 + \frac{8(y_1+1)b+4y_2+32}{y_1b^2+y_2b+16}\right).$$

Возвращаясь к параметру a, получим

$$\mu^{10}A^2 = 1 - 2d\cos\theta\left(2 + 8\frac{(9a^4+15a^2+2)b+12a^2+8}{(9a^4+15a^2+1)b^2+8(3a^2+1)b+16}\right).$$

Покажем теперь, что дробь в скобках для любых значений параметров a и b ограничена сверху числом 4

$$\frac{(9a^4+15a^2+2)b+12a^2+8}{(9a^4+15a^2+1)b^2+8(3a^2+1)b+16} < 4.$$

Решая это неравенство относительно b, получим

$$\frac{-4(9a^4+15a^2+1)b^2+(9a^4-81a^2-30)b+12a^2-56}{(9a^4+15a^2+1)b^2+8(3a^2+1)b+16} < 0.$$

Выше показано, что знаменатель этой дроби всегда положителен, поэтому для достижения указанной цели нужно, чтобы ее числитель был отрицательным для всех допустимых b. Дискриминант D квадратного трехчлена относительно b равен $D = 81a^8+270a^6+837a^4-8388a^2+4$. Очевидно, что он может быть положительным только при $a \ll 1$. Увеличим положительную часть дискриминанта, заменив все степени a на двойку. Тогда $D = 4 - 7200a^2$ отрицателен для всех $a > \sqrt{4/7200} \approx 0,024$. Это значит, что для всех значений параметра b (т.е. для любых углов θ) и для значений параметра a из диапазона $0,024 < a \leq 1$ рассматриваемая дробь меньше 4. Для значений параметра a, которые принадлежат промежутку $0 < a \leq 0,024$, корни трехчлена оказываются равными $b_{1,2} = (-30-81a^2+9a^4 \pm \sqrt{4-7200a^2})/(72a^4+120a^2+8)$. Учитывая, что $a \ll 1$, можно положить $\sqrt{4-7200a^2} \approx 2 - 1800a^2$ и найти для корней оценку сверху $b_{1,2} \leq (-28+9a^4)/8) \approx -3,38$. А так как $-2 \leq b \leq 4$, то оказывается, что оба корня находятся вне диапазона изменения параметра b, поэтому и для $0 < a \leq 0,024$ рассматриваемая дробь меньше 4.

Итак, получена оценка $A^2 > (1 - 68d\cos\theta)/\mu^{10} > (1-68d)/\mu^{10}$ или $A > (1 - 34d)/(1+d)^5$. Следовательно, для рассматриваемой комбинации монополя и квадруполя с моментом C_{20} должно выполняться ограничение $1 - 39d > 1 - 42d > 1/(1+\varepsilon_1)$.

Откуда находим условие $d < \varepsilon_1/42/(1+\varepsilon_1) \approx \varepsilon_1/42$, совпадающее с полученным выше ограничением для комбинации монополя и квадруполя с моментом C_{22}.

Осталось рассмотреть квадруполи с моментами $C_{2\,-1}$ и C_{21}, при обсуждении которых также пришлось использовать ослабленное амплитудное требование. Выражения для потенциалов этих квадруполей отличаются друг от друга только знаком аргумента в сомножителе $\exp i\varphi$, что никак не сказывается на обсуждаемых результатах. Поэтому рассмотрим модельный источник, состоящий из монополя и квадруполя с моментом C_{21}. Все нижеследующие рассуждения и полученные результаты дословно применимы и к квадруполю с моментом $C_{2\,-1}$.

Итак, пусть в представлениях потенциала (6) и (8) отличны от нуля только моменты C_{00} и C_{21}. В качестве достаточного условия отличия модуля потенциала от нуля возьмем соотношение $C_{00} = 12C_{21}$. Тогда потенциал источника запишется в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = -C_{21}e^{ikr}\left(\frac{12i}{kr} + \frac{3\sin 2\theta(3kr + i(3+k^2r^2))\exp i\varphi}{2k^3r^3}\right). \tag{13}$$

Введем обозначения $b = \sin 2\theta$, $|b| \le 1$ и $a = 1/(kr)$ и вычислим модуль потенциала

$$|\psi| = \frac{3a|C_{21}|}{2}\sqrt{y^2b^2 + 16by\sin(\varphi+\beta) + 64},$$

где $y^2 = 9a^4 + 15a^2 + 1$, $1 \le y \le 5$, $\sin\beta = (3a^2+1)/y$ и $\cos\beta = 3a/y$. Для подкоренного выражения F справедливо неравенство

$$F = y^2b^2 + 16by\sin(\varphi+\beta) + 64 \ge y^2b^2 - 16by + 64 = (yb-8)^2.$$

Отсюда видно, что глобальный минимум подкоренное выражение имеет при $b = 8/y \ge 8/5 = 1,6$. А поскольку это значение не входит в область изменения b, то фактический минимум F достигается на границах области, т.е. при $b = 1$ или при $b = -1$. Сравнение вычисленных значений приводит к минимуму $F_{min} = y^2 - 16y + 64 = (y-8)^2$, $9 \le F_{min} \le 49$. Таким образом, и для этого квадруполя удалось подобрать момент C_{00}, при котором модуль потенциала содержащего эти мультиполи источника, везде кроме бесконечности отличен от нуля.

