О СВЯЗНОСТИ ОБРАЗА КОНЕЧНО-АДДИТИВНОЙ МЕРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГРУППЕ

М.Г. Свистула[1]

Показано, что конечно-аддитивная исчерпывающая квазимонотонная мера со свойством половины, принимающая значения в топологической абелевой группе без циклических элементов второго порядка, имеет линейно связный образ (локальная компактность группы не требуется).

Согласно теореме Дарбу, образом счетно-аддитивной неатомической меры $\mu : \Sigma \to R^{+}$, где Σ – некоторая σ – алгебра подмножеств множества T, является отрезок $[0, \mu(T)]$. Известно, что для конечно – аддитивной исчерпывающей меры классической неатомичности не достаточно для связности образа. В данной статье рассматриваются достаточные условия связности образа конечно – аддитивной меры.

В ряде работ [1-4] используется более сильное, чем неатомичность, условие Сакса.

В дальнейшем μ – конечно-аддитивная мера, Σ – некоторая алгебра подмножеств множества T, G – топологическая абелева группа, X – линейное нормированное пространство.

Определение. Пусть $\mu : \Sigma \to G$. Говорят, что μ удовлетворяет условию Сакса, если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности нуля U в G существует такое конечное разложение множества E, что

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k,\ \ E_k \in \Sigma,\ \ E_k \cap E_m = \emptyset, \widetilde{\mu}(E_k) \subset U,\ \ k \in \overline{1,n}.$$

Здесь используется обозначение $\widetilde{\mu}(A) = \{\mu(F) : F \subset A,\ \ F \in \Sigma\}$.

Определение [5]. Алгебру Σ называют $\mathcal{F}$ – алгеброй, если для любой пары последовательностей $\{A_n\},\ \{B_n\}$ из Σ таких, что $\{A_n\}$ возрастающая, $\{B_n\}$ убывающая, $A_n \subset B_n$, существует такое множество $C \in \Sigma$, что $A_n \subset C \subset B_n,\ \ n \in \overline{1, \infty}$.

В работе [4] доказана

Теорема 1. Пусть $\Sigma - \mathcal{F}$ – алгебра, X – конечномерное пространство, $\mu : \Sigma \to X$ – конечно-аддитивная ограниченная мера, удовлетворяющая условию Сакса. Тогда её образ $\mu(\Sigma)$ является выпуклым множеством.

Наряду с условием Сакса, рассматривается ещё один аналог неатомичности – свойство половины. Известны примеры, показывающие, что эти свойства, вообще говоря, не эквивалентны.

Определение [1]. Говорят, что конечно-аддитивная мера $\mu : \Sigma \to G$ обладает свойством половины, если для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое подмножество $F \subset E,\ F \in \Sigma$, что

[1]Свистула Марина Геннадьевна, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

$$\mu(F) + \mu(F) = \mu(E).$$

Тогда $\mu(F) = \mu(E \setminus F)$.

Определение. Будем называть $\mu : \Sigma \to G$ исчерпывающей, если для любой последовательности попарно дизъюнктных множеств $\{E_n\}$ из Σ $\mu(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение. Элемент a группы G называется циклическим элементом второго порядка, если $a \neq 0$ и $a + a = 0$.

Известно, что для конечно – аддитивной исчерпывающей меры на алгебре со значениями в топологической абелевой группе без циклических элементов второго порядка свойство половины влечет условие Сакса. Докажем более сильное утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mu : \Sigma \to G$, где Σ – алгебра, G – топологическая абелева группа без циклических элементов второго порядка, μ – конечно-аддитивная исчерпывающая мера со свойством половины.

Пусть $E \in \Sigma$, U – некоторая окрестность нуля в G. Тогда существует такое конечное разложение множества E, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} E_k,\ E_k \in \Sigma,\ E_k \cap E_m = \emptyset$, $\widetilde{\mu}(E_k) \subset U,\ k \in \overline{1, 2^n},\ \mu(E_1) = \mu(E_2) = ... = \mu(E_{2^n})$.

