РЕШЕТКИ ГАЛУА И ИХ БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

С.Ю. Попов[1]

При исследовании бирациональной геометрии алгебраических торов возник важный объект алгебро-геометрического характера – класс Пикара $p(\hat{T})$ П-модуля $\hat{T}$ конечного $\mathbf{Z}$-ранга без кручения, определяющий тор T с точностью до стабильной эквивалентности [2]. Хотя класс Пикара алгоритмически может быть вычислен, но данная методика еще слабо разработана и сами вычисления достаточно трудоемки. В данной работе мы вычисляем бирациональные инварианты $H^1(\Gamma, p(\hat{T}))$ для П-модулей $\hat{T}$ малого ранга, где Г – подгруппа конечной группы П.

Введение

Пусть T – алгебраический n-мерный тор, определенный над произвольным полем k. Тор T является k-формой тривиального тора G_m^n, т.е. группы $T \otimes_k k_s$ и G^n_{m,k_s} изоморфны, где k_s – сепарабельное замыкание поля k с группой Галуа $\mathcal{G}$. Группа $\hat{T}$ рациональных характеров тора T является свободной абелевой группой ранга n (решеткой), на которой естественно действует группа $\mathcal{G}$. Хорошо известно, что соответствие $T \to \hat{T}$ определяет дуальность между категориями алгебраических k-торов и $\mathcal{G}$-решеток [1]. Напомним, как определяется тор T, исходя из $\mathcal{G}$-решетки $\hat{T}$. Представим группу $\hat{T}$ в мультипликативной форме и пусть $k_s[\hat{T}]$ – групповое кольцо, на котором группа Галуа $\mathcal{G}$ действует "диагонально". Тогда

$$T = \mathrm{S}pec(k_s[\hat{T}])^{\mathcal{G}}.$$

Пусть теперь X – гладкое проективное многообразие над полем k, содержащее тор T в качестве открытого подмножества (такая проективная модель для тора существует над любым полем), $\overline{X} = X \otimes_k k_s$. Тогда $\mathcal{G}$-модуль $Pic\overline{X}$ является решеткой. Если Y – другая проективная модель k-тора T, то имеется изоморфизм $\mathcal{G}$-модулей $Pic\overline{X} \oplus \hat{S}_1 \cong Pic\overline{Y} \oplus \hat{S}_2$, где $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ – пермутационные $\mathcal{G}$-модули [2]. Модули $Pic\overline{X}$ и $Pic\overline{Y}$, связанные таким соотношением, называются *подобными.* Пусть $[Pic\overline{X}]$ – класс подобия, он является бирациональным инвариантом k-тора T. Решетка $Pic\overline{X}$ определяет тор T с точностью до стабильной эквивалентности [2]. Возникает задача практического вычисления класса $[Pic\overline{X}]$ по заданной $\mathcal{G}$-решетке $\hat{T}$. Эта задача легко сводится к случаю, когда действующая на $\hat{T}$ группа является конечной. В самом

[1]Попов Сергей Юрьевич, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

деле, из компактности группы $\mathcal{G}$ и дискретности решетки $\hat{T}$ следует, что подгруппа $\mathcal{G}_1$, состоящая из элементов группы $\mathcal{G}$, тривиально действующих на $\hat{T}$, имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Пусть $L = k_s^{\mathcal{G}_1}$ – конечное расширение Галуа поля k с группой Галуа $\Pi = \mathcal{G}/\mathcal{G}_1$. Поле L есть минимальное поле разложения тора T, т.е. L – минимальное поле, над которым тор T разложим, а именно: $T \otimes_k L \cong G^n_{m,L}$. Вместо $\overline{X}$ можно взять $X_L = X \otimes_k L$. При этом $[Pic\overline{X}] = [PicX_L]$. Решетка $PicX_L$, рассматриваемая как Π-модуль, обладает свойствами $H^{-1}(\pi, PicX_L) = 0, \forall \pi \subset \Pi$. Назовем Π-решетки с такими свойствами *вялыми*. Вложение $T \subset X$ определяет точную последовательность Π-модулей

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to PicX_L \to 0, \tag{1}$$

где $\hat{S}$ – пермутационный Π-модуль, порожденный простыми дивизорами из дополнения $X_L \setminus T$. Пусть теперь

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S}_1 \to \hat{N} \to 0. \tag{2}$$

– другая вялая резольвента модуля $\hat{T}$, то есть $\hat{S}_1$ – пермутационный Π-модуль, а $\hat{N}$ – вялый. В работе [2] показано, что классы подобия $[PicX_L]$ и $[\hat{N}]$ совпадают. Будем обозначать класс $[PicX_L]$ символом $p_\Pi(M)$ или $p(M)$, если зафиксирована группа Π. Заметим, что для любой подгруппы π группы Π имеем класс $p_\pi(\hat{T})$, который также является бирациональным инвариантом тора T. Класс $p_\pi(\hat{T})$ равен $[\hat{N}]$, где $\hat{N}$ рассматривается как π-модуль. Резольвента (2) позволяет находить класс $[\hat{N}]$ чисто алгебраически. Таким образом, к настоящему времени мы имеем два метода нахождения класса $p(\hat{T})$: геометрический и алгебраический.

I. В дуальной решетке $\hat{T}^0 = Hom(\hat{T}, \mathbf{Z})$ нужно построить гладкий проективный Π-инвариантный веер Σ, определяющий гладкую проективную модель Демазюра X_Σ. Веер Σ определяет вялую резольвенту Π-модуля $\hat{T}$, а следовательно, и $p(\hat{T})$ [3].

II. Для Π-модуля $\hat{T}^0$ строим эпиморфизм $\alpha : \hat{S} \to \hat{T}^0$, где $\hat{S}$ – пермутационный Π-модуль. Имеем точную последовательность Π-модулей

$$0 \to \hat{R} \to \hat{S} \to \hat{T}^0 \to 0, \tag{3}$$

где $\hat{R} = \ker(\alpha)$. Отсюда получаем точную последовательность когомологий

$$0 \to \hat{R}^\pi \to \hat{S}^\pi \xrightarrow{\alpha} (\hat{T}^0)^\pi \to H^1(\pi, \hat{R}) \to 0.$$

Осталось выбрать Π-модуль $\hat{S}$ достаточно большим, чтобы гомоморфизм α был эпиморфизмом для всех подгрупп π группы Π. Тогда $H^1(\pi, \hat{R}) = 0, \forall \pi \subset \Pi$. Переходя к дуальным модулям в последовательности (3) с таким модулем $\hat{S}$, получаем вялую резольвенту модуля $\hat{T}$

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S}^0 \to \hat{R}^0 \to 0,\ \hat{S}^0 \cong \hat{S},\ p(\hat{T}) = [\hat{R}^0].$$

Вычислению бирационального инварианта $p(T)$ посвящены работы Воскресенского, Клячко, Кунявского, Эндо, Мияты, Колье-Телена, Сансюка, Меркурьева и др. Подробный обзор этих исследований имеется в серии статей [6]. В данной работе рассматривается вопрос о вычислении бирациональных инвариантов торов размерности n. В силу всего вышесказанного, данная задача может быть сформулирована на языке целочисленных представлений данной степени n. По теореме Жордана существует лишь конечное число попарно несопряженных конечных подгрупп Π в группе $GL(n, \mathbf{Z})$. Группа Π естественно действует на решетке $\mathbf{Z}^n$. Обозначим полученный Π-модуль через $\hat{T}$. Для каждой такой Π-решетки $\hat{T}$ требуется определить все семейство $\{p_\pi(\hat{T}),\ \pi \subset \Pi\}$ или хотя бы инварианты $H^1(\pi, p(\hat{T}))$. Достаточно в качестве Π брать только максимальные конечные подгруппы в $GL(n, \mathbf{Z})$. В малых размерностях их немного. Еще одна важная задача: вычислить классы (или их 1-когомологии) для решеток корней (весов) полупростых групп.