Для рассматриваемого случая отношение модулей потенциалов

$$A^2 = \frac{1}{\mu^2}\frac{y'^2b'^2 + 16y'b'\sin(\varphi'+\beta') + 64}{y^2b^2 + 16yb\sin(\varphi+\beta) + 64},$$

где $y'^2 = 9a'^4 + 15a'^2 + 1 = (y^2 - 2d\cos\theta(15a^2+2))/\mu^4$, $b' = 2\sin\theta'\cos\theta' = (b - 2d\sin\theta)/\mu^2$, и $\mu^2y'\sin(\varphi'+\beta') = y\sin(\varphi+\beta) - 2d\cos\theta(3a/2\sin\varphi + \cos\varphi)$. Теперь выражение для A^2 можно переписать в виде

$$A^2 = \frac{1}{\mu^{10}}\left(1 - 2d\cos\theta B - 2d\sin\theta C\right),$$

где

$$B = \frac{(15a^2+2) + 16b(3a/2\cos\varphi + \sin\varphi) + 32yb\sin(\varphi+\beta) + 256}{y^2b^2 + 16yb\sin(\varphi+\beta) + 64}$$

и

$$C = \frac{2by^2 + 16y\sin(\varphi+\beta)}{y^2b^2 + 16yb\sin(\varphi+\beta) + 64}.$$

Оценим сверху значения величин B и C. Вначале увеличим коэффициент при b^2 в числителе величины B до $18b^3 + 30b^2 + 2$

$$B < 2 + 16\frac{b(3a/2\sin\varphi + \cos\varphi) + 8}{y^2b^2 + 16yb\sin(\varphi+\beta) + 64},$$

и заменим числитель его максимальным значением $b(3a/2\sin\varphi + \cos\varphi) + 8 < 11$, а знаменатель – минимальным $F_{min} = 9$, тогда $B < 22$. Так как $\sin(\varphi+\beta)$ и в числитель, и в знаменатель величины C входит линейно, то она достигает своего наибольшего значения при $\sin(\varphi+\beta) = 1$, поэтому

$$C \leq 2y\frac{yb+8}{y^2b^2 + 16yb + 64} = \frac{2y}{by+8} < \frac{10}{3} < 4.$$

Таким образом, получена оценка

$$A^2 = \frac{1}{\mu^{10}}(1 - 44d\cos\theta - 8d\sin\theta) > \frac{1}{\mu^{10}}(1 - 52d),$$

откуда следует ограничение $1 - 31d > 1 - 42d > 1/(1+\varepsilon_1)$, или $d < \varepsilon_1/42/(1+\varepsilon_1) \approx \varepsilon_1/42$, совпадающее с полученным выше для комбинации монополя и квадруполя с моментом C_{22}.

Итак, во всех случаях, когда для для отдельного мультиполя приходилось прибегать к ослабленному амплитудному критерию, удалось показать, что для получения ограничений на параметр d для модельного источника, содержащего данный мультиполь в комбинации с монополем определенной производительности, можно использовать равномерные ограничения, полученные для мультиполей того же порядка из основного амплитудного требования. Формально эти ограничения получаются из неравномерных, если в последних положить значение параметра γ равным нулю. А именно, для диполей это ограничение — $d < \varepsilon_1/4/(1+\varepsilon_1)$, а для квадруполей — $d < \varepsilon_1/7/(1+\varepsilon_1)$. Если требуются ограничения, не зависящие от типа мультиполя, то следует использовать наиболее сильное из них — $d < \varepsilon_1/7/(1+\varepsilon_1)$.

Фактическое наличие в модельном источнике монополя с нужной производительностью, как уже отмечалось выше, не имеет принципиального значения, т.к. при необходимости всегда можно прибавить и вычесть слагаемое с соответствующим коэффициентом, а затем перегруппировать слагаемые нужным образом. В конечном счете эффект присутствия или отсутствия монопольной составляющей необходимой производительности отразится на, вообще говоря, подлежащем измерению значении величины P_{min} из оценки (12).

Прямое получение обсуждаемых ограничений для общего случая, когда в представлении потенциала (6) мультипольные моменты C_{nm} имеют произвольные значения, или, другими словами, модельный точечный излучатель содержит произвольный набор мультиполей, по-видимому, невозможно. Поэтому предлагается получить эти ограничения косвенным способом.

