ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ

Б.В. Логинов [1]

Дан обзор исследований автора по использованию непрерывной и дискретной групповой симметрии для построения и исследования уравнения разветвления при стационарной бифуркации и бифуркации Андронова – Хопфа. Обосновывается наибольшая эффективность в этом направлении методов группового анализа дифференциальных уравнений (РЖ Мат 1978 11Б883К). Показано, что методы теории ветвления (уравнение разветвления в корневом подпространстве, диаграмма Ньютона) позволяют исследовать устойчивость разветвляющихся решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной (РЖ Мат 1992 7Б916). Рассмотрены приложения к задачам о нарушении симметрии (теория фазовых переходов, поверхностные волны).

Состояние теории ветвления решений нелинейных уравнений к началу 70-х годов отражено в [1]. Эта книга содержит различные аспекты теории ветвления: варианты процедуры Ляпунова-Шмидта сведения общей задачи теории ветвления к эквивалентным системам разветвления (уравнению разветвления (УР)) с детальным исследованием соответствия между малыми решениями первоначального нелинейного уравнения и УР, последовательное использование аппарата обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) и метода диаграммы Ньютона, а также основанный на подготовительной теореме Вейерштрасса кронекеровский метод исключения, многие приложения к задачам теории возмущений и математической физики. Случай многомерного ветвления не получил окончательного решения и в наши дни.

В многомерном ветвлении нелинейное уравнение нередко имеет семейства малых решений, зависящие от одного или нескольких параметров. Как правило эти параметры имеют групповой смысл - нелинейное уравнение инвариантно относительно некоторой группы преобразований. Случай присутствия негрупповых параметров в физике называется случайным вырождением [2]. Для краевых задач групповая симметрия обычно обусловлена симметрией области. Так, уравнения, заданные в пространственном бесконечном слое инвариантны относительно двумерной группы сдвигов. Если же задача рассматривается на некотором $(k-1)$-мерном многообразии в R^k, то она является инвариантной относительно группы симметрии этого многообразия. При вычислении асимптотики семейств разветвляющихся решений групповая инвариантность упрощает построение и исследование эквивалентного нелинейной задаче УР.

[1]Логинов Борис Владимирович, кафедра высшей математики Ульяновского технического университета

Первые результаты использования групповой симметрии в теории ветвления принадлежат В.И.Юдовичу [3,4], рассмотревшему "один случай ветвления при наличии кратного спектра" с приложениями к вычислению вторичных стационарных течений жидкости между вращающимися в одну сторону цилиндрами. Впоследствии они были применены учениками В.И.Юдовича при решении ряда задач гидродинамики. Последовавшее развитие теории ветвления в условиях групповой инвариантности содержится в [5,6], где был предложен метод группового расслоения для построения редуцированного УР (см. обширную библиографию в монографии [7] – обзоре результатов по 1980 год). В частности, в [8,9] доказана теорема о наследовании групповой симметрии нелинейной задачи соответствующим УР. Предложены различные способы редукции УР, в том числе с помощью полной системы функционально независимых инвариантов группы с многими приложениями к задачам математической физики [7].

С середины 70-х годов симметричные методы в теории ветвления развиваются независимо западными и советскими математиками. Теорема о наследовании была доказана позднее и применена к задаче Бенара в [10-12]. В [11] она использована в задачах о нарушении симметрии для определения главной части УР. Эти результаты об образовании структур в бифуркационных задачах были также получены в [13-15] и применены в [14,15] к задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла.

Наиболее общий результат о существовании бифуркации вблизи собственного значения нечетной кратности аналитической оператор-функции спектрального параметра доказан Н.А.Сидоровым и В.А.Треногиным [16,17], применившими теорию степени отображения непосредственно к УР. В эквивариантной теории ветвления он позволил получить [18,19] теоремы существования решений, инвариантных относительно подгрупп, в частности нормальных делителей – наиболее общий результат "леммы об эквивариантном ветвлении" [20-22].

В 80-х годах были опубликованы содержащие многочисленные приложения монографии А.Вандербауведе [21], М.Голубицкого, И.Стюарта и Д.Шеффера [23,24]. Они дают детальный обзор результатов западных математиков по эквивариантной теории ветвления. Основным средством исследований в [23,24] явилась теория особенностей гладких отображений. Однако по нашему мнению развиваемые А.Д.Брюно [25] методы многогранника Ньютона более перспективны и позволяют исследовать УР при любых порядках n вырождения линеаризованного оператора.

Теорема о наследовании групповой симметрии открыла новый подход в эквивариантной теории ветвления – использование методов группового анализа дифференциальных уравнений [26,27]. Эти методы позволили решить задачу построения общего вида УР по наследуемой им группе симметрии [28-40] как в стационарном [1], так и в нестационарном [41-46] ветвлении.

Часть результатов данного обзора поддержана Грантовым Центром НГУ (Грант N 23-98).

1. Нелинейные уравнения, инвариантные относительно группы преобразований

В банаховых пространствах E_1 и E_2 рассматривается уравнение

$$Bx = R(x, \lambda), \quad R(0,0) = 0, \quad R_x(0,0) = 0, \tag{1}$$

где $B : E_1 \to E_2$ – нетеров оператор с d-характеристикой (n, m); $R(x, \lambda)$ достаточно гладкий нелинейный оператор, отображающий окрестность нуля в $E_1 \dot{+} \Lambda$ в окрестность нуля в E_2; $\lambda \in \Lambda$ – числовой параметр.

Определение 1. Уравнение (1) инвариантно относительно группы G (эквивариантно $\equiv$ допускает группу G), если существуют ее представления L_g и K_g соответственно в пространствах E_1 и E_2 такие, что для любого $g \in G$

$$BL_g x = K_g Bx, \quad R(L_g x, \lambda) = K_g R(x, \lambda). \tag{2}$$

Подпространство $E_1^n = N(B)$ инвариантно относительно операторов L_g, а область значений $R(B) = E_{2,\infty-m}$ - относительно K_g. Если уравнение (1) допускает группу G,то вместе с x при любом $g \in G$ его решением является также $L_g x$.

Группа K_g иногда оказывается более узкой по сравнению с L_g. Если G – конечная группа, то порядок K_g является делителем порядка L_g, для непрерывной группы G операторы K_g могут зависеть от меньшего числа параметров. Случается, что $K_g \equiv I$-тривиальное представление. Можно считать, что отображение $L_g : G \to L(E_1, E_1)$ является локальным изоморфизмом, тогда как отображение $K_g : G \to L(E_2, E_2)$,вообще говоря, есть локальный гомоморфизм.

Следующие два предположения служат основой развитого в [5,6] метода группового расслоения.

Условие I. Подпространство $E_1^{\infty-n} = (I-P)E_1$ инвариантно относительно операторов L_g.

Замечание 1. Если G – компактная группа, то биортогональную к $\{\varphi_i\}_1^n$ систему $\{\gamma_j\}_1^n$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие I [7,47].

Условие I означает, что представление L_g вполне приводимо прямыми слагаемыми E_1^n и $E_1^{\infty-n}$ и выполнено равенство $PL_g = L_g P$. Оно равносильно инвариантности линейной оболочки $\mathbf{\Gamma} = span\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ относительно операторов L_g^*. Аналогично, инвариантность подпространства $E_{2,\infty-m} = R(B)$ относительно K_g равносильна инвариантности дефектного подпространства $N^*(B)$ относительно операторов K_g^*.

Пусть $L(a), a \in D \subset R^l$, l-параметрическая непрерывная группа операторов, действующих в E_1. Подпространство (многообразие) $M \subset E_1^n$ назовем порождающим траекторию $O(\varphi_0) = \{L(a)\varphi_0 | a \in D \subset R^l\}$, если оно содержит некоторую точку этой траектории. В случае инвариантности уравнения (1) относительно непрерывной группы основным моментом для понижения порядка (редукции УР) является предположение о том, что, двигаясь по траектории произвольного элемента $\varphi_0 \in N(B)$ группы L_g, можно его перевести на некоторое многообразие в $N(B)$ меньшей чем n размерности, трансверсальное траекториям.

Условие II. В E_1^n существует полная минимальная система $\mathcal{M}$ порождающих подпространств (многообразий) $M_j, j = 1, ..., p, dimM_j \leq l_1, n - l_1 \leq l$ такая, что для любого $\varphi \in E_1^n$ найдутся $a \in D \subset R^l$ и число j такие, что $L(a)\varphi \in M_j$.

Условие II использовалось Э.Картаном [48] для реперирования геометрических объектов в теории конечных непрерывных групп и дифференциальной геометрии.