В силу рациональности одно- и двумерных торов [2] их бирациональные инварианты нулевые. В настоящей работе мы вычисляем когомологические инварианты для трехмерных алгебраических торов с максимальными группами разложения, а также для силовских подгрупп группы разложения максимального тора без аффекта исключительной группы G с системой корней $R(G)$ типа F_4.

1. Бирациональные инварианты алгебраических торов размерности 3

1.1. Реализация модулей рациональных характеров k-торов размерности 3 с помощью стандартных решеток. В группе $GL(3, \mathbf{Z})$ имеются четыре максимальные попарно несопряженные подгруппы, одна из которых приводима [7]. Тор с максимальной приводимой группой разложения является произведением одномерного и двумерного торов, поэтому он рационален и его бирациональные инварианты нулевые. Алгоритм центрирования, предложенный Плескеном [8], позволяет найти не только максимальные неприводимые подгруппы в группе $GL(3, \mathbf{Z})$, но и удобную реализацию модулей характеров торов с соответствующими группами разложения с помощью стандартных решеток L_0, L_1, L_2 в $E = \mathbf{R}^3$.

Как известно, любая конечная максимальная неприводимая подгруппа в $GL(n, \mathbf{Z})$ является группой целочисленных автоморфизмов некоторой положительно определенной квадратичной формы (единственной с точностью до числового множителя) и однозначно определяется каждой из ее неприводимых подгрупп. В $GL(3, \mathbf{Z}) \subset GL(3, \mathbf{Q})$ существует единственная с точностью до $\mathbf{Q}$-сопряженности конечная минимальная неприводимая подгруппа 12-го порядка

$$G = < g_1,\ g_2 >,\ g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $N = \mathbf{Z}^3 = < e_1, e_2, e_3 >$ – естественный G-модуль. Найдем G-подмодули модуля N ранга 3, которые неизоморфны G-модулю N. Как показано в [8], всякий такой G-модуль есть ядро G-эпиморфизма модуля N на некоторый конечный неразложимый G-модуль, который является прямым слагаемым *разложимого* модуля N/pN (p – простой делитель 12). Фактор $N/3N$ является неразложимым G-модулем, $M = N/2N = M_1 \oplus M_2$, причем $M_1 = \mathbf{Z}_2(e_1+e_2+e_3)$, $M_2 = \mathbf{Z}_2(e_1+e_2) \oplus \mathbf{Z}_2(e_1+e_3)$ неразложимы. Построив G-эпиморфизмы $\phi_i : N \to M_i$, $i = \overline{1,2}$, находим искомые модули $N_1 = \ker\phi_1 = < e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_3 >$, $[N : N_1] = 2$; $N_2 = \ker\phi_2 = < e_1+e_2+e_3, e_1-e_2+e_3, e_1+e_2-e_3 >$, $[N : N_2] = 4$. Применение алгоритма центрирования к модулям N_1 и N_2 приводит к следующему графу включений:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & N \arrow[dl, dash] \arrow[r, dash] & N_1 \arrow[dl, dash] \\
N_2 \arrow[r, dash] & 2N &
\end{tikzcd}$$

Пусть $E = \mathbf{R}^3 = N \otimes \mathbf{R}$ – евклидово пространство с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$. Действие группы G на N продолжается до действия G на E, тогда $L_0 =< e_1, e_2, e_3 >\cong N,\ L_1 =< e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_3 >\cong N_1,\ L_2 = L_0 + \frac{1}{2}\mathbf{Z}(e_1+e_2+e_3) \cong N_2$ ($L_0,\ L_1,\ L_2$ – стандартные решетки в E, рассмотренные в [9]). Матричные представления группы G, вычисленные в базисах решеток $L_0,\ L_1,\ L_2,$ – это все $\mathbf{Z}$-несопряженные целочисленные представления группы G. Каждое из них определяет единственную с точностью до числового множителя инвариантную положительно определенную квадратичную форму:

$$1)\ \text{решетка } L_0,\ G \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ f_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

$$2)\ \text{решетка } L_1,\ G \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$f_1 = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2;$$

$$3)\ \text{решетка } L_2,\ G \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$f_2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Группы $W_1 = O(3, f_{L_0}),\ W_2 = O(3, f_{L_1}),\ W_3 = O(3, f_{L_2})$ (группы целочисленных автоморфизмов указанных квадратичных форм) являются конечными максимальными неприводимыми подгруппами в $GL(3, \mathbf{Z})$. Нетрудно показать, что все они являются матричными представлениями конечной подгруппы W группы ортогональных преобразований E, вычисленными в базисах решеток $L_0,\ L_1,\ L_2$ соответственно. Более того, все максимальные неприводимые конечные подгруппы в $GL(3, \mathbf{Z})$ $\mathbf{Q}$-сопряжены; они имеют порядок 48 и являются неэквивалентными целочисленными представлениями прямого произведения симметрических групп степени 4 и 2.

Пусть $T_1,\ T_2,\ T_3$ – k-торы с группами разложения $W_1,\ W_2,\ W_3$ и решетками рациональных характеров $L_0,\ L_1,\ L_2$ соответственно. Рациональность торов с кубической решеткой рациональных характеров L_0 в евклидовом пространстве $E_n = \mathbf{R}^n$ была доказана Воскресенским [3]. Таким образом, тор T_1 k-рационален, а значит, $H^1(\pi, p(T_1)) = 0,\ \forall \pi \subset \Pi$. Торы $T_2,\ T_3$, как показано в [10], не являются k-рациональными и имеют нетривиальные когомологические инварианты.

1.2. Бирациональные инварианты тора T_2. Построим вялую резольвенту для Π-модуля ($\Pi = \mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_2$) $\hat{T}_2 \cong L_1$. В решетке $(\hat{T}_2)^0 \cong L_1^0 = L_2$ построим проективный Π-инвариантный полный веер Σ.