Пусть модельный источник состоит из N мультиполей

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \psi_1(r,\theta,\varphi) + \ldots + \psi_N(r,\theta,\varphi) = \sum_{j=1}^{N}\psi_j(r,\theta,\varphi),$$

причем потенциал $\psi_j(r,\theta,\varphi), j = 1,\ldots,N$ каждого из них удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (9) и (10)

$$\left|1 - \frac{|\psi_j(r',\theta',\varphi')|}{|\psi_j(r',\theta',\varphi')|}\right| = \left|1 - \frac{|\psi_j'|}{|\psi_j|}\right| < \varepsilon_1^*, \quad (14)$$

и

$$|\arg(\psi_j(r',\theta',\varphi')) - \arg(\psi_j(r,\theta,\varphi))| = |\alpha'_j - \alpha_j| < \varepsilon_2^*, \tag{15}$$

где ε_1^* и ε_2^* уже использовавшиеся выше вспомогательные, подлежащие определению параметры; $\psi'_j = \psi_j(r',\theta',\varphi')$ и $\alpha'_j = arg(\psi_j(r',\theta',\varphi'))$. Кроме того, для каждого мультиполя в отдельности будем считать выполненными также упоминавшиеся выше условия нормировки $|\psi_j| \le 1$, $j = 1,\dots,N$ для всех $kr \ge 1$.

Так как квадрат потенциала модельного источника, состоящего из N мультиполей, равен

$$|\psi|^2 = |\sum_{j=1}^{N}\psi_j|^2 = \sum_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos(\alpha_j - \alpha_k),$$

то отношение квадратов модулей потенциалов можно записать в виде

$$A^2 = \frac{|\psi'|^2}{|\psi|^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi'_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\cos(\alpha'_j - \alpha'_k)}{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos(\alpha_j - \alpha_k)}.$$

Аргумент косинуса в числителе можно представить в виде $\alpha'_j - \alpha'_k = \alpha_{jk} + \gamma_{jk}$, где $\alpha_{jk} = \alpha_j - \alpha_k$ и $|\gamma_{jk}| < 2\varepsilon_2^*$. В рамках принятой точности $\cos\gamma_{jk} \approx 1$, поэтому для A^2 верно неравенство

$$A^2 < \frac{(1+2\varepsilon_1^*)\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\cos\alpha_{jk} - \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\sin\alpha_{jk}\sin\gamma_{jk}}{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos\alpha_{jk}}.$$

Прибавляя и вычитая в числителе дроби слагаемое $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos\alpha_{jk}$, после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых числитель можно записать в виде

$$|\psi|^2 + 2\varepsilon_1^*\sum_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k\ne j}^{N}(|\psi'_j||\psi'_k| - |\psi_j||\psi_k|)\cos\alpha_{jk} + 2\varepsilon_2^*\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\ne j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\sin\alpha_{jk}.$$

Условие (14) можно записать в виде $|\psi'_j| = |\psi_j|(1+x_j)$, где $|x_j| < \varepsilon_1^*$, $j = 1,\dots,N$ и затем преобразовать разность при $\cos\alpha_{jk}$

$$|\psi'_j||\psi'_k| - |\psi_j||\psi_k| \approx (x_j + x_k)|\psi_j||\psi_k|.$$

После чего для A^2 получим

$$A^2 < 1 + \frac{2\varepsilon_1^*\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|(x_j+x_k)\cos\alpha_{jk} + 2\varepsilon_2^*\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\sin\alpha_{jk}}{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\ne j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos\alpha_{jk}}.$$

Разделим и умножим дробь в последнем соотношении на $N(N-1)$. Так как агрументы α_j можно считать независимым образом распределенными в диапазоне $(0, 2\pi)$, то для достаточно больших N (в практических задачах для $N \geq 5$) с учетом условия нормировки величинами

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N}|\psi_j||\psi_k|(x_j+x_k)\cos\alpha_{jk}}{N(N-1)} \quad \text{и} \quad \frac{2\varepsilon_2^*\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N}|\psi'_j||\psi'_k|\sin\alpha_{jk}}{N(N-1)},$$

представляющими собой средние значения большого числа независимо распределенных в диапазоне $(-1,+1)$ слагаемых, можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым числителя. Тогда оценка для A^2 существенно упростится

$$A^2 < 1 + \frac{2\varepsilon_1^*\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2}{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|^2 + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N}|\psi_j||\psi_k|\cos\alpha_{jk}} < 1 + \frac{2\varepsilon_1^* N}{P_{min}^2},$$