Если минимальная система $\mathcal{M}$ порождающих подпространств состоит только из одного порождающего подпространства $M_0, dimM_0 = l_1$, то будем говорить, что группа G действует в E_1^n l_1-стационарно. В этом случае можно доказать, что в E_1^n существует базис $\{\varphi_i\}_1^n$, в котором для любого $\varphi = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \in E_1^n$ найдутся $a \in D$ и инварианты $r_1 = I_1^L(\xi), \cdots, r_{l_1} = I_{l_1}^L(\xi)$ такие, что $L(a)\varphi = \sum\limits_{j=1}^{l_1} r_j \varphi_j$.

Приведем примеры.

$\mathbf{1^0}$. Из аналитической геометрии известно, что при действии группы движений плоскости размерность линейной комбинации функций $1, x, y, x^2, xy, y^2$ может быть понижена до трех, т.е. в условии II для данного случая $n = 6, l = 3, l_1 = 3$, однако группа движений плоскости в линейной оболочке E_1^6 этих функций не действует l^1-стационарно.

$\mathbf{2^0}$. Для гиперболического поворота в R^2 система порождающих многообразий состоит из осей координат и четырех лучей,направленных по биссектрисам координатных углов.

$\mathbf{3^0}$. В R^3 группа вращений $SO(3)$ действует 1-стационарно. Число параметров группы $l = 3$, каждая точка R^3 имеет стационарную подгруппу, $l_1 = 1$ и выполнено неравенство $n - l_1 < l$.

$\mathbf{4^0}$. Более сложный пример: E_1^{2l+1} имеет базис,состоящий из сферических функций $P_l^m(\cos\theta)\{{\cos m\varphi \atop \sin m\varphi}, m = 1, ..., l$, в E_1^{2l+1} действует представление веса $l \geq 1$ группы вращений $SO(3)$. В [49] показано, что порядок произвольной линейной комбинации этих функций действием представления группы $SO(3)$ может быть понижен с $2l+1$ до $2l-1$, причем система порождающих многообразий здесь может быть выбрана так, что группа действует в E_1^{2l+1} $(2l-1)$-стационарно.

Т е о р е м а 1 (редукция УР по неизвестным). Пусть уравнение (1) допускает l-параметрическую непрерывную группу $L(a), n \geq 2$ и выполнены условия I,II. Тогда малые решения (1) представимы в виде l-параметрических семейств $x = L(a)x^{(j)}$, где $x^{(j)}$ – общее малое решение (1) в подпространстве $M_j \dot{+} E_1^{\infty-n}$.

Действительно, для каждого $x = u + v, u \in E_1^{\infty-n}, v \in E_1^n$ по условию II существует $a = a(x) \in D$, такое что соответствующий элемент $v' = L(a)v$ принадлежит некоторому подпространству $M_{j_0} \in \mathcal{M}$. В то же время $u' = L(a)u \in E_1^{\infty-n}$ и уравнение (1) редуцируется к уравнению $B'x' = R(x', \lambda)$,где $B' = B|_{M_{j_0}\dot{+}E_1^{\infty-n}}$.

Т е о р е м а 2 (редукция УР по уравнениям). Пусть $n \geq 2$ и подпространство $E_{2,m}$ инвариантно относительно k-параметрической непрерывной группы $K(a), a \in D \subset R^l$, действующей в нем k_1-стационарно. Тогда УР можно редуцировать к системе k_1 уравнений с n неизвестными.

Действительно, в силу k_1-стационарности действия группы $K(a)$ в $E_{2,m}$ УР $f(\xi, \lambda) = \sum\limits_{k=1}^{m} < R(x(\xi, \lambda), \lambda), \psi_k > z_k = 0$ можно переписать в виде системы

$$I_j^K(f_1(\xi, \lambda), \cdots, f_m(\xi, \lambda)) = 0, \quad j = 1, \cdots, k_1. \tag{3}$$

С л е д с т в и е. Теорема 2 остается справедливой для группы преобразований $K(a)$ имеющей полную систему функционально независимых инвариантов $\{I_j^K(\xi)\}_1^{k_1}$.

В монографии [7] дан обзор результатов по применению группового расслоения в приложениях к нелинейным задачам математической физики. Это уравнение $\Delta u + \lambda u = f(u) = a_2u^2 + a_3u^3 + \cdots$ на сфере S^2 ([49], где доказана $(2l-1)$-стационарность действия представления группы $SO(3)$ в линейной оболочке сферических функций порядка l) и на s-мерной компактной гиперповерхности $\sum$ в R^s с краем или без края [50], задача о фигурах равновесия цилиндрического столба вязкой капиллярной жидкости в условиях невесомости [51], а также задачи о нарушении симметрии: построение периодических решений трехмерной задачи о капиллярно-гравитационных волнах в слое жидкости над ровным дном [52-54] и задача о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла [13-15].

З а м е ч а н и е 2. Запись нелинейного уравнения в виде (1) по существу сводит применение изложенной теории только к задачам о точках бифуркации. В общем случае инвариантности $K_g F(x,\lambda) = F(L_g x,\lambda)$ нелинейного уравнения групповая симметрия линеаризованного оператора выражается равенством $K_g F_x(x,\lambda) = F_x(L_g x,\lambda)L_g$. Соответствующая теория использования групповой симметрии и методов группового анализа содержится в работах [55,56,57].

2. Наследственная групповая инвариантность УР

Более удобной практически является двойственная (координатная) трактовка возможностей группового расслоения,основанная на теореме о наследовании уравнением разветвления групповой симметрии нелинейной задачи.

2.1. Уравнение разветвления в корневом подпространстве

Уравнение разветвления, полученное при использовании сужения $\hat{B} : E_1^{\infty-n} \to E_{2,\infty-m}$ оператора B, мы обозначаем далее $f_k(\xi,\lambda) = 0, k = 1,\cdots,m$, а УР для фредгольмова случая, полученное на основе леммы Шмидта

$$\Gamma = \breve{B}^{-1} = \left[B + \sum_{j=1}^{n} < \cdot,\gamma_j > z_j\right]^{-1}, \quad t_k(\xi,\lambda) = 0, k = 1,\cdots,n.$$

Пусть преобразования L_g в инвариантном подпространстве E_1^n действуют согласно формуле

$$L_g\varphi_i = \mathcal{A}'_g\varphi_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}(g)\varphi_j, \qquad \mathcal{A}_g = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{n}. \tag{1}$$

Тогда для любого $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi_i\varphi_i$ в координатном пространстве Ξ^n имеем

$$\tilde{\xi}_i = (\mathcal{A}_g\xi)_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(g)\xi_j, \quad i = 1,\cdots,n.$$

Аналогично преобразования K_g^* в инвариантном подпространстве $N^*(B)$ определяют равенствами $K_g^*\psi_k = \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_{kj}\psi_j, k = 1,\cdots,m$ представление

$$\mathcal{B}_g = [\beta_{ij}(g)]_{i,j=1}^{m}. \tag{2}$$

Т е о р е м а 1 *[7-9]. Пусть уравнение (1.1) инвариантно относительно группы $G, n, m \geq 1$, во фредгольмовом случае $n \geq 1$ и оператор Шмидта*

$$\breve{B} = B + \sum_{j=1}^{m} < \cdot,\gamma_j > z_j$$

также обладает групповой инвариантностью, выполнено условие I. Тогда УР наследует групповую симметрию (1.1), т.е.

$$f_k(\tilde{\xi},\lambda) = f_k(\mathcal{A}_g\xi,\lambda) = (\mathcal{B}_g f)_k(\xi,\lambda) = \tilde{f}_k(\xi,\lambda), \quad k = 1,\cdots,m; \tag{3}$$

$$t_k(\tilde{\xi},\lambda) = t_k(\mathcal{A}_g\xi,\lambda) = (\mathcal{A}_g t)_k(\xi,\lambda) = \tilde{t}_k(\xi,\lambda), \quad k = 1,\cdots,n. \tag{4}$$

Действительно, согласно условию I и инвариантности подпространства E_1^n, равенство $BL_gx = R(L_gx,\lambda)$ можно записать в виде системы ($x = u+v, u \in E_1^{\infty-n}, v \in E_1^n$)

$$\hat{B}L_gu = (I-Q)R(L_gu+L_gv,\lambda), \quad QR(L_gu+L_gv,\lambda) = 0.$$

В силу групповой инвариантности оператора $\hat{B}$ отсюда следует

$$(I-Q)K_gR(u+v,\lambda) = K_g(I-Q)K_gR(u+v,\lambda).$$

Однако из последнего соотношения, вообще говоря, не вытекает групповая инвариантность проектора Q. По теореме о неявных операторах из первого уравнения системы находим $\tilde{u} = L_gu = u(L_gv,\lambda) = u(\tilde{v},\lambda)$. Подставляя $\tilde{u}$ во второе уравнение, получаем утверждение (3) теоремы. Доказательство (4) для фредгольмова случая аналогично.

Следующие утверждения практически очевидны.