Пусть $|\Sigma_0| = \{d_{\pm 1} = \pm\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3),\ d_{\pm 2} = \pm\frac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3),\ d_{\pm 3} = \pm\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3),\ d_{\pm 4} = \pm\frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3)\}$ – 8 векторов из L_2, на которых Π действует следующим образом: $\mathbf{S}_4$ переставляет векторы с индексами одного знака, образующая группы $\mathbf{S}_2$ – центральная симметрия. 6 конусов, каждый из которых натянут на векторы $d_{i_1},\ d_{i_2},\ d_{-i_3},\ d_{-i_4},\ \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, и их части определяют полный Π-инвариантный веер Σ_0. Чтобы получить гладкий проективный веер Σ, разобьем каждый из 6 конусов на 4 части. Например, конус $(d_1, d_2, d_{-3}, d_{-4})$ разобьем на симплексы, порожденные базисами решетки $L_2:\ (d_1, d_{-3}, e_3),\ (d_2, d_{-3}, e_3), (d_1, d_{-4}, e_3),$ (d_2, d_{-3}, e_3). Таким образом, к уже имеющимся ребрам Σ_0 прибавляются 6 лучей, порожденных примитивными векторами $f_{\pm i} = \pm e_i,\ i = \overline{1,3}$ (стабилизатор элемента

f_1 – группа $D_4 =< (1234) \times (12), (13)(2)(4) \times (1)(2) >$). Полученный веер Σ проективен, т.к. определяется гранями строго выпуклого многогранника, внутренность которого содержит начало координат. X_Σ – $\mathbf{Z}$-схема Демазюра для веера Σ. Итак, вялая резольвента П-модуля $\hat{T}_2$ имеет вид:

$$0 \to \hat{T}_2 \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \to PicX_\Sigma \to 0, \tag{4}$$

где $\hat{S}$ – пермутационный П-модуль, порожденный ребрами веера Σ. Исходя из описания действия П на примитивных векторах из $|\Sigma|$, получаем, что $\hat{S} = D \oplus F$. П-модули $D,\ F$ в свою очередь допускают следующее описание (в скобках – $<>$ – указывается пермутационный базис): $D = \hat{S}_4 \otimes \hat{S}_2$ ($\hat{S}_4 = \mathbf{Z}[\mathbf{S}_4/\mathbf{S}_3] =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ – пермутационный $\mathbf{S}_4$-модуль, $\hat{S}_2 = \mathbf{Z}[\mathbf{S}_2] =< w_1, w_2 >$ – пермутационный $\mathbf{S}_2$-модуль), $F = \mathbf{Z}[\Pi/D_4] =< f_{\pm i}, i = \overline{1,3} >$, $D =< d_i = u_i \otimes w_1,\ d_{-i} = u_i \otimes w_2,\ i = \overline{1,4} >$.

Вложение α в (4) определим на базисе $\hat{T}_2 \cong L_1$, пользуясь правилом $\alpha(m) = \sum_{r \in |\Sigma|} (r, m) r, m \in \hat{T}_2$:

$$\begin{aligned} \alpha(e_1 - e_2) &= d_3 - d_4 - d_{-3} + d_{-4} + f_1 - f_2 - f_{-1} + f_{-2}, \\ \alpha(e_2 - e_3) &= -d_2 + d_4 + d_{-2} - d_{-4} + f_2 - f_3 - f_{-2} + f_{-3}, \\ \alpha(e_1 + e_3) &= d_1 - d_4 - d_{-1} + d_{-4} + f_1 + f_3 - f_{-1} - f_{-3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $p : \hat{S} \to F$ – проекция, тогда соотношения $p \circ \alpha(e_1 - e_2) = (u_3 - u_4) \otimes (w_1 - w_2)$, $p \circ \alpha(e_2 - e_3) = (u_4 - u_2) \otimes (w_1 - w_2)$, $p \circ \alpha(e_1 + e_3) = (u_1 - u_4) \otimes (w_1 - w_2)$ показывают, что $\hat{T}_2 \cong I_4 \otimes I_2$, где $I_4,\ I_2$ – ядра пополняющих гомоморфизмов $\varepsilon_i : \hat{S}_i \to \mathbf{Z}, i = 2$ или $i = 4$. Перепишем последовательность (4) в виде:

$$0 \to I_4 \otimes I_2 \to \hat{S}_4 \otimes \hat{S}_2 \oplus F \xrightarrow{\beta} N \to 0. \tag{6}$$

П-модуль N имеет $\mathbf{Z}$-ранг 11 и $N =< \beta(d_{\pm i}), \beta(f_{\pm j}) >$, причем в силу (5) и точности последовательности (6) в качестве базиса N можно взять $\beta(d_4),\ \beta(d_{-i}), i = \overline{1,4}, \beta(f_{\pm j}), j = \overline{1,3}$. Для удобства в дальнейшем $\beta(m)$ будем обозначать как m. Тогда описание действия П на $\hat{S}$ переносится на N, только теперь d_1, d_2, d_3 линейно выражаются через базис N:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_4 + d_{-1} - d_{-4} - f_1 - f_3 + f_{-1} + f_{-3}, \\ d_2 &= d_4 + d_{-2} - d_{-4} + f_2 - f_3 - f_{-2} + f_{-3}, \\ d_3 &= d_4 + d_{-3} - d_{-4} - f_1 + f_2 + f_{-1} - f_{-2}. \end{aligned}$$

В силу очевидного равенства $H^1(\pi_1, N) = H^1(\pi_2, N),\ \pi_1 = g^{-1}\pi_2 g$ достаточно вычислить бирациональные инварианты тора T_2 для следующих подгрупп группы $\mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_2$:

Таблица 1

N	система образующих	N	система образующих
1	$< (1)(2)(3)(4) \times (12) >$	10	$< (12)(3)(4) \times (1)(2), (1)(2)(34) \times (1)(2) >$
2	$< (12)(3)(4) \times (1)(2) >$	11	$< (12)(34) \times (1)(2), (13)(24) \times (1)(2) >$
3	$< (12)(34) \times (1)(2) >$	12	$< (1234) \times (12) >$
4	$< (12)(3)(4) \times (12) >$	13	$< (12)(3)(4) \times (1)(2), (1)(2)(34) \times (12) >$
5	$< (12)(34) \times (12) >$	14	$< (12)(3)(4) \times (12), (1)(2)(34) \times (12) >$
6	$< (123)(4) \times (1)(2) >$	15	$< (12)(34) \times (1)(2), (13)(24) \times (12) >$
7	$< (12)(3)(4) > \times \mathbf{S}_2$	16	$< (123)(4) \times (12) >$
8	$< (12)(34) > \times \mathbf{S}_2$	17	$< (123)(4) \times (1)(2), (12)(3)(4) \times (12) >$
9	$< (1234) \times (1)(2) >$	18	$< (123)(4) \times (1)(2), (12)(3)(4) \times (12) >$

19	$< (1234) > \times \mathbf{S_2}$	26	$< (123)(4), (12)(3)(4) > \times \mathbf{S_2}$
20	$< (12)(3)(4), (1)(2)(34) > \times \mathbf{S_2}$	27	$A_4 \times < (1)(2) >$
21	$< (12)(34), (13)(24) > \times \mathbf{S}_2$	28	$< (1234), (13)(2)(4) > \times \mathbf{S_2}$
22	$< (1234) \times (1)(2),$ $(13)(2)(4) \times (1)(2) >$	29	$A_4 \times \mathbf{S_2}$
23	$< (1234) \times (12),$ $(13)(2)(4) \times (1)(2) >$	30	$< (12)(3)(4) \times (1)(2),$ $(1)(23)(4) \times (1)(2),$ $(1)(2)(34) \times (1)(2) >$
24	$< (1234) \times (1)(2),$ $(13)(2)(4) \times (12) >$	31	$< (12)(3)(4) \times (12),$ $(1)(23)(4) \times (12),$ $(1)(2)(34) \times (12) >$
25	$< (1234) \times (12),$ $(13)(2)(4) \times (12) >$	32	$\mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_2$

Предложение 1. Пусть π_1 – произвольная подгруппа $\mathbf{S}_4$. Тогда $H^1(\pi, N) = 0$ для подгрупп $\pi \subset \Pi$ одного из следующих типов:

$$1)\pi = \pi_1 \times (1)(2), \quad 2)\pi = \pi_1 \times \mathbf{S}_2.$$

Доказательство. 1) Пусть π тривиально действует на $\hat{S}_2$, тогда π-модуль N содержит пермутационный π-подмодуль $\hat{S}_4 \oplus F =< d_{-i} > \oplus < f_{\pm j} >$. Рассмотрим точную последовательность π-модулей

$$0 \to \hat{S}_4 \oplus F \xrightarrow{\alpha} N \to N_1 \to 0,$$

где α – каноническое вложение, а N_1 – тривиальный π-модуль ранга 1, т.е. $N_1 \cong \mathbf{Z}$. Тогда, используя точность последовательности $H^1(\pi, \hat{S}_4 \oplus F) \to H^1(\pi, N) \to H^1(\pi, \mathbf{Z})$, получаем, что $H^1(\pi, N) = 0$.