где P_{min} — минимальное значение модуля потенциала всего модельного источника в рассматриваемой области пространства, которое мы будем считать не равным нулю нигде кроме бесконечности. Таким образом, для потенциала всего источника верно неравенство

$$\left|1 - \frac{|\psi'|}{|\psi|}\right| < \frac{N}{P_{min}^2}\varepsilon_1^*,$$

и для того, чтобы выполнялось ограничение (9) в неравенствах амплитудного требования для составляющих источник мультиполей (14), необходимо брать

$$\varepsilon_1^* \leq \varepsilon_1 P_{min}^2/N. \tag{16}$$

Теперь разберем ограничения, вытекающие из фазовых требований. Записав потенциал отдельного мультиполя в виде $\psi_j = |\psi_j|\exp(i\alpha_j)$, потенциал всего источника можно представить так

$$\psi = \sum_{j=1}^{N}\psi_j = \sum_{j=1}^{N}|\psi_j|\cos\alpha_j + \sum_{j=1}^{N}|\psi_j|\sin\alpha_j.$$

После чего для аргументов потенциалов $\alpha' = arg(\psi')$ и $\alpha = arg(\psi)$ из (9) можно найти тангенс разности

$$\mathrm{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi'_j|\cos\alpha'_j\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|\sin\alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{N}|\psi'_j|\sin\alpha'_j\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|\cos\alpha_j}{\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi'_j|\cos\alpha'_j\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|\cos\alpha_j + \sum\limits_{j=1}^{N}|\psi'_j|\sin\alpha'_j\sum\limits_{j=1}^{N}|\psi_j|\sin\alpha_j},$$

или после перемножения сумм и приведения подобных

$$tg(\alpha'-\alpha) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N}|\psi'_j||\psi_k|\sin(\alpha_k-\alpha'_j)}{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N}|\psi'_j||\psi_k|\cos(\alpha_k-\alpha'_j)}.$$

Теперь преобразуем аргумент $\alpha_k - \alpha'_j = \alpha_{kj} - \gamma_j$, где $\alpha_{kj} = \alpha_k - \alpha_j$, а $|\gamma_j| < \varepsilon_2$, после чего последнее соотношение переписывается в виде

$$tg(\alpha' - \alpha) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} |\psi'_j||\psi_j|\sin\gamma_j + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N} |\psi'_j||\psi_k|\sin(\alpha_{jk} + \gamma_k)}{\sum\limits_{j=1}^{N} |\psi'_j||\psi_j|\cos\gamma_j + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N} |\psi'_j||\psi_k|\cos(\alpha_{jk} + \gamma_k)}.$$

По аналогии с приведенными выше рассуждениями после деления числителя и знаменателя на $N(N-1)$ слагаемыми

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N} |\psi'_j||\psi_k|\sin(\alpha_{jk} + \gamma_k)}{N(N-1)} \qquad \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k\neq j}^{N} |\psi'_j||\psi_k|\cos(\alpha_{jk} + \gamma_k)}{N(N-1)}$$

можно пренебречь, а так как $\sin\gamma_j < \varepsilon_2$, а $\cos\gamma_j \approx 1$, то верно неравенство $tg(\alpha' - \alpha) < \varepsilon_2^*$ или $|\alpha' - \alpha| < \varepsilon_2^*$. Следовательно, для того чтобы выполнялось ограничение (10) в неравенствах фазового требования для составляющих источник мультиполей (15), нужно брать $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_2$.

Задав конкретные, вытекающие из условий рассматриваемой практической задачи значения ε_1 и ε_2 и вычислив или измерив значение величины P_{min}, вначале с помощью (16) и $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_2$ определяются значения для ε_1^* и ε_2^*. А затем с использованием подходящего для всех мультиполей условия $d < \varepsilon_1^*/7/(1 + \varepsilon_1^*)$ находятся искомые ограничения для параметра d, при выполнении которых допустимо применение модели точечного направленного источника. Например, полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и сохраняя в модельном излучателе все элементарные мультиполи до второго порядка включительно, получим, что условия (9) и (10) окажутся выполненными, если будут удовлетворены ограничения $d < \varepsilon_1^*/7/(1 + \varepsilon_1^*) \approx \varepsilon P_{min}^2/70$ и $2kL < \varepsilon$ и, следовательно, для такого источника можно использовать модель точечного мультипольного излучателя.

Литература

[1] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973 343С.

[2] Быковцев Г.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах. // ДАН СССР. 1985. Т.280. N1 С.57-59

[3] Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973, 494С.

ABOUT THE PARAMETRIC MODEL OF POINT DIRECTIONAL SOURCE

Stepanov A.N. [2]

The theoretical foundation of using parametric model of point directional source is considered, and the condition at satisfaction which instead of real sources with arbitrary spatial extend may be used equivalent point directional source is drawn out.

[2] Stepanov Anotoly Nik. , dept. of math. Samara state university