1. Групповая инвариантность оператора Шмидта $\breve{B}$ означает, что представления K_g и L_g эквивалентны.

2. Если оператор Шмидта $\breve{B}$ инвариантен относительно группы G, то условие I эквивалентно инвариантности подпространства $E_{2,n}$ относительно операторов K_g и $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$.

3. Если выполнено условие I и подпространство $E_{2,n}$ инвариантно относительно операторов K_g, то $\breve{B}$ обладает групповой инвариантностью тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$.

4. Пусть выполнено условие I. Оператор Шмидта $\breve{B}$ обладает групповой инвариантностью тогда и только тогда,когда подпространство $E_{2,n}$ инвариантно относительно K_g и $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$.

5. Пусть $E_{2,n}$ инвариантно относительно операторов K_g. Тогда $\breve{B}$ G-инвариантен в том и только в том случае, если выполнено условие I и $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$.

З а м е ч а н и е 1. В работах [58,59] предложены способы построения УР, применимые в общем случае, когда линеаризованный оператор имеет незамкнутую область значений, а оператор F не является дифференцируемым. Используется понятие псевдообратного оператора [60]. Для таких УР в достаточно общих условиях в [58,59] также доказывается теорема о наследственной инвариантности УР.

Мы докажем здесь наследственную групповую инвариантность уравнения разветвления в корневом подпространстве (УРК), играющего определяющую роль в исследовании устойчивости разветвляющихся решений [61-65]. На основе УРК была развита теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении [66] и доказаны теоремы существования точек бифуркации в присутствии одной ОЖЦ нечетной длины [67].

Всякой задаче теории ветвления отвечает оператор-функция $B - A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon) = R_x(0,\varepsilon)$, сопоставляющая этой задаче характеризующую ее обобщенную жорданову структуру (ОЖС). В общем случае аналитической оператор-функции $B-A(\varepsilon) = B-\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon^iA_i$ (где A_i – линейные ограниченные операторы из E_1 в E_2) полный обобщенный жорданов набор (ОЖН) определяется условиями

$$B\varphi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1}A_j\varphi_i^{(s-j)}, <\varphi_i^{(s)},\gamma_j> = 0(\varphi_i^{(s)} \in E_1^{\infty-n}), s = 2,\cdots,p_i, \qquad (5)$$

$$D = \det[< \sum_{j=1}^{p_k} A_j \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \psi_i >] \neq 0.$$

Если оператору $B - A(\varepsilon)$ отвечает полный ОЖН (5), то в качестве базиса $\{z_j\}_1^n$ в $E_{2,n}$ можно принять [1] $z_j = \sum\limits_{k=1}^{p_j} A_k \varphi_j{}^{(p_j+1-k)} \equiv \hat{\varphi}_j{}^{(p_j)}$. Может случиться, что обобщенные жордановы цепочки (ОЖЦ) оборвутся на элементах $\varphi_i^{(p_i)}$ при $D = 0$, т.е. ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{s=\overline{1,p_i};i=\overline{1,n}}$ не полный. Тогда ОЖЦ можно продолжить, произведя перестройку цепочек [1,68-71]. Процесс продолжения заканчивается,если на некотором шаге получается полный ОЖН. В отличие от этого общего случая полный ОЖН, удовлетворяющий [5], назван в [68-71] каноническим, а биортогональная система $\{\varphi_i;\gamma_i\}_1^n$ - канонической парой. Доказано, что если $B - A(\varepsilon)$ имеет полный ОЖН, состоящий из линейно независимых элементов, то существует каноническая пара. В то же время имеется пример аналитической оператор-функции, имеющей каноническую пару, хотя соответствующий канонический ОЖН и не является линейно независимым. Каноническая пара $\{\varphi_i;\gamma_i\}_1^n$ называется биканонической,если пара $\{\hat{\varphi}_i^{(p_i)}, \psi_i^{(1)}\}_1^n$ также является канонической для оператора $B^* - A^*(\varepsilon)$ (соответствующий ОЖН – биканонический). Если кроме, того

$$< \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl}, < z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\gamma_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} A_s^* \varphi_k^{(p_k+2-l-s)}, z_i^{(j)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-j} A_k \varphi_i^{(p_i+2-j-s)}, \tag{6}$$

то ОЖН - триканонический.

В случае линейной оператор-функции спектрального параметра $B - \varepsilon A$ элементы ОЖН линейно независимы и образуют базис корневого подпространства $K(B;A)$, отвечающего точке спектра $\varepsilon = 0 \in \sigma_A(B); dim K(B;A) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = K$ – корневое число. В [68-71] показано, что для линейной оператор-функции ОЖН может быть выбран триканоническим, т.е. справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. Элементы A- и A^*-жордановых наборов оператора $B - \varepsilon A$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия биортогональности:

$$< \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl}, < z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} >= \delta_{ik}\delta_{jl}, j(l) = 1, \cdots, p_i(p_k), \tag{7}$$

$$\gamma_k^{(l)} = A^* \psi_k^{(p_k+1-l)}, z_i^{(j)} = A \varphi_i^{(p_i+1-j)}, i, k = 1, \cdots, n.$$

О п р е д е л е н и е 1. Если $\{\varphi_i;\gamma_i\}_1^n$ является канонической парой G-инвариантной оператор-функции $B - A(\varepsilon)$ и выполнено условие I,то эта пара называется инвариантной канонической (ИКП).

Приведем условие групповой инвариантности оператора Шмидта B, или, что то же, поправки Шмидта $V = \sum\limits_{i=1}^{n} < \cdot, \gamma_i > z_i$ [64,72].

Т е о р е м а 2. Оператор B, допускающий компактную группу G, имеет G-инвариантную поправку Шмидта тогда и только тогда, когда существует оператор-функция $B - A(\varepsilon)$, допускающая группу G и имеющая ИКП.

Н е о б х о д и м о с т ь. Если оператор B имеет инвариантную относительно G поправку Шмидта V, то оператор $B - \varepsilon V$ также инвариантен и имеет ИКП. Действительно, если $\{\varphi_i\}_1^n$ – произвольный базис в $N(B)$, а $\{\gamma_i\}_1^n$ – биортогональная система функционалов, то они образуют ИКП, т.к. $p_i \equiv 1$ и группа G компактна (для компактной группы G биортогональную к $\{\varphi_i\}_1^n$ систему $\{\gamma_i\}_1^n$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие I (замечание 1.1)).

Доказательство *достаточности* содержится в ряде утверждений в [7,§1.3].

1. Если $\{\varphi_i;\gamma_i\}_1^n$ - ИКП, то при любом $g \in G$ пара $\{L_g\varphi_i;(L_g^{-1})^*\gamma_i\}_1^n$ также является инвариантной канонической с ОЖН $\{L_g\varphi_i^{(j)}\}_{j=1}^{p_i}$, причем обе пары порождают одно и то же разложение $E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}$.

2. Если группа G компактна,то матрица $\mathcal{A}_g$ блочно-диагональна, и $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$.

3. Если $\{\varphi_i;\gamma_i\}_1^n$ - ИКП и G компактная группа, то инвариантная поправка Шмидта имеет вид $\sum\limits_{i=1}^n < \cdot, \gamma_i > \hat{\varphi}_i^{(p_i)}$.

Л е м м а 2. Пусть инвариантной относительно компактной группы G оператор-функции $B - A(\varepsilon)$ отвечает полный ОЖН. Тогда $G-$инвариантную поправку Шмидта можно получить усреднением по группе поправки Шмидта

$$V(g) = \sum_{i=1}^n < \cdot, L_{g-1}^*\gamma_i > K_g z_i.$$

Если оператору $B - A(\varepsilon)$ отвечает неполный ОЖН, т.е. элементы $\{\varphi_i\}_1^n$ имеют одну или несколько ОЖЦ бесконечной длины, то усреднение $V(g)$ по группе может привести к нулевому оператору, и G-инвариантная поправка Шмидта может не существовать.

П р и м е р. Пусть $\{e_j\}_1^n$ – полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Определим оператор B равенствами

$$Be_3 = 0,\ Be_{4k-1} = e_{4k-5},\ Be_4 = 0,\ Be_{4k} = e_{4(k-1)} \text{ при } k = 2l,$$
$$Be_{4k-1} = e_{4(k-1)},\ Be_{4k} = e_{4k-5} \text{ при } k = 2l-1,\ l \geq 2; \tag{8}$$
$$Be_1 = e_5,\ Be_{4k+1} = e_{4k+5},\ Be_2 = e_6,\ Be_6 = e_{14}, Be_{4k+2} = e_{4k+14},\ k = 2l,$$
$$Be_{4k+2} = e_{4k-2}, \quad k = 2l+1. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что оператор B инвариантен относительно представления L_g группы квадрата C_{4v}, порожденного на подпространстве (8) операторами $L_1 : (e_{4k-1}, e_{4k}) \to (-e_{4k}, e_{4k-1})$, $s : (e_{4k-1}, e_{4k}) \to (-e_{4k-1}, e_{4k})$, а на подпространстве (9) – отражением $s : (e_{4k+1}, e_{4k+2}) \to (-e_{4k+1}, e_{4k+2})$. Оператор B имеет две I-жордановы цепочки (8) бесконечной длины, начинающиеся с нулей $\varphi_1 = e_3, \varphi_2 = e_4$. Дефектное подпространство имеет базис $\{e_1, e_2\}$. Усреднение по группе поправок Шмидта $V_1x =< x, e_3 > e_1+ < x, e_4 > e_2$ или $V_2x =< x, e_4 > e_1+ < x, e_3 > e_2$ дает нулевой оператор. Симметричной поправки Шмидта не существует.