2) Пусть $\pi = \pi_1 \times \mathbf{S}_2,\ \pi_1 \subset \mathbf{S}_4$. $H = \pi_1 \times (1)(2)$– нормальная подгруппа π; $\pi/H \cong \mathbf{S}_2$. Используя точную последовательность "ограничение – инфляция"

$$0 \to H^1(\mathbf{S}_2, N^H) \xrightarrow{inf} H^1(\pi, N) \xrightarrow{Res} H^1(H, N)$$

(N^H обозначает подрешетку H-инвариантов), а также доказательство первой части предложения, получаем, что $H^1(\mathbf{S}_2, N^H) = H^1(\pi, N)$. Любой скрещенный гомоморфизм $\varphi \in Z^1(\mathbf{S}_2, N^H)$ определяется своим значением $u \in N^H$ на образующей σ. Так как $\sigma^2 = 1$, то u должно удовлетворять соотношению

$$\sigma u + u = 0. \tag{7}$$

Решения уравнения (7) в $N:\ M =< d_4 - d_{-4}, f_1 - f_{-1}, f_2 - f_{-2}, f_3 - f_{-3} >$. Тогда $Z^1(\mathbf{S}_2, N^H) \cong M^H$. Вычисления M^H для нециклических подгрупп π интересующего нас типа из табл. 1 доказывают, что $M^H = (\sigma - 1)N^H \cong D^1(\mathbf{S}_2, N^H)$, а именно:

Таблица 2

N	M^H
7	$< (\sigma-1)d_4,\ (\sigma-1)(f_1+f_{-2}),\ (\sigma-1)f_3 >$
8	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}),\ (\sigma-1)f_3 >$
19	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}-f_3) >$
20	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}),\ (\sigma-1)f_3 >$
21	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}-f_3) >$
26	$< (\sigma-1)(d_4+f_1+f_{-2}+f_3) >$
28	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}-f_3) >$
29	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}-f_3) >$
32	$< (\sigma-1)(d_4-d_{-4}-f_1-f_{-2}-f_3) >$

Таким образом, для групп $\pi = \pi_1 \times \mathbf{S}_2$

$$H^1(\pi, N) = H^1(\mathbf{S}_2, N^H) = Z^1(\mathbf{S}_2, N^H)/D^1(\mathbf{S}_2, N^H) = 0.\triangle$$

Итак, с учетом того, что $H^1(< g >, N) = H^{-1}(< g >, N) = 0$ (N – вялый модуль), осталось вычислить бирациональные инварианты для 8 (с точностью до сопряженности) подгрупп группы П. Каждая из этих подгрупп π имеет нормальный делитель H индекса 2, $\pi/H =< \sigma >\cong \mathbf{S}_2$, такой, что $H^1(H, N) = 0$. Тогда используя последовательность "ограничение – инфляция", получаем, что $H^1(\pi, N) = H^1(< \sigma >, N^H) = M^H/(\sigma - 1)N^H$, где $M \subset N$ – подрешетка решений уравнения $\sigma u + u = 0$. Результаты вычислений приведены в табл. 3. следующие:

Таблица 3

N	H, σ	$(\sigma-1)N^H, \quad M^H$	$H^1(\pi, N)$
13	$H =< (1)(2)(34) \times (12) >$ $\sigma = (12)(3)(4) \times (1)(2)$	$(\sigma-1)N^H =< (\sigma-1)(d_{-2}-$ $-d_{-1} + f_1 + f_{-1}) >= M^H$	0
14	$H =< (12)(3)(4) \times (12) >$ $\sigma = (12)(34) \times (1)(2)$	$M^H =< d_{-3} - d_{-4} - f_1 + f_{-1},$ $f_1 - f_{-1} + f_2 - f_{-2} >$ $(\sigma-1)N^H =< (\sigma-1)(d_{-4}-$ $-d_{-3} + f_1 - f_{-1} + f_{-3} + f_3),$ $(\sigma-1)(f_1 + f_2) >$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
15	$H =< (13)(24) \times (12) >$ $\sigma = (12)(34) \times (12)$	$(\sigma-1)N^H =< (\sigma-1)(d_4+$ $+d_{-2} - f_{-2}), (\sigma-1)f_2 >= M^H$	0
18	$H =< (123)(4) \times (1)(2) >$ $\sigma = (12)(3)(4) \times (12)$	$(\sigma-1)N^H =< (\sigma-1)d_4,$ $(\sigma-1)(f_1 + f_{-2} + f_3) >= M^H$	0
23	$H =< (1234) \times (12) >$ $\sigma = (13)(2)(4) \times (1)(2)$	$M^H = (\sigma-1)N^H =$ $=< (\sigma-1)f_3, (\sigma-1)f_{-3} >$	0
24	$H =< (1234) \times (1)(2) >$ $\sigma = (13)(2)(4) \times (12)$	$(\sigma-1)N^H =< (\sigma-1)(d_4-$ $-d_{-4} + f_{-1} + f_2 + f_{-3}) >= M^H$	0
25	$H =< (1234) \times (12) >$ $\sigma = (12)(34) \times (1)(2)$	$M^H = (\sigma-1)N^H = 0$	0
31	$H = A_4 \times (1)(2)$ $\sigma = (12)(3)(4) \times (12)$	$M^H = (\sigma-1)N^H = 0$	0

Таким образом, доказан следующий факт.

Теорема 1. *Для* П*-модуля* $\hat{T}_2 \cong I_4 \otimes I_2$ *инвариант* $p(\hat{T}_2)$ *отличен от нуля. Более того, существует единственная с точностью до сопряженности подгруппа* $\pi^* =< (12)(3)(4) \times (12), (1)(2)(34) \times (12) >$ *группы* П, *такая что* $H^1(\pi^*, p(\hat{T}_2)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, *а для всех остальных подгрупп* π *группы* П *когомологический инвариант* $H^1(\pi, p(\hat{T}_2))$ *нулевой.*

Итак, тор T_2 не является стабильно рациональным. Группы N14, 20, 24, 25, 28, 31, 32 из списка, приведенного в табл. 1, содержат подгруппы, сопряженные π^*. Тогда над полями инвариантов $F \subset L$ указанных подгрупп F-торы $T_2 \otimes_k F$ нерациональны. Более того, возможна следующая интерпретация исследований Кунявского по бирациональной характеристике трехмерных торов [10]: для всех остальных подгрупп π L^π-торы $T_2 \otimes_k L^\pi$ рациональны. В частности, существует квадратичное расширение L_1 поля k ($L_1 = L^{\mathbf{S}_4 \times <(1)(2)>}$) такое, что тор $T_2 \otimes_k L_1$ L_1-рационален.