Доказательство. Часть 1. Пусть E – произвольное множество из Σ. По свойству половины существует такое множество $F \in \Sigma,\ F \subset E$, что $\mu(F) + \mu(F) = \mu(E)$. Положим $E_{0,\frac{1}{2}} = F,\ E_{\frac{1}{2},1} = E \setminus F$. Обозначим $a_1 = \mu(E_{0,\frac{1}{2}}) = \mu(E_{\frac{1}{2},1})$. Применим к множествам F и $E \setminus F$ свойство половины. Получим множества $F_1, F_2 \in \Sigma$, $F_1 \subset F,\ F_2 \subset E \setminus F$, для которых $\mu(F_1) + \mu(F_1) = \mu(F),\ \mu(F_2) + \mu(F_2) = \mu(E \setminus F)$. Так как $\mu(F) = \mu(E \setminus F)$ и G не имеет циклических элементов второго порядка, то $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. Положим $E_{0,\frac{1}{2^2}} = F_1,\ E_{\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2}} = F \setminus F_1,\ E_{\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}} = F_2,\ E_{\frac{3}{2^2},1} = (E \setminus F) \setminus F_2$. Значения μ на этих множествах равны, обозначим $a_2 = \mu(E_{0,\frac{1}{2^2}})$. Продолжим процесс до бесконечности. На n-м шаге получим разложение множества E на 2^n попарно дизъюнктных множеств из Σ $\{E_{\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}}\}_{i=0}^{2^n-1}$ с одинаковой мерой $\mu(E_{\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}}) = a_n$. Можно представить $a_n = \mu(E_{\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}})$, где берется последовательность попарно дизъюнктных множеств из Σ. Из исчерпываемости μ следует, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Часть 2. Предположим, что теорема не верна. Пусть V – симметричная окрестность нуля, для которой $V+V+V \subset U$. Применим к множеству E часть 1. Существует номер n_1 такой, что $a_n \in V$ для $n \geq n_1$. Через $\{E_i\}_{i=1}^{2^{n_1}}$ переобозначим разложение множества E, получающееся на n_1 шаге. Тогда $\mu(E_1) = \mu(E_2) = ... = \mu(E_{2^{n_1}}) = a_{n_1}$. Без ограничения общности можно считать, что E_1 обладает следующим свойством (*): для любого его разложения $\{P_1, ..., P_{2^k}\},\ P_i \cap P_m = \emptyset,\ \bigcup\limits_{i=1}^{2^k} P_i = E_1$, удовлетворяющего условию $\mu(P_1) = ... = \mu(P_{2^k})$, существует такое P_i, что $\widetilde{\mu}(P_i) \not\subset U$. Тогда существует множество $C \in \Sigma,\ C \subset E_1$, для которого $\mu(C) \notin U$. Тогда $\mu(E_1 \setminus C) \notin V+V$. Обозначим $K = E_1 \setminus C$. Итак, $\mu(C) \notin V + V,\ \mu(K) \notin V + V$.

По свойству половины существует множество $C_1 \in \Sigma, C_1 \subset C$, для которого $\mu(C_1) + \mu(C_1) = \mu(C)$. Тогда $\mu(C_1) = \mu(C \setminus C_1) \notin V$.

Аналогично, существует множество $K_1 \in \Sigma,\ K_1 \subset K$, для которого $\mu(K_1) + \mu(K_1) = \mu(K),\ \mu(K_1) = \mu(K \setminus K_1) \notin V$.

Множества $C_1 \cup K_1,\ (C \setminus C_1) \cup (K \setminus K_1)$ задают разложение множества E_1 на части, меры которых равны. Тогда хотя бы одно из них, например, $C_1 \cup K_1$, обладает свойством (*). Заметим, что $\mu(C_1 \cup K_1) = a_{n_1+1} \in V$. Положим $F_1 = C \setminus C_1$, имеем $\mu(F_1) \notin V$.

Повторим предыдущие рассуждения, рассмотрев $C_1 \cup K_1$ вместо E_1. Продолжив процесс до бесконечности, получим последовательность попарно дизъюнктных множеств $\{F_i\}$ из Σ, для которой $\mu(F_i) \notin V,\ i \in \overline{1,\infty}$. Это противоречит исчерпываемости μ. Теорема доказана.

Определение. Топологическое пространство Z называется линейно связным, если для любых $z_1, z_2 \in Z,\ z_1 \neq z_2$ существует непрерывная функция $f : [0,1] \to Z$, для которой $f(0) = z_1$ и $f(1) = z_2$.

Теорема 3. Пусть $\mu : \Sigma \to G$, где $\Sigma - \mathcal{F}$ – алгебра, G – топологическая абелева группа без циклических элементов второго порядка, имеющая счетную базу окрестностей нуля, μ – конечно-аддитивная исчерпывающая мера со свойством половины. Тогда образ меры $\mu(\Sigma)$ является линейно связным множеством.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma,\ \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – база симметричных окрестностей нуля. По теореме 2 для U_1 и множества E существует разложение $\{E_{\frac{i}{2^{n_1}},\frac{i+1}{2^{n_1}}}\}$ такое, что

$$\widetilde{\mu}(E_{\frac{i}{2^{n_1}},\frac{i+1}{2^{n_1}}}) \subset U_1,\ \mu(E_{0,\frac{1}{2^{n_1}}}) = ... = \mu(E_{\frac{2^{n_1}-1}{2^{n_1}},1}).$$

Для каждого множества этого разложения и окрестности U_2 существует разложение на 2^k частей, удовлетворяющее утверждению теоремы 3. При этом получим разложение $\{E_{\frac{i}{2^{n_2}},\frac{i+1}{2^{n_2}}}\}$ множества E, где

$n_2 = n_1 + k,\ \widetilde{\mu}(E_{\frac{i}{2^{n_2}},\frac{i+1}{2^{n_2}}}) \subset U_2,\ \mu(E_{0,\frac{1}{2^{n_2}}}) = ... = \mu(E_{\frac{2^{n_2}-1}{2^{n_2}},1})$. Продолжим процесс до бесконечности.