Введем обозначения вида $\Phi = (\varphi_1^{(1)}, \cdots, \varphi_1^{(p_1)}, \cdots, \varphi_n^{(1)}, \cdots, \varphi_n^{(p_n)})$, удобные для записи следующего утверждения.

Т е о р е м а 3 [65]. Пусть фредгольмовой оператор-функции отвечает полный триканонический ОЖН. Тогда можно определить проекторы

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \gamma_i^{(j)} > \varphi_i^{(j)} =< \cdot, \gamma > \Phi : E_1 \to E_1^K = K(B;A), \tag{10}$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > z_i^{(j)} =< \cdot, \psi > Z : E_2 \to E_{2,K} = span\{z_i^{(j)}\},$$

порождающие следующие разложения в прямые суммы:

$$E_1 = E_1^K \dot{+} E_1^{\infty-K}, \quad E_2 = E_{2,K} \dot{+} E_{2,\infty-K}.$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$B\mathbf{P} = \mathbf{Q}B \quad \text{на} \quad D_B, \quad B\Phi = \mathcal{A}_B Z, \quad B^*\psi = \mathcal{A}_B\gamma,$$

$$\mathcal{A}_B = diag(B_1, \cdots, B_n), \quad B_i = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{p_i} \right)$$

и оператор $B : D_B \bigcap E_1^{\infty-K} \to E_{2,\infty-K}$ *является изоморфизмом. Пусть задача о точке бифуркации* $Bx = A(\varepsilon)x + R(x,\varepsilon), R(0,0) = 0, ||R(x,\varepsilon)|| = o(||x||)$ *обладает групповой инвариантностью и выполнено условие I. Тогда УРК имеет вид*

$$f(\xi,\varepsilon) \equiv \mathcal{A}_B\xi - < A(\varepsilon)(u(\xi,\varepsilon) + \xi\cdot\Phi) + R(u(\xi,\varepsilon) + \xi\cdot\Phi,\varepsilon), \psi >= 0$$

и наследует групповую симметрию нелинейного уравнения, т.е.

$$f_{kj}(\tilde{\xi},\varepsilon) = f_{kj}(\mathcal{A}_g\xi,\varepsilon) = \mathcal{A}_g f_{kj}(\xi,\varepsilon) = \tilde{f}_{kj}(\xi,\varepsilon), \tilde{\xi}_{kj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(g)\xi_{sj}.$$

2.2. Редукция УР. Порождающие многообразия

Приведем теперь результаты о редукции УР и вспомогательные утверждения о построении порождающих многообразий.

Т е о р е м а *4 [7,73] (редукция УР по неизвестным). Пусть* $D \subset \Xi_\varphi^n$ *– область, заполненная однотипными траекториями непрерывной группы* $\mathcal{A}(a), a \in D \subset R^l$. *Тогда каждое решение УР в* D *имеет вид* $\mathcal{A}(a)\hat{\xi}$, *где* $\hat{\xi}$ *– общее малое решение УР, принадлежащее некоторому многообразию* $M(D) \subset \Xi_\varphi^n$, *трансверсальному траекториям из* D.

Действительно, из групповой инвариантности УР следует, что если ξ есть решение УР, то его решением является также любая точка траектории $O(\xi)$.

Пусть для l-параметрической непрерывной группы

$$\tilde{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a)\xi_j, \quad a = (a_1,\cdots,a_l) \in D \subset R^l \tag{11}$$

система инфинитезимальных операторов

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_i^j(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}, \quad i = 1,\cdots,l \tag{12}$$

является полной, причем общий ранг r_* матрицы $\eta = ||\eta_i^j(\xi)||_{i=\overline{1,l};j=\overline{1,n}}$ равен $n-l_1 \le l$. Тогда система дифференциальных уравнений $X_iI(\xi) = 0, \quad i = 1,\cdots,l$ определяет полную систему $\{I_s(\xi)\}_{s=1}^{l_1}$ функционально независимых инвариантов группы преобразований (11). Траекториями общего положения группы (11) в Ξ^n являются многообразия, определяемые системой равенств $I_j(\xi) = c_j, \quad j = 1, \cdots, l_1$.

Л е м м а 3. *Многообразия, ортогональные траекториям общего положения, определяются решениями системы уравнений*

$$Y_j(F) \equiv (\nabla I_j, \nabla F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} = 0, \quad j = 1, \cdots, l_1. \tag{13}$$

Действительно, в силу полноты системы $\{I_j(\xi)\}_1^{l_1}$ функционально независимых инвариантов общий ранг матрицы $[\frac{\partial I_j}{\partial \xi_i}]$ равен l_1, и система операторов $\{Y_j\}_1^{l_1}$ является полной. Поэтому (13) имеет $n - l_1$ функционально независимых решений $F_s(\xi), s = 1, \cdots, n - l_1$, и равенства

$$F_s(\xi) = c_s, \quad s = 1, \cdots, n - l_1 \tag{14}$$

определяют l_1-мерные многообразия, ортогональные траекториям общего положения, если ξ обыкновенная точка (общего положения, общего ранга) матрицы η.

Для применений эквивариантной теории ветвления мы должны уметь определять многообразия, трансверсальные траекториям.

Т е о р е м а 5. *Группа преобразований (11) имеет систему многообразий, трансверсальных траекториям общего положения тогда и только тогда, когда существует полная система инфинитезимальных операторов*

$$Z_k F = \sum_{j=1}^{n} \zeta_k^j(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \quad k = 1, \cdots, l_1 \tag{15}$$

такая, что общий ранг расширенной матрицы $\hat{\eta} = [{\eta \atop \zeta}]$ *равен* n. *Тогда решения системы уравнений* $Z_k F = 0, k = 1, \cdots, l_1$ *определяют* l_1*-мерные трансверсальные многообразия.*

Действительно, геометрический смысл системы уравнений (15) заключается в том, что нормали к интегральным поверхностям $F_s(\xi) = c_s, s = 1, \cdots, n - l_1$, ортогональны полям направлений,определяемым матрицей $\zeta = [\zeta_k^i]$ и образующим вместе с полями направлений η систему, содержащую n независимых направлений.

В качестве многообразий, трансверсальных траекториям общего положения, иногда удается выбрать [73] систему импримитивности или систему систатических многообразий [74,75].

3. Построение и исследование УР методами группового анализа

3.1. УР решений, инвариантных относительно подгрупп группы симметрии (1.1) [18,19]

Для построения УР решений, инвариантных относительно подгрупп, нужно определить формулы, позволяющие выписать УР при замене базисов в подпространствах $N(B)$ и $N^*(B)$.

Л е м м а 1. *Если в подпространствах* $N(B)$ *и* $N^*(B)$ *выбран новый базис*

$$\varphi_i^{\times} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \varphi_i = c' \varphi_i, \quad \psi_i^{\times} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \psi_j = d' \psi_i,$$

то УР $f(\xi,\lambda)=0$ *и* $t(\xi,\lambda)=0$ *принимают соответственно вид*

$$f_i^\times(\eta,\lambda)=(df)_i(c\eta,\lambda)=0,\quad i=1,\cdots,m,$$

$$t_i^\times(\eta,\lambda)=(c^{-1}t)_i(c\eta,\lambda)=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

их групповая инвариантность выражается формулами

$$\mathcal{B}_g^\times f^\times(\eta,\lambda)=f^\times(\mathcal{A}_g^\times\eta,\lambda),\quad \mathcal{A}_g^\times t(\eta,\lambda)=t^\times(\mathcal{A}_g^\times\eta,\lambda),$$

где $\mathcal{A}_g^\times=c^{-1}\mathcal{A}_g c,\quad \mathcal{B}_g^\times=d\mathcal{B}_g d^{-1}$.