1.3. Бирациональные инварианты тора T_3. Построим вялую резольвенту для П-модуля $\hat{T}_3 \cong L_2$. В решетке $(\hat{T}_3)^0 \cong L_2^0 = L_1$ построим проективный П-инвариантный полный веер Σ.

Пусть $|\Sigma_0| = \{q_{\pm i,\pm j} = \pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 3\}$ – 12 векторов из L_1, на которых Π действует перестановками, а $\Pi_1 =< (1)(2)(34) \times (1)(2), (12)(3)(4) \times (12) >$ – стабилизатор $q_{1,2}$. 6 конусов $\sigma_{\pm i} = (q_{\pm k,\pm n} : (q_{\pm k,\pm n}, e_{\pm i}) = 1),\ i = \overline{1,3}$ и 8 конусов $(q_{i_1,i_2}, q_{i_1,i_3}, q_{i_2,i_3}), i_1 = \pm 1, i_2 = \pm 2, i_3 = \pm 3$ определяют полный Π-инвариантный веер Σ_0. Чтобы получить гладкий проективный веер Σ, разобьем каждый из 6 конусов $\sigma_{\pm i}$ на 4 части. Например, конус $\sigma_3 = (q_{1,3}, q_{2,3}, q_{-1,3}, q_{-2,3})$ разобьем на симплексы, порожденные базисами решетки L_1: $(q_{1,3}, q_{2,3}, 2e_3)$, $(q_{-1,3}, q_{2,3}, 2e_3)$, $(q_{1,3}, q_{-2,3}, 2e_3)$, $(q_{-1,3}, q_{-2,3}, 2e_3)$. Таким образом, к уже имеющимся ребрам Σ_0 прибавляются 6 лучей, порожденных примитивными векторами $f_{\pm i} = \pm 2e_i,\ i = \overline{1,3}$. Полученный веер Σ, проективный и гладкий, состоит из 32 конусов. Как обычно, X_Σ – $\mathbf{Z}$-схема Демазюра для веера Σ. Тогда вялая резольвента Π-модуля $\hat{T}_3$ имеет вид:

$$0 \to \hat{T}_3 \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \to Pic X_\Sigma \to 0, \tag{8}$$

где $\hat{S}$ – пермутационный Π-модуль, порожденный ребрами веера Σ. $\hat{S} = Q \oplus F$. $Q = \mathbf{Z}[\Pi/\Pi_1]$. Вложение α в (8) определим на базисе $\hat{T}_3 \cong L_2$:

$$\alpha(e_1) = q_{1,2} + q_{1,3} + q_{1,-2} + q_{1,-3} - q_{-1,-2} - q_{-1,-3} - q_{-1,2} - q_{-1,3} + 2f_1 - 2f_{-1},$$

$$\alpha(e_2) = q_{1,2} + q_{2,3} - q_{1,-2} + q_{2,-3} - q_{-1,-2} - q_{-2,-3} + q_{-1,2} - q_{-2,3} + 2f_2 - 2f_{-2},$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3)\right) = q_{1,2}+q_{1,3}+q_{2,3}-q_{-1,-2}-q_{-1,-3}-q_{-2,-3}+f_1-f_{-1}+f_2-f_{-2}+f_3-f_{-3}.$$

Так как $\hat{T}_2 \cong I_4 \otimes I_2$ и $\hat{T}_2^0 \cong \hat{T}_3$, то $\hat{T}_3 \cong (I_4 \otimes I_2)^0 = J_4 \otimes J_2$, где $J_i = \hat{S}_i/\mathbf{Z}$ – модули Шевалле. Перепишем последовательность (8) в виде:

$$0 \to J_4 \otimes J_2 \to Q \oplus F \xrightarrow{\beta} N' \to 0. \tag{9}$$

Π-модуль N' имеет $\mathbf{Z}$-ранг 15 и $N =< \beta(q_{\pm i,\pm j}), \beta(f_{\pm l}) >$. Как и раньше, для удобства в дальнейшем $\beta(m)$ будем обозначать как m. Тогда описание действия Π на $\hat{S}$ переносится на N', только теперь $q_{-1,3}, q_{-2,3}, f_{-3}$ линейно выражаются через базис N':

$$\begin{gathered} q_{-1,3} = q_{1,2} + q_{1,3} + q_{1,-2} + q_{1,-3} - q_{-1,-2} - q_{-1,-3} - q_{-1,2} + 2f_1 - 2f_{-1}, \\ q_{-2,3} = q_{1,2} + q_{2,3} - q_{1,-2} + q_{2,-3} - q_{-1,-2} - q_{-2,-3} + q_{-1,2} + 2f_2 - 2f_{-2}, \\ f_{-3} = q_{1,2} + q_{1,3} + q_{2,3} - q_{-1,-2} - q_{-1,-3} - q_{-2,-3} + f_1 - f_{-1} + f_2 - f_{-2} + f_3. \end{gathered}$$

Пусть $G = D_4 \times \mathbf{S}_2$ – группа порядка 16, $G =< \sigma_4, \sigma_2 > \times < -1 >$, $\sigma_4^4 = \sigma_2^2 = 1$. Определим действие G на Π-модулях $\hat{T}_2$, $\hat{T}_3$ по следующему правилу:

$$G \cong < (1234) \times (1)(2), (14)(23) \times (12) > \times \mathbf{S}_2 : \hat{T}_2,\ G \cong < (1234), (13)(2)(4) > \times \mathbf{S}_2 : \hat{T}_3.$$

$0 \to I_4 \to \hat{S}_4 \to \mathbf{Z} \to 0$, $0 \to \mathbf{Z} \to \hat{S}_4 \xrightarrow{\gamma} J_4 \to 0$ – точные последовательности $\mathbf{S}_4$-модулей, определяющие модули I_4, J_4. Легко видеть, что G-модули $I_4 \otimes I_2 \cong < u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_4 > \otimes I_2$, $J_4 \otimes J_2 =< b_1 = \gamma(u_1), b_2 = \gamma(u_2), b_3 = \gamma(u_3), b_4 = \gamma(u_4) = -b_1 - b_2 - b_3 > \otimes I_2$ G-изоморфны. Тогда вялые G-модули N, N' подобны, а значит, $H^1(\pi, N) = H^1(\pi, N')$, $\forall \pi \subset G$ Так как $H^1(\pi^*, N) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\pi^* =< (13)(2)(4) \times (12), (1)(3)(24) \times (12) > \cong < \sigma_2\sigma_4^3, \sigma_2\sigma_4 >$, то $H^1(\pi_*, N') = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\pi_* =< (12)(34), (14)(23) > \times (1)(2)$. Для остальных подгрупп π группы G $H^1(\pi, N') = 0$.