Пусть $t \in [0,1]$. Существует возрастающая последовательность чисел $\{\frac{i_k}{2^{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\frac{i_1}{2^{n_1}} \leq \frac{i_2}{2^{n_2}} \leq ... \leq t \leq ... \leq \frac{i_2+1}{2^{n_2}} \leq \frac{i_1+1}{2^{n_1}} \text{ и } \frac{i_k}{2^{n_k}} \to t \text{ при } k \to \infty.$$

Обозначим

$$A_{\frac{i}{2^n}} = E_{0,\frac{1}{2^n}} \cup ... \cup E_{\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}},$$

$$B_{\frac{i}{2^n}} = A_{\frac{i}{2^n}} \cup ... \cup E_{\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}},$$

$\{A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}\}$ – возрастающая, $\{B_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}\}$ – убывающая последовательность множеств из Σ, $A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}} \subset B_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}$ Тогда существует $C \in \Sigma$ такое, что $A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}} \subset C \subset B_{\frac{i_k}{2^{n_k}}},\ k \in \overline{1,\infty}$. Положим $A_t = C$. Определим функцию $f : [0,1] \to G$, положив $f(t) = \mu(A_t)$. Покажем, что f непрерывна на $[0,1]$. Пусть $t, t' \in [\frac{i_k}{2^{n_k}}, \frac{i+1}{2^{n_k}}], t < t'$. Тогда $A_{\frac{i+1}{2^{n_k}}} \subset A_t \subset A_{t'} \subset A_{\frac{i+1}{2^{n_k}}}$. Получим

$$\mu(A_{t'}) - \mu(A_t) = \mu(A_{t'} \setminus A_t) \in \widetilde{\mu}(\frac{A_{i+1}}{2^{n_k}} \setminus \frac{A_i}{2^{n_k}}) = \widetilde{\mu}(E_{\frac{i}{2^{n_k}},\frac{i+1}{2^{n_k}}}) \subset U_{n_k}.$$

Итак, $f : [0,1] \to G$ – непрерывна, $f(0) = 0_G,\ f(1) = \mu(E)$. Пусть $F \in \Sigma$. Нетрудно показать, что $\mu(E)$ и $\mu(F)$ можно соединить непрерывной кривой, соединяя их непрерывными кривыми с 0_G.

Определение [2]. Пусть $\mu : \Sigma \to G$. Говорят, что μ квазимонотонна, если для любой окрестности нуля U в G и для любого множества E из Σ из того, что $\mu(E) \in U$, следует $\widetilde{\mu}(E) \subset U$.

Теорема 4. Пусть $\mu : \Sigma \to G$, где $\Sigma - \mathcal{F}$ – алгебра, G – топологическая абелева группа без циклических элементов второго порядка, μ – конечно-аддитивная исчерпывающая квазимонотонная мера со свойством половины. Тогда образ меры $\mu(\Sigma)$ является линейно связным множеством.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma$. Повторим часть 1 теоремы 2. Получим последовательность разложений множества E

$$\{E_{0,\frac{1}{2}}; E_{\frac{1}{2},1}\}, ..., \{E_{\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}}\}_{i=0}^{2^n-1}, ...$$

Повторим рассуждения теоремы 3, взяв эту последовательность разложений вместо рассматриваемой в теореме 3. Пусть U – произвольная окрестность нуля. Если номер k взять таким, чтобы $a_k \in U$, то $\mu(A_{t'}) - \mu(A_t) = \mu(A_{t'} \setminus A_t) \in U$, т.к. $A_{t'} \setminus A_t \subset E_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}$, $\mu(E_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}) = a_k \in U$ и μ квазимонотонна.

Замечание. Теорема 4 усиливает теорему 4.4 работы [2], где от G дополнительно требуется локальная компактность и μ задается на σ – алгебре.

Литература

[1] Martellotti A. Topological properties of the range of a group-valued finitely additive measure // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1985. V.110. N2. P.411-424.

[2] Martellotti A., Sambuchini A.R. Riesz space valued submeasures and application to group-valued finitely additive measures // Le Matematiche. 1987. V.XLII. Fasc.I-II. P.37-48.

[3] Климкин В.М., Свистула М.Г. О свойстве Дарбу неаддитивной функции множества // Современный групповой анализ и задачи математического моделирования. СамГУ. Самара, 1993. С.199-203.

[4] Armstrong T.E., Prikry K. Liapounoff's theorem for nonatomic, finitely - additive, bounded, finite-dimensional, vector-valued measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V.266. N2. P.499-514.

[5] Seever G.L. Measures on F-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V.133. P.267-280.

[6] Кадец В.М. Замечание к теореме Ляпунова о векторной мере// Функциональный анализ и его приложения. 1991. Т.25. Вып.4. С.78-80.

[7] Landers D. Connectedness properties of the range of vector and semimeasures // Manuscripta Math. 1973. V.9. P.105-112.

ABOUT CONNECTEDNESS OF THE RANGE OF FINITELY ADDITIVE GROUP VALUED MEASURE

Svistula M.G. [2]

It is shown that any finitely addative exhaustive quasi - monotone measure with a half property taking values in a topological abelian group without second order cyclic elements has pathwise connected range (a local compactness of the group is not required).

[2] Svistula Marina Gennadievna, dept. of math. Samara state university