Пусть G' – подгруппа непрерывной или дискретной группы G. Для построения G'-инвариантных решений следует произвести замену базисов

$$\varphi_i^\times=c_0'\varphi_i,\quad \psi_i^\times=d_0\psi_i;\quad \varphi_0^\times=c_0'\varphi_i,\quad \gamma_i^\times=c_0^{-1}\gamma_i,\quad i=1,\cdots,n(m)$$

так, чтобы соответствующие проекторы на инвариантные подпространства стали бы диагональными. Подпространства векторов из

$$\Xi_\varphi^n,N(B),N^*(B)\text{ и }\mathbf{\Gamma}=span\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\},$$

инвариантные относительно соответствующего индуцированного представления подгруппы G', обозначим соответственно $\Xi_\varphi^n(G'),N(B;G),\ N^*(B;G'),\mathbf{\Gamma}(G')$, а соответствующие проекторы на эти подпространства $P_{\xi(\varphi)}(G'),P_\varphi(G'),P_\psi(G'),P_\gamma(G')$.

Т е о р е м а 1. Пусть G' *– подгруппа* G. *Тогда*

1. *при разыскании* G'*-инвариантных решений уравнения разветвления* $f(\xi,\lambda)=0$ *и* $t(\xi,\lambda)=0$ *редуцируются к системам*

$$f_i^\times(\eta,\lambda)=0,\quad i=1,\cdots,i_0(G')=dimN^*(B;G'),\tag{1}$$

$$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_{j_0(G')},0,\cdots,0),\quad j_0(G')=dim\Xi_\varphi^n(G')$$

$$t_k^\times(\eta,\lambda)=0,\quad k=1,\cdots,j_0(G')\tag{2}$$

Если G' *нормальный делитель* G*,то при выполнении условия II для фактор-группы* G/G' *возможна дальнейшая редукция этих систем.*

2. *Если* G *дискретная группа, то разложениям подпространств* $\Xi_\varphi^n,N^*(B)$ *и* $\mathbf{\Gamma}$ *на неприводимые инвариантные подпространства соответствующих представлений группы* $\mathbf{G}$ *отвечает выделение из УР подсистем вида (1),(2), группы инвариантности которых совпадают со всеми нормальными делителями группы* G.

Действительно, для компактных групп G известен [2,77] метод построения матриц P, переводящих базисы $\Xi_\varphi^n,N(B),N^*(B),\mathbf{\Gamma}$ в базисные элементы неприводимых инвариантных подпространств. Если G – дискретная группа, то согласно результатам [78,п.4.5], ядра гомоморфизмов всех неприводимых представлений порождают структуру всех нормальных делителей G. Поэтому выбор матриц $P_{N^*(B)}$ и $P_{\Xi_\varphi^n}$ в качестве d_o и c_o выделяет из УР подсистемы вида (1),(2), группы инвариантности которых совпадают со всеми нормальными делителями G. Полное разделение УР на подсистемы возможно только для линейных определяющих систем в линейных задачах теории ветвления [1].

З а м е ч а н и е 1. В работах [7,15,76] рассмотрены УР задачи о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла, допускающие симметрию непрерывных групп вращений (индуцированную 3-параметрической группой сдвигов), и представление группы симметрии простой кубической решетки. Для каждой из возможных размерностей УР (делители 6,8,12,24 и 48 порядка 48 группы куба O_h и некоторые их суммы) в соответствии с утверждением **2** теоремы 1 выписаны УР решений инвариантных относительно нормальных делителей группы O_h.

Возникает задача построения всех H-УР, определяющих $H-$инвариантные решения для всех подгрупп $H \subset G$. В [78] на примере обыкновенных дифференциальных уравнений с дискретной группой симметрии предложен метод построения H-систем и H-инвариантных решений. Исходной является дискретная группа G и структура $\mathbf{L}(G)$ всех ее подгрупп. Если $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_\kappa$ - некоторая цепь подгрупп, то существует базис R_κ в $N(B)$, в котором $\mathcal{A}_g$ для каждой из подгрупп $H_i, \quad i=\overline{1,\kappa}$ распадается на неприводимые представления. Из $\mathbf{L}(G)$ выделяется некоторое минимальное подмножество $\tilde{L}(G)$ существенных подгрупп H_W, т.е. таких, что разложение $\mathcal{A}_g$ на неприводимые относительно всех H_W порождает все системы вида (1),(2). Процесс построения $\bigvee$-полуструктуры $\tilde{L}(G)$ (для каждой пары $H_W^1, H_W^2 \subset \tilde{L}(G)$ существует их объединение $H_W^1 \bigvee H_W^2$, порожденное всеми элементами H_W^1 и H_W^2) конечен для конечных групп. Две H-системы называются сосуществующими, если они существуют в одном и том же базисе. Для каждой максимальной цепи $\omega \quad G \supset H_W^1 \supset \cdots \supset H_W^\kappa$ существенных подгрупп существует базис R_ω, в котором $\mathcal{A}_g$ распадается на неприводимые представления одновременно для всех подгрупп цепи ω. Следовательно, в базисе R_ω окажутся сосуществующими H-системы, соответствующие нормальным делителям всех групп цепи ω (здесь необходимо напомнить, что подпространство H-инвариантных векторов преобразуется по тривиальному представлению группы H). Таким образом, чтобы построить все H-системы,достаточно рассмотреть УР во всех базисах R_ω, соответствующих всем максимальным цепям ω в $\tilde{L}(G)$; для того, чтобы все H-системы могли быть получены в одном базисе, достаточно, чтобы $\tilde{L}(G)$ была цепью.

Для непрерывных групп G и их непрерывных подгрупп задача построения всех H-систем разветвления сводится, согласно [26,27], к перечислению классов подобных подгрупп группы $\mathcal{A}_g$ с последующим применением результатов этого пункта.

Рассмотрим в условиях достаточной гладкости R в открытом связном подмножестве $D \subset E_1 \times R^1$ задачу о точках бифуркации

$$F(x,\lambda) \equiv A(\lambda)x + R(x,\lambda) = 0, \quad R(0,\lambda) \equiv 0, ||R(x,\lambda|| = o(||x||), x \to 0 \qquad (3)$$

в предположении групповой инвариантности. Если рассматривать (3) в подпространстве $E_1(G')$ элементов, инвариантных относительно G', то при $g \in G'$ имеем $K_g F(x,\lambda) = F(L_g x,\lambda) = F(x,\lambda)$. Это означает, что оператор F принимает значения из подпространства $E_2(G')$.

Т е о р е м а 2 [18,19]. Пусть уравнение (3) инвариантно относительно группы G, λ_0-фредгольмова точка оператора $A(\lambda)$, существует инвариантное относительно L_g прямое дополнение $E_1^{\infty-n}(\lambda_0)$ к подпространству $N(A(\lambda_0))$. Пусть далее подпространство $N(A(\lambda_0);G')$ G'-инвариантных элементов в $N(A(\lambda_0))$ нетривиально и длина полного обобщенного жорданова набора $k(N(A(\lambda_0);G')$ нечетна. Тогда (3) имеет G'-инвариантное решение.

Доказательство использует вспомогательное утверждение о том, что в условиях теоремы ОЖЦ элементов $N(A(\lambda_0);G')$ принадлежат $E_1(G')$, и общую теорему существования бифуркации от собственного значения с ОЖН нечетной длины [16,17].

На основе [79] в [80] для вполне непрерывных операторов F сформулирован глобальный результат для решений (3), инвариантных относительно подгрупп $G' \subset G$. Используя теорему С.М.Никольского [1,С.341], можно освободиться от ограничения полной непрерывности.

Т е о р е м а 3. Пусть D – открытое связное подмножество $E_1 \times R^1$, оператор $A(\lambda)$ замкнут и выполнены условия теоремы 2. Если $C-$содержащая $(0, \lambda_0)$ связная компонента замыкания в D множества нетривиальных G'-инвариантных решений $(x, \lambda), x \neq 0$, то выполнено одно из следующих трех свойств: 1^0. C не ограничена в $E_1 \times R^1$, 2^0. $C \bigcap \partial D \neq 0$, 3^0. C содержит точки $(0, \lambda^*)$, где $\lambda^* \neq \lambda_0$.

3.2. Потенциальные УР

Для вещественных банаховых пространств E_1 и E_2 более удобным для исследования является случай потенциального УР . Тогда в условиях групповой симметрии редукция УР наиболее просто осуществляется с помощью полной системы функционально независимых инвариантов группы преобразований $\mathcal{A}_g$ [81]. На этом пути в [80] (см. также [7,82]) доказаны теоремы существования многопараметрических семейств решений задач теории ветвления.