Аналогично рассматривая действие группы $G_1 = \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_2$ на $\hat{T}_2$, $\hat{T}_3$ ($G_1 \cong < (123)(4), (12)(3)(4) > \times \mathbf{S}_2$), получаем, что G_1-модули $\hat{T}_2 =< u_1 - u_4, u_2 - u_4, u_3 - u_4 > \otimes I_2$, $\hat{T}_3 =< b_1, b_2, b_3 > \otimes I_2$ G_1-изоморфны, а значит, $H^1(\pi, N) = H^1(\pi, N') = 0$, $\forall \pi \subset$

G_1. Отсеивая из списка табл. 1 все рассмотренные группы, получаем, что осталось вычислить когомологический инвариант тора T_3 для подгрупп N 27, 29 – 32.

Пусть $\pi = A_4 \times <(1)(2)> = <\sigma_3, \sigma_2> = <(1)(234) \times (1)(2), (12)(34) \times (1)(2)>$. Так как $H^1(<\sigma_3>, N') = H^{-1}(<\sigma_3>, N') = 0$, то можно выбрать в каждом классе в $Z^1(\pi, N')$ 1-коцикл φ такой, что $\varphi(\sigma_3) = 0$. Тогда в силу соотношений $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_3\sigma_2) = \varphi(\sigma_2)$, $\sigma_2^2 = \sigma^3 = 1$ значение $u = \varphi(\sigma_2)$ должно удовлетворять уравнениям: $(\sigma_2+1)u = 0$, $(1+\sigma+\sigma^2)u = 0$. Решения этих уравнений в $N' : < u_1 = q_{1,2}+q_{1,-3}+q_{2,-3}-q_{-1,-2}-q_{-2,-3}-q_{-1,-3}$, $u_2 = f_{-1}+f_{-2}-f_1-f_3$, $u_3 = q_{1,-2}-q_{-1,2}+f_1-f_{-1} >$. Скрещенные гомоморфизмы, определяемые равенствами $\varphi_i(\sigma_2) = u_i$, $i = \overline{1,2}$ – главные: $\varphi_1(g) = (g-1)(q_{-1,-2}+q_{-1,-3}+q_{-2,-3})$, $\varphi_2(g) = (g-1)(f_1+f_2+f_3)$. 1-коцикл φ_3, определяемый значением u_3, не является главным, но $2\varphi_3(g) = (g-1)(q_{1,2}-q_{2,-3}+2q_{-1,2}-q_{-1,-2}+q_{-2,-3}+f_1+f_{-1}-2f_2+2f_{-2})$. Таким образом, $H^1(\pi, N') = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Для оставшихся групп π из тривиальности когомологических инвариантов для их силовских 2- и 3-подгрупп следует, что $H^1(\pi, N') = 0$.

Итак, доказана теорема.

Теорема 2. *Для* Π*-модуля* $\hat{T}_3 \cong J_4 \otimes J_2$ *инвариант* $p(\hat{T}_3)$ *отличен от нуля, так как*

$$H^1(\pi_*, p(T_3)) = H^1(A_4 \times <(1)(2)>, p(T_3)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Таким образом, тор T_3 не является стабильно рациональным. Подгруппа $\pi_* \subset A_4 \times <(1)(2)>$ содержится в группах N 11, 21, 22, 25, 27 – 32. Тогда над полями инвариантов F указанных групп F-торы $T_3 \otimes_k F$ нерациональны. Для остальных подгрупп π группы Π уже упомянутые исследования Кунявского [10] доказывают рациональность торов $T_3 \otimes_k L^\pi$. В частности, минимальное поле (с точностью до сопряженности), над которым тор T_3 рационален, – $L_1 = L^{\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_2}$ – ненормальное расширение поля k 4-й степени.

2. Бирациональные инварианты максимального тора связной полупростой алгебраической группы типа F_4

Пусть G – связная полупростая группа, определенная над полем k, с системой корней $R = R(G)$ типа F_4 . $T_4 \subset G$ – максимальный тор без аффекта, т.е. $\hat{T}_4 = P(R) = Q(R)$, $\Pi = W(R) = A(R)$, Π – группа Галуа минимального поля разложения L тора T_4. Пусть $E_4 = \mathbf{R}^4$ – евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Известно [9], что решетка корней $Q(R)$ может быть реализована как решетка $L_2 \subset E_4$. Действие $W(R)$ на L_2 продолжается до действия на E_4. Матричное представление $W(R)$, вычисленное в базисе решетки L_0, содержит группу целочисленных автоморфизмов квадратичной формы $f_0 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ – $O(4, f_0)$–, т.к. эта группа сохраняет систему корней R. Вычислим W_4 – матричное представление $W(R)$ в базисе $e_1, e_2, e_3, \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ решетки L_2. Докажем прежде следующий факт.

Предложение 2. Пусть $W \subset GL(E_n)$ – максимальная подгруппа ортогональных преобразований $E_n = \mathbf{R}^n$, сохраняющих решетку L_2. Тогда матричное представление группы W_{L_2}, вычисленное в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{2}(e_1+e_2+\ldots+e_n)$ решетки L_2, есть максимальная конечная подгруппа в $GL(n, \mathbf{Z})$, сохраняющая форму $f_1 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1x_n+x_2x_n+\ldots x_{n-1}x_n$. Более того, W_{L_2} $\mathbf{Q}$-сопряжена группе целочисленных автоморфизмов $O(n, f_0)$ формы $f_0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, если $n \neq 4$ и $W_{L_2} = W_4$, если $n = 4$.

Доказательство. Зафиксируем базис решетки $L_2 : e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$. Матричное представление группы W, вычисленное в базисе решетки L_0, есть максимальная подгруппа $W_{L_0} = O(n, \mathbf{Q})$ такая, что $T^{-1} W_{L_0} T \subset GL(n, \mathbf{Z})$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Очевидно, что $O(n, f_0) \subset W_{L_0}$. Выясним, верно ли равенство $O(n, f_0) = W_{L_0}$. Пусть $X = ||x_{ij}|| \in W_{L_0} \setminus O(n, f_0)$. $Y = ||y_{ij}|| = T^{-1} X T \in GL(n, \mathbf{Z})$. Справедливы равенства:

$$y_{ij} = x_{ij} - x_{nj},\ 1 \leq i, j \leq n - 1, \tag{10}$$

$$y_{nj} = 2x_{nj},\ 1 \leq j \leq n - 1, \tag{11}$$

$$y_{in} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - x_{nj}),\ 1 \leq i \leq n - 1, \tag{12}$$

$$y_{nn} = \sum_{j=1}^{n} x_{nj}. \tag{13}$$

Учитывая, что столбцы матрицы X образуют ортонормированный базис E_n и по крайней мере один из них имеет нецелые коэффициенты, а также соотношения (10)–(11), получаем, что существует j $(1 \leq j \leq n - 1)$ такой, что $|x_{ij}| = \frac{1}{2}$. Так как $\sum_j x_{ij}^2 = 1$, то $\frac{n}{4} = 1$. Итак, если $n \neq 4$, то наше предположение о несовпадении групп W_{L_0} и $O(n, f_0)$ неверно, т.е. $W_{L_2} = T^{-1} O(n, f_0) T,\ |W_{L_2}| = 2^n n!$.

Рассмотрим случай $n = 4$. Для матрицы X, удовлетворяющей условиям (10)–(13), когда должно выполняться равенство $|x_{ij}| = \frac{1}{2}$. Вообще, каждая матрица $B \in O(4, \mathbf{Q}),\ |b_{ij}| = \frac{1}{2}$ путем преобразований – перестановка строк и умножение строки на -1 (что соответствует умножению B слева на элемент $O(4, f_0)$) – приводится к одной из двух матриц $A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Очевидно, $A_1,\ A_2 \in W_{L_0}$. Тогда $W_{L_0}/O(4, f_0) =< A_1 >\cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\ |W_{L_0}| = |W_{L_2}| = 2^7 3^2$.

Итак, $W_{L_2} \subset GL(n, \mathbf{Z})$ – конечная группа. Так как $T^{-1} O(n, f_0) T \subseteq W_{L_2}$, то по лемме Шура, неприводимая группа W_{L_2} сохраняет единственную с точностью до числового множителя положительно определенную квадратичную форму

$$f_1 = (T\overline{x})^t (T\overline{x}) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \overline{x} =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 x_n + x_2 x_n + \ldots x_{n-1} x_n.$$

Из максимальности W следует, что W_{L_2} есть группа всех целочисленных автоморфизмов формы f_1, т.е. W_{L_2} – максимальная конечная неприводимая подгруппа $GL(n,\mathbf{Z})$.

Известно, что любая конечная максимальная неприводимая группа в $GL(n,\mathbf{Z})$ однозначно определяется своей неприводимой подгруппой. Группа $T^{-1}O(4,f_0)T$ неприводима и содержится в W_4, значит, $W_4 \subset W_{L_2}$. Так как $|W_4| = |W_{L_2}|$, то $W_4 = W_{L_2}$. $\triangle$

Итак, T_4 – тор с максимальной группой разложения. По теореме, доказанной Клячко [4], $H^1(\Pi, p(T_4)) = 0$, для группы $\Pi \cong \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_4 \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ (Π является полупрямым произведением). Вычислим когомологические инварианты для силовских 3- и 2-подгрупп группы Π.

Силовская 3-подгруппа Π_3 группы Π имеет вид $< a, b >= (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$. Зафиксируем в $\hat{T}_4 \cong L_2$ базис $\alpha_1 = e_1,\ \alpha_2 = e_2,\ \alpha_3 = e_3,\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Действие Π_3 на $\hat{T}_4$ имеет вид:

$$(a(\alpha_1), a(\alpha_2), a(\alpha_3), a(\alpha_4)) = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_4);$$

$$(b(\alpha_1), b(\alpha_2), b(\alpha_3), b(\alpha_4)) = (\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4).$$

Пусть $0 \to \hat{T}_4 \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \xrightarrow{\beta} N'' \to 0$ – вялая резольвента Π_3-модуля $\hat{T}_4$. Так как $H^1(< a >, N'') = H^{-1}(< a >, N'') = 0$, то, используя последовательность "ограничение-инфляция", получаем, что $H^1(< b >, N''^{<a>}) = H^1(\Pi_3, N'')$. $\hat{T}_4$ – перестановочный $< a >$-модуль, поэтому $H^1(< a >, \hat{T}_4) = 0$. Тогда с учетом канонической последовательности когомологий имеем точную последовательность $0 \to \hat{T}_4^{<a>} \to \hat{S}^{<a>} \to N''^{<a>} \to 0$. Используя точность последовательности $0 \to H^1(< b >, N''^{<a>}) \to H^2(< b >, \hat{T}_4^{<a>})$ и равенство $H^2(< b >, \hat{T}_4^{<a>}) = \hat{H}^0(< b >, \hat{T}_4^{<a>}) = 0$ ($\hat{T}_4^{\Pi_3} = 0$), получаем, что $H^1(\Pi_3, N'') = 0$.

Силовская 2-подгруппа Π_2 группы Π имеет вид

$$D_4 \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4 \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Построим вялую резольвенту Π_2-модуля $\hat{T}_4$. Проективный, полный, гладкий, Π_2-инвариантный веер Σ в $(\hat{T}_4)^0 \cong L_1$ определяется примитивными векторами

$$|\Sigma| = \{q_{\pm i, \pm j} = \pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \{f_{\pm i} = \pm 2e_i,\ i = \overline{1,4}\} \cup$$

$$\cup \{d_{\pm 1} = \pm(e_1 + e_2 + e_3 + e_4),\ d_{\pm 2} = \pm(e_1 + e_2 + e_3 - e_4),\ d_{\pm 3} = \pm(e_1 + e_2 - e_3 + e_4),$$

$$d_{\pm 4} = \pm(e_1 - e_2 + e_3 + e_4),\ d_{\pm 5} = \pm(e_1 + e_2 - e_3 - e_4),\ d_{\pm 6} = \pm(e_1 - e_2 + e_3 - e_4),$$

$$d_{\pm 7} = \pm(e_1 - e_2 - e_3 + e_4),\ d_{\pm 8} = \pm(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}.$$

Вялая резольвента Π_2-модуля $\hat{T}_4$ имеет вид:

$$0 \to \hat{T}_4 \xrightarrow{\alpha} Q \oplus F \oplus D \xrightarrow{\beta} N'' \to 0.$$

Вялый N''-модуль имеет ранг 44. В качестве базиса N'' возьмем $\{\beta(q_{\pm i, \pm j}),\ \beta(f_{\pm i}),\ \beta(d_{\pm m})\} \setminus \{\beta(q_{i,-4}), i = \overline{1,3},\ \beta(f_4)\}$. Вновь $\beta(m)$ обозначим через m. Тогда описание действия Π_2 на N'' такое же, как и на $Q \oplus F \oplus D$, только

$$q_{1,-4} = q_{-1,4} - (\pm q_{\pm 1,\pm 2} \pm q_{\pm 1,\pm 3} \pm q_{\pm 1,\mp 2} \pm q_{\pm 1,\mp 3} \pm q_{\pm 1,\pm 4} \pm 2f_{\pm 1} \pm$$
$$\pm d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \pm d_{\pm 3} \pm d_{\pm 4} \pm d_{\pm 5} \pm d_{\pm 6} \pm d_{\pm 7} \pm d_{\pm 8}),$$
$$q_{2,-4} = q_{-2,4} - (\pm q_{\pm 1,\pm 2} \pm q_{\pm 2,\pm 3} \pm q_{\pm 2,\pm 4} \pm q_{\mp 1,\pm 2} \pm q_{\pm 2,\mp 3} \pm 2f_{\pm 2} \pm$$
$$\pm d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \pm d_{\pm 3} \mp d_{\pm 4} \pm d_{\pm 5} \mp d_{\pm 6} \mp d_{\pm 7} \mp d_{\pm 8}),$$
$$q_{3,-4} = q_{-3,4} - (\pm q_{\pm 1,\pm 3} \pm q_{\pm 2,\pm 3} \pm q_{\pm 3,\pm 4} \pm q_{\mp 1,\pm 3} \pm q_{\mp 2,\pm 3} \pm 2f_{\pm 3} \pm$$
$$\pm d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \mp d_{\pm 3} \pm d_{\pm 4} \mp d_{\pm 5} \pm d_{\pm 6} \mp d_{\pm 7} \mp d_{\pm 8}),$$
$$f_4 = f_{-4} - (\pm q_{\pm 1,\pm 2} \pm q_{\pm 1,\pm 3} \pm q_{\pm 1,\pm 4} \pm q_{\pm 2,\pm 3} \pm q_{\pm 2,\pm 4} \pm q_{\pm 3,\pm 4} \pm$$
$$\pm f_{\pm 1} \pm f_{\pm 2} \pm f_{\pm 3} \pm 2d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \pm d_{\pm 3} \pm d_{\pm 4} \mp d_{\pm 8}).$$

$$\pi = < \sigma_4, \sigma_2 > = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4 \text{ –}$$