Т е о р е м а 4. Пусть $f(\tau) : R^n \to R^n$ – инвариантное относительно группы G потенциальное векторное поле. Его потенциал $U(\tau) : R^n \to R$ является инвариантом $\mathcal{A}_g$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_g \mathcal{B}_g = I. \tag{4}$$

Действительно, записывая условие (2.3) или (2.4) групповой инвариантности векторного поля $f(\tau) = \text{grad} U(\tau)$ в виде

$$\frac{\partial U(\tilde{\tau})}{\partial \tilde{\tau}} = \sum_{s=1}^{n} \beta_{ks}(g) \frac{\partial U(\tau)}{\partial \tau_s}, \quad \tilde{\tau} = \mathcal{A}_g \tau,$$

вычислим его дифференциал $dU(\tilde{\tau})$

$$dU(\tilde{\tau}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U(\tilde{\tau})}{\partial \tilde{\tau}_k} d\tilde{\tau}_k = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k,s=1}^{n} \alpha_{kj}(g) \beta_{ks}(g) \frac{\partial U(\tau)}{\partial \tau_s}) d\tau_j.$$

Следовательно, $U(\mathcal{A}_g \tau) = U(\tau)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (4). Если бы величины $U(\mathcal{A}_g \tau)$ и $U(\tau)$ отличались на постоянную, то выбирая $g = e, \quad \mathcal{A}_g = I$, мы получили бы, что эта постоянная равна нулю.

С л е д с т в и е 1. Если $\mathcal{A}_g$ компактная группа, то системы $\{\varphi_i\}_1^n$ и $\{\gamma_i\}_1^n$ могут быть выбраны так, чтобы матрицы $\mathcal{A}_g$ были ортогональными. Если $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$ и $U(\tau, \lambda)$ – потенциал соответствующего УР, то $U(\tau, \lambda)$ является инвариантом группы $\mathcal{A}_g$.

Относительным инвариантом веса χ группы $\mathcal{A}_g$ называется отображение $u : E \to K$ векторного пространства E над полем K такое, что $u(gx) = \chi(g) u(x)$ для всех $g \in G$ и $x \in E$ [83].

С л е д с т в и е 2. Потенциал $U(\tau)$ векторного поля $f(\tau)$ является относительным инвариантом группы $\mathcal{A}_g$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'{}_g \mathcal{B}_g = \chi(g) I$.

Т е о р е м а 5. Если УР порождает потенциальное векторное поле, потенциал которого является инвариантом l-параметрической группы преобразований $\mathcal{A}_g$, имеющей полную систему функционально независимых инвариантов $\{I_j(\tau)\}_{j=1}^{l_1}$, $n - l_1 < l$, то

$$U(\tau, \lambda) = F(I_1(\tau), \cdots, I_{l_1}(\tau), \lambda) \tag{5}$$

и УР редуцируется к $l_1 \times l_1$-системе

$$\frac{\partial}{\partial I_j} F(I_1, \cdots, I_{l_1}, \lambda) = 0, \qquad j = 1, \cdots, l_1. \tag{6}$$

Действительно, потенциал $U(\tau,\lambda)$ уравнения разветвления представляется в виде (5). Так как инварианты $\{I_j(\tau)\}_1^{l_1}$ функционально независимы, система

$$\frac{\partial U(\tau,\lambda)}{\partial\tau_j}=\sum_{k=1}^{l_1}\frac{\partial U}{\partial I_k}\frac{\partial I_k}{\partial\tau_i}=0,\quad i=1,\cdots,n$$

эквивалентна (6). Редуцированное УР (6) определяет решения в неявном виде

$$I_j(\xi)=c_j(\lambda),\quad j=1,\cdots,l_1. \tag{7}$$

Эти решения можно также представить в виде $\xi=\mathcal{A}_g\hat{\xi}$, где точка $\hat{\xi}$ принадлежит многообразию (7).

С л е д с т в и е. Если УР порождает потенциальное векторное поле, потенциал которого является относительным инвариантом l-параметрической группы $\mathcal{A}_g$, то соответствующее УР также допускает редукцию с помощью полной системы функционально независимых инвариантов группы $\mathcal{A}_g$.

Содержательными примерами потенциальных УР являются:

1. УР задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое жидкости [54] [7, §4.3] для решений с одной прямоугольной решеткой периодичности (n=4).

2. УР задачи о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла для решений с симметрией группы октаэдра (n=6) [15,7,§4.2]. Обобщением этих примеров является следующее утверждение [84].

Т е о р е м а 6. $2l$-мерное аналитическое УР с симметриями $SO(2)$, $n_i-n_{i-1}=2$ в $i-$ой паре переменных при независимых групповых параметрах для различных i и $2l$-мерного представления группы l-мерного куба имеет вид

$$t_j(\tau,\varepsilon)=a_0(\varepsilon)\tau_j+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{|p|=s}a_p^{(j)}(\varepsilon)\tau_j(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p_1}\cdots(\tau_{2l-1}^2+\tau_{2l}^2)^{p_l}=0, \tag{8}$$

$$j=1,\cdots,2l$$

с симметрией коэффициентов $a_p^{(j)}(\varepsilon)$, обусловленной действием группы вращений-отражений $2l$-мерного куба и является потенциальным. УР допускает редукцию с помощью полной системы функционально независимых инвариантов $I_k=(\tau_{2k-1}^2+\tau_{2k}^2),\quad k=1,\cdots,l.$

Для упрощения изложения дадим здесь доказательство для $l=2;3$. В общем случае оно аналогично с учетом замечания, что перестановка любой пары (τ_{2k-1},τ_{2k}) и $(\tau_{2j-1},\tau_{2j}), k\neq j$ принадлежит группе симметрии $2l$-мерного куба. Отмечая, что общий вид УР полностью определяется допускаемой им группой симметрии и не зависит от природы задачи, рассмотрим при $l=2$ УР периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном в случае прямоугольной трансляционной решетки [7,§4.3;4]

$$f_j(\tau,\varepsilon)\equiv a_0(\varepsilon)\tau_j+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{|p|=s}a_{p_1p_2}^{(j)}(\varepsilon)\tau_j(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p_1}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{p_2}=0, \tag{9}$$

где $a_{p_1p_2}^{(1)}=a_{p_1p_2}^{(2)}; a_{p_1p_2}^{(3)}=a_{p_1p_2}^{(4)}$ и $a_{p_1p_2}^{(3)}=a_{p_2p_1}^{(1)}, j=\overline{1,4}$. В силу условий на коэффициенты выполнены равенства $\frac{\partial f_j}{\partial\tau_k}=\frac{\partial f_k}{\partial\tau_j}$, доказывающие потенциальность УР (9).

Применяя формулу [86]

$$U(\tau,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 t_j(s_1\tau_1,\cdots,s_1\tau_n)\tau_j ds, \tag{10}$$

вычислим потенциал УР ($\mathrm{grad}\ U(\tau,\varepsilon)=t_j(\tau,\varepsilon)$)

$$U(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{2}a_0(\varepsilon)(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+\tau_4^2)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{1}{2k}[a^{(1)}_{2k-1,0}(\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k}+$$

$$+(a^{(1)}_{2k-2,1}+a^{(1)}_{0,2k-1})(\tau_1^2+\tau_2^2)(\tau_3^2+\tau_4^2)((\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k-2}+(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k-2})+$$

$$+(a^{(1)}_{2k-3,2}+a^{(1)}_{1,2k-2})(\tau_1^2+\tau_2^2)^2(\tau_3^2+\tau_4^2)^2((\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k-4}+(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k-4})+\cdots+$$

$$+(a^{(1)}_{k,k-1}+a^{(1)}_{k-2,k+1})(\tau_1^2+\tau_2^2)^{k-1}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{k-1}((\tau_1^2+\tau_2^2)^2+(\tau_3^2+\tau_4^2)^2)+$$

$$+2a^{(1)}_{k-1,k}(\tau_1^2+\tau_2^2)^k(\tau_3^2+\tau_4^2)^k+a^{(1)}_{2k-1,0}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k}]+$$

$$+\frac{1}{2k+1}[a^{(1)}_{2k,0}(\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k+1}+(a^{(1)}_{2k-1,1}+a^{(1)}_{0,2k})(\tau_1^2+\tau_2^2)(\tau_3^2+\tau_4^2)((\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k-1}+$$

$$+(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k-1})+(a^{(1)}_{2k-2,2}+a^{(1)}_{1,2k-1})(\tau_1^2+\tau_2^2)^2(\tau_3^2+\tau_4^2)^2((\tau_1^2+\tau_2^2)^{2k-3}+$$

$$+(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k-3})+\cdots+(a^{(1)}_{k,k}+a^{(1)}_{k-1,k+1})(\tau_1^2+\tau_2^2)^k(\tau_3^2+\tau_4^2)^k(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+\tau_4^2)+$$

$$+a^{(1)}_{2k,0}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{2k+1}]\}.$$

Здесь $I_k=(\tau_{2k-1}^2+\tau_{2k}^2), k=1,2$ образуют полную систему функционально независимых инвариантов. Согласно теореме 5, УР допускает редукцию с помощью этой системы. Для главной части рассматриваемого УР при $l=2$ она приведена в [7,§4.3], где получена также асимптотика семейств разветвляющихся решений.

При $l=3$ УР (8) совпадает с полученным в [7,§4.4] для задачи о кристаллизации при $n=2l=6$ с симметрией группы октаэдра, порожденной элементами

$$C_4^{(1)}(\tau)=(\tau_1,\tau_2,\tau_5,\tau_6,\tau_3,-\tau_4),\quad C_4^{(2)}(\tau)=(\tau_5,-\tau_6,\tau_3,\tau_4,\tau_1,\tau_2),$$

$$C_4^{(3)}(\tau)=(\tau_3,\tau_4,\tau_1,-\tau_2,\tau_5,\tau_6),\quad \mathcal{I}(\tau)=(\tau_1,-\tau_2,\tau_3,-\tau_4,\tau_5,-\tau_6),$$

$$t_j(\tau,\varepsilon)=a_0(\varepsilon)\tau_j+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{|p|=s}a_p^{(j)}(\varepsilon)\tau_j(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p_1}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{p_2}(\tau_5^2+\tau_6^2)^{p_3}=0,$$

где $a^{(3)}_{p_1p_2p_3}=a^{(1)}_{p_2p_1p_3}$; $a^{(5)}_{p_1p_2p_3}=a^{(1)}_{p_3p_2p_1}$; $a^{(2k)}_{p_1p_2p_3}=a^{(2k-1)}_{p_1p_2p_3}$; $k=1,2,3$; $a^{(1)}_{p_1p_2p_3}=a^{(1)}_{p_1p_3p_2}$; $j=\overline{1,6}$.

Здесь применение формулы (10) дает

$$U(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{2}a_0(\varepsilon)(I_1^2+I_2^2+I_3^2)+\frac{1}{4}\{a^{(1)}_{100}(I_1^4+I_2^4+I_3^4)+$$

$$a^{(1)}_{010}[I_1^2(I_2^2+I_3^2)+I_2^2(I_1^2+I_3^2)+I_3^2(I_1^2+I_2^2)]\}+\cdots$$

Мы выписали только главную часть УР, общая формула еще более громоздка по сравнению с $l = 2$. Редукция главной части УР с помощью полной системы функционально независимых инвариантов I_1, I_2, I_3 выполнена в [7,§4.2] и [15], где вычислена также асимптотика семейств разветвляющихся решений.

Потенциальность УР (8) для произвольного l может быть доказана также методом математической индукции.

Замечание 2.

1^0. Для представлений группы l-мерного куба более высоких размерностей $n > 2l$ УР, вообще говоря, не является потенциальным из-за взаимодействия решеток периодичности.

2^0. Доказанная потенциальность УР имеет место в некотором специальном базисе в $N(B)$ ([7,ГЛ.4]). Условия сохранения потенциальности при переходе к другому базису в $N(B)$ в общем случае получены в [59].

3^0. Свойство потенциальности УР является основой применения итерационных методов для построения семейств разветвляющихся решений [85].

3.3. Прямые методы использования групповой инвариантности УР для построения его общего вида по допускаемой группе

Указанная задача построения общего вида УР решается в [87] (см. также [7,ГЛ.4]) на основе теории векторных инвариантов [83,С.88-90]. Более конструктивными являются излагаемые ниже методы.

А. Основную роль в применении производящих операторов алгебр Ли для определения общего вида УР по допускаемой группе играет следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть УР $t_j(\xi,\lambda) = 0, i = 1,\cdots,n$, во фредгольмовом случае инвариантно относительно непрерывной группы $\mathcal{A}(a), a \in D \subset R^l$ и $\sigma_k = [\sigma_k^{is}]_{i,s=\overline{1,n}}, k = 1,\cdots,l$ – производящие операторы группы $\mathcal{A}(a)$. Тогда вектор-функция $t_j(\xi,\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$\sum_{s=1}^{n} \sigma_k^{js} t_s(\xi,\lambda) = \sum_{i,s=1}^{n} \frac{\partial t_j}{\partial \xi_i} \sigma_k^{js} \xi_s, \quad k = 1,\cdots,l. \tag{11}$$

Теорема 7 доказывается дифференцированием условия (2.4) по однопараметрическим подгруппам в точке $a = 0$. Отметим, что в излагаемой теории рассматриваются линейные представления групп,поэтому координаты $\eta_k^j(\xi)$ инфинитезимальных операторов $X_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_k^j(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}$, соответствующих $\mathcal{A}(a)$, зависят от ξ линейно $\eta_k^j(\xi) = \sum\limits_{s=1}^{n} \sigma_k^{js}\xi_s$.

Следствие. Если УР инвариантно относительно нелинейного представления $\mathcal{A}(\cdot,a), a \in D \subset R^l$, $l-$параметрической группы Ли, то вектор-функция $t(\xi,\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$\eta_k^j(t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial t_j}{\partial \xi_i} \eta_k^i(\xi) = X_k t_j, \qquad j = 1,\cdots,n, \quad k = 1,\cdots,l. \tag{12}$$

С точки зрения теоремы 7 рассмотрим вещественное двумерное УР, инвариантное относительно группы $SO(2)$. В комплекснозначном базисе $\varphi_1 = e^{i\theta}, \varphi_2 = e^{-i\theta}$

группа $\mathcal{A}(a)$ действует на вектор $(\xi, \overline{\xi})$ согласно формулам $\mathcal{A}(a)\xi = e^{ia}\xi, \mathcal{A}(a)\overline{\xi} = e^{-ia}\overline{\xi}$ и матрица σ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ o & -i \end{smallmatrix}\right)$.

Записывая для аналитического УР $t_k(\xi, \lambda) \equiv \sum\limits_{p,q} t_{pq}^{(k)}(\lambda)\xi^p\overline{\xi}^q = 0,\ k = 1, 2$ равенства (11)

$$it_1(\xi, \overline{\xi}, \lambda) = \sum_{p,q} t_{pq}^{(1)}(\lambda) i(p-q)\xi^p\overline{\xi}^q,$$

находим, что в $t_1(\xi, \lambda)$ могут быть отличны от нуля только те $t_{pq}^{(1)}$, для которых $p - q = 1$. Поэтому

$$t_1(\xi, \overline{\xi}, \lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} t_{pp-1}^{(1)}(\lambda)\xi^p\overline{\xi}^{p-1} = \xi\sum_{p=0}^{\infty} A_p(\lambda)|\xi|^{2p} \tag{13}$$

и в силу вещественности УР $t_2 = \overline{t}_1$. Если же УР допускает группу $O(2)$, т.е. инвариантно также относительно отражения $p(\xi_1, \xi_2) = p(\xi, \overline{\xi}) = (\xi_2, \xi_1)$, то коэффициенты $A_p(\lambda)$ вещественны.

Этот результат полностью соответствует полученному в [87,7] методами теории векторных инвариантов. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Т е о р е м а 8. *Аналитическое двумерное УР, допускающее группу $SO(2)$, в комплекснозначном базисе $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \overline{\xi}$ имеет вид*

$$f_1(\xi, \lambda) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)e^{i\alpha_k(\lambda)}(\xi_1\xi_2)^k\xi_1 = 0, \tag{14}$$

$$f_2(\xi, \lambda) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)e^{-i\alpha_k(\lambda)}(\xi_1\xi_2)^k\xi_2 = 0.$$

Дополнительная симметрия относительно отражения $\mathcal{I}(\xi) = (\xi_2, \xi_1)$ дает $\alpha_k = 0$, т.е. коэффициенты УР (14) вещественны.

Следующее утверждение может быть доказано переходом к вещественному базису в (14) либо применением той же теоремы 7.