подгруппа Π_2 индекса 2. Вычислим $H^1(\pi, N'')$. Так как $H^1(<\sigma_4>, N'') = H^{-1}(<\sigma_4>, N'') = 0$, то можно выбрать в каждом классе в $Z^1(\pi, N'')$ 1-коцикл φ такой, что $\varphi(\sigma_4) = 0$. Тогда в силу соотношений $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_2\sigma_4) = \varphi(\sigma_2)$, $\sigma_2^2 = \sigma^8 = 1$ значение $u = \varphi(\sigma_2)$ должно удовлетворять уравнениям: $(\sigma_2+1)u = 0$, $(\sum_{i=0}^{7}\sigma^i)u = 0$. Решения этих уравнений в $N'' : < u_1 = d_1 - d_{-8},\ u_2 = d_8 - d_{-1},\ u_3 = d_3 - d_{-6},\ u_4 = d_6 - d_{-3},\ u_5 = d_2 - d_{-7} + d_7 - d_{-2},\ u_6 = d_4 - d_{-5} + d_5 - d_{-4},\ u_7 = d_2 - d_{-7} + d_4 - d_{-5},\ u_8 = q_{1,3} - q_{-1,3},\ u_9 = q_{-1,-3} - q_{1,-3},\ u_{10} = q_{1,4} - q_{-1,4} + q_{-1,2} - q_{1,-2},\ u_{11} = q_{1,2} + q_{1,-3} - q_{-1,-2} - q_{-1,3} >$. Скрещенные гомоморфизмы, определяемые равенствами $\varphi_i(\sigma_2) = u_i,\ i = \overline{1,7}$, – главные, так как $u_i \in D$, а D – пермутационный Π_2-модуль. Скрещенные гомоморфизмы, определяемые равенствами $\varphi_i(\sigma_2) = u_i,\ i = \overline{8,11}$, также главные:

$$\varphi_8(g) = (g-1)(-q_{-1,-3} - q_{-2,-4}),\ \ \varphi_9(g) = (g-1)(-q_{1,3} - q_{2,4}),$$

$$\varphi_{10}(g) = (g-1)(-2q_{1,4} - q_{1,3} - 2q_{1,2} - 2q_{2,4} - 3q_{2,3} - 3q_{3,4} + q_{1,-3} + q_{1,-2} + q_{-1,-3} +$$
$$+ 2q_{-2,-4} + q_{-2,-3} + + q_{-3,-4} - q_{-1,4} - q_{-1,3} - 2q_{-1,2} - q_{-2,3} - q_{-3,4} + 2f_1 + 2f_{-1} +$$
$$+ 4f_{-2} + 4f_{-3} + 4f_{-4} \pm \pm 3d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \pm d_{\pm 3} \pm d_{\pm 4} \mp d_{\pm 5} \mp d_{\pm 6} \mp d_{\pm 7} \mp 3d_{\pm 8}),$$
$$\varphi_{11}(g) = (g-1)(q_{1,4} + q_{1,3} + q_{1,2} + 2q_{2,4} + 2q_{2,3} + 2q_{3,4} - q_{1,-3} -$$
$$- q_{1,-2} - q_{-1,-3} - 2q_{-2,-4} - q_{-2,-3} - - q_{-3,-4} + q_{-1,4} + q_{-1,3} + 2q_{-1,2} + q_{-2,3} +$$
$$+ q_{-3,4} - 2f_1 - 2f_{-1} - 4f_{-2} - 4f_{-3} - 4f_{-4} \pm \pm 3d_{\pm 1} \pm d_{\pm 2} \pm d_{\pm 3} \pm d_{\pm 4} \mp d_{\pm 5} \mp d_{\pm 6} \mp d_{\pm 7} \mp 3d_{\pm 8}).$$

Таким образом, $H^1(\pi, N'') = 0$. Используя последовательность "ограничение-инфляция", получаем, что

$$H^1(\Pi_2, N'') = H^1(<\tau>, (N'')^{\pi}),\ <\tau> = \Pi_2/\pi \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Так как τ тривиально действует на $(N'')^{\pi} = < \sum_{i=1}^{8} d_{\pm i},\ q_{1,4} + q_{1,2} + q_{2,4} + q_{2,3} + q_{3,4} + q_{2,-4} - q_{-2,-4} + q_{-1,4} + q_{-1,2} + q_{-3,4} - f_1 - f_{-1} - 2f_{-2} - f_{-3} - f_3 - 2f_{-4} \pm \pm d_{\pm 1} \pm d_{\pm 3} \mp d_{\pm 6} \mp d_{\pm 8} >$, то $H^1(\Pi_2, N'') = H^1(<\tau>, (N'')^{\pi}) = 0$. Итак,

$$H^1(\Pi_3, p(T_4)) = H^1(\Pi_2, p(T_4)) = 0.$$

В заключение хотелось бы отметить, что мы предполагаем в будущем продолжить данную работу и исследовать полностью случай 4-х мерных решеток Галуа.

Автор искренне признателен Валентину Евгеньевичу Воскресенскому за внимательное руководство данной работой.

Литература

[1] Borel A. Linear algebraic groups. N.Y.; Amsterdam, 1969.

[2] Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.

[3] Воскресенский В.Е. Проективные инвариантные модели Демазюра // Известия АН СССР. серия математическая, 1982. Т.46:2. С. 195–210.

[4] Клячко А.А. Торы без аффекта в полупростых группах // Арифметика и геометрия многообразий. Куйбышев. 1989. С.67–78.

[5] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э. О максимальных торах в полупростых алгебраических группах. Куйбышев. 1984. Деп. в ВИНИТИ 5.03.84, N1269.

[6] Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, I, II // *Вестник СамГУ*. 1997. N2. С.18–98. N4. С.5–67.

[7] Рышков С.С. Максимальные конечные группы целочисленных $n \times n$ матриц // Труды МИАН им. Стеклова. 1972. Т.128. С.183–211.

[8] Plesken W., Pohst M.. On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$ // Math. of computations. 1977. V.31. N138. P.534–551.

[9] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Системы корней. М.: Мир, 1972.

[10] Кунявский Б.Э. О трехмерных алгебраических торах. Исследования по теории чисел. Саратовский ун-т, Саратов. 1987, С.90-111.

GALOIS LATTICES AND THEIR BIRATIONAL INVARIANTS

S.Yu. Popov [2]

The Picard class $p(\hat{T})$ of a torsion–free Π-module of finite $\mathbf{Z}$-rank is a very important algebraic invariant. It defines an algebraic torus T up to stable equivalence. Practical computation of the invariant $p(\hat{T})$ is presently in incipient stage. In this paper, birational invariants $\{H^1(ß; p(\hat{T})\}_{\pi \subset \Pi}$ are calculated, here $\hat{T}$ is a Π-module of low $\mathbf{Z}$-rank.

[2] Popov Sergei Yurjevich, dept. of math. Samara state university