Т е о р е м а 9. *Двумерное УР, допускающее группу вращений $SO(2)$, в вещественном базисе имеет вид*

$$t_1(\tau, \lambda) \equiv \sum_{k,j} c_{kj}\lambda^j(\tau_1^2 + \tau_2^2)^k(\tau_1\cos\alpha_{kj} + \tau_2\sin\alpha_{kj}) = 0, \tag{15}$$

$$t_2(\tau, \lambda) \equiv \sum_{k,j} c_{kj}\lambda^j(\tau_1^2 + \tau_2^2)^k(-\tau_1\sin\alpha_{kj} + \tau_2\cos\alpha_{kj}) = 0.$$

Если, кроме того, УР инвариантно относительно отражения $\mathcal{I}(\tau) = (\tau_1, -\tau_2)$, т.е. *допускает группу $O(2)$,то в (15) $\alpha_k = 0$ при всех k.*

Переход к вещественному базису, согласно лемме 3.1, выполнен в [28]. Мы приведем здесь доказательство, основанное на теореме 7. При выборе вещественного базиса в $N(B)$ и соответственно матрицы $\mathcal{A}(a)$ в виде

$$\begin{pmatrix} \cos a, & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

находим, что

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (11) принимает вид

$$t_2(\tau) = \frac{\partial t_1}{\partial \tau_1}\tau_2 + \frac{\partial t_1}{\partial \tau_2}(-\tau_1),$$

$$t_1(\tau) = \frac{\partial t_2}{\partial \tau_1}\tau_2 + \frac{\partial t_2}{\partial \tau_2}(-\tau_1).$$

Из этой системы для однородных форм порядка p в УР

$$t_1^{(p)} = a_{p,0}\tau_1^p + a_{p-1,1}\tau_1^{p-1}\tau_2 + \cdots + a_{0,p}\tau_2^p,$$

$$t_2^{(p)} = b_{p,0}\tau_1^p + b_{p-1,1}\tau_1^{p-1}\tau_2 + \cdots + b_{0,p}\tau_2^p$$

следуют рекуррентные соотношения

$$b_{p,0} = -a_{p-1,1}, \quad a_{p,0} = b_{p-1,1},$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\begin{array}{ll} b_{p-s,s} = (p+1-s)a_{p+1-s,s-1} & a_{p-s,s} = -(p+1-s)b_{p+1-s,s-1} + \\ -(s+1)a_{p-s-1,s+1}, & +(s+1)b_{p-s-1,s+1}, \end{array}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$b_{0,p} = a_{1,p-1}, \quad a_{0,p} = -b_{1,p-1},$$

откуда получаем формулы (15).

Справедливы также аналоги теоремы 7 и следствия для УР с групповой симметрией (2.3).

Т е о р е м а 10. *Пусть УР $f(\xi,\lambda) = 0$ обладает групповой инвариантностью (2.4) и $\sigma_k = [\sigma_k^{is}]_{i,s=\overline{1,n}}, \rho_k = [\rho_k^{is}]_{i,s=\overline{1,m}}$ производящие операторы групп $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{B}(a)$ соответственно. Тогда вектор-функция $f(\xi,\lambda)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=1}^{m} \rho_k^{is} f_s(\xi,\lambda) = \sum_{i,s=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}\sigma_k^{is}\xi_s, \quad k = 1,\cdots,l. \tag{16}$$

С л е д с т в и е. *В случае инвариантности УР относительно нелинейных представлений имеем*

$$\zeta_k^j(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}\eta_k^i(\xi), \quad j = 1,\cdots,m, k = 1,\cdots,l, \tag{17}$$

$$Y_s = \sum_{j=1}^{m} \zeta_s^j \frac{\partial}{\partial z_j}, X_s = \sum_{j=1}^{n} \eta_s^j(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Формулы (16),(17) также позволяют строить УР по допускаемой группе симметрии.

Т е о р е м а 11. *При $n = 3$ УР, допускающее симметрию основного представления $SO(3)$, имеет вид*

$$t_j(\tau, \varepsilon) = A_0(\varepsilon)\tau_j + \sum_k A_k(\varepsilon)\tau_j(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^k = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{18}$$

и является потенциальным.

В [87] доказательство выполнено на основе использования векторных инвариантов. Оно выполнено также индукцией по размерности представления в общем случае основных представлений $SO(n)$, в том числе и для только непрерывных УР [91-93].

В. В [32] строится общий вид УР с симметрией неосновных представлений $SO(3)$. Эта группа при любом $l = 0, 1, 2....$ имеет $(2l+1)$-мерные неприводимые представления [94,95]

$$\tilde{\xi} = \sum_{m=-l}^{l} T^l_{mn}(\varphi, \psi, \theta)\xi_n, \quad \overline{\xi}_m = (-1)^m \xi_{-m}, \tag{19}$$

$$T^l_{mn}(\varphi, \psi, \theta) = e^{-i(m\varphi + n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta) = e^{-i(m\varphi+n\psi)}\{\frac{(-1)^{l-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}} (1-\cos\theta)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\cos\theta)^{-\frac{n+m}{2}} \times$$
$$\times \frac{d^{l-n}}{d(\cos\theta)^{l-n}}[(1-\cos\theta)^{l-m}(1+\cos\theta)^{l+m}]\}$$

Согласно [94,С.142]

$$[\frac{\partial P^l_{mn}(\cos\theta)}{\partial\theta}]|_{\theta=0} = \{ \begin{array}{ll} 0, & m \neq n \pm 1, \\ -\frac{i}{2}[(l+n)(l+n-1)]^{1/2}, & m = n-1, \\ -\frac{i}{2}[(l-n)(l+n+1)]^{1/2}, & m = n+1. \end{array}$$

Поэтому инфинитезимальные операторы группы преобразований (8) можно выбрать в виде

$$\hat{X}_1(\xi) = \sum_{m=-l}^{l} (-im\xi_m)\frac{\partial}{\partial \xi_m},$$

$$\hat{X}_2(\xi) = \hat{X}_O = \sum_{m=-l}^{l} [(l-m+1)(l+m)]^{1/2} \xi_{m-1} \frac{\partial}{\partial \xi_m},$$

$$\hat{X}_3(\xi) = \hat{X}_\Pi = \sum_{m=-l}^{l} [(l+m+1)(l-m)]^{1/2} \xi_{m+1} \frac{\partial}{\partial \xi_m}.$$

Операторы $\hat{X}_O(\xi)$ и $\hat{X}_\Pi(\xi)$, переводящие ξ_m соответственно в ξ_{m-1} и ξ_{m+1}, принять называть операторами опускания и поднятия. В пространстве Ξ^{4l+2} действует представление группы вращений с инфинитезимальными операторами $X_i = (\hat{X}_i(\xi), \hat{X}_i(L)), i = 1, 2, 3$. Применяя операторы $X_O = X_2$ и $X_\Pi = X_3$ к уравнениям системы разветвления $L^{(m)} - L^{(m)}(\xi, \lambda) = 0, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$, получаем рекуррентные формулы

$$L^{(m-1)} = [(l-m+1)(l+m)]^{-1/2} \hat{X}_O(\xi) L^{(m)}(\xi, \lambda), \quad -l < m \leq 0, \tag{20}$$

$$L^{(m+1)} = [(l+m+1)(l-m)]^{-1/2}\hat{X}_\Pi(\xi)L^{(m)}(\xi,\lambda), \quad 0 \le m < l,$$

позволяющие определить все уравнения системы разветвления $L^{(m)}(\xi,\lambda) = 0, -l \le m \le l$ через уравнение $L^{(0)}(\xi,\lambda) = 0$ с номером ноль.

Общий вид $L^{(0)}(\xi,\lambda)$ можно определить следующим образом. Запишем равенство

$$\sum_{n=-l}^{l} T^l_{0n} L^{(n)}(\xi,\lambda) = L^{(0)}(\sum_{n=-l}^{l} T^l_{-l,n}\xi_n, \cdots, \sum_{n=-l}^{l} T^l_{l,n}\xi_n, \lambda), \tag{21}$$

справедливое в силу симметрии УР относительно $l-$го представления $SO(3)$. Дифференцируя (21) по φ (или ψ) и полагая $\varphi = \psi = \theta = 0$, получаем

$$\sum_{n=-l}^{l} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \xi_s}[\sum_{n=-l}^{l} \frac{\partial T^l_{sn}}{\partial \varphi}\xi_n]_{|_0} = 0,$$

т.к. согласно (19) $\frac{\partial T^l_{0n}}{\partial \varphi} = 0$.

По определению инфинитезимального оператора $\hat{X}_1$ это равенство является уравнением в частных производных первого порядка

$$i\hat{X}_1(\xi)L^{(0)}(\xi,\lambda) = \sum_{n=-l}^{l} s\xi_s \frac{\partial L^{(0)}(\xi,\lambda)}{\partial \xi_s} = 0. \tag{22}$$

Разлагая $L^{(0)}(\xi,\lambda)$ по однородным формам от ξ ,подставим их в дифференциальное уравнение (22). Из возникающей при этом системы относительно коэффициентов $a_n = a_{n_{-l}\cdots n_l}, \quad |n| = s$, однородной формы s-го порядка $\sum\limits_{|n|=s} a_n\xi^n$ находим, что среди коэффициентов a_n ненулевыми могут быть лишь те, для которых выполнено соотношение

$$n_{-l}(-l) + n_{-l+1}(-l+1) + \cdots + n_l(l) = 0. \tag{23}$$

Таким образом, доказано утверждение:

Т е о р е м а 12. *УР с симметрией $(2l+1)$-мерного неприводимого представления $SO(3)$ определяется равенствами (24) и (20)*

$$L^{(0)}(\xi,\lambda) = a_0(\lambda)\xi_0 + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{|n|=s,(23)} a_{n_{-l}\cdots n_l}(\lambda)\xi_{-l}^{n_{-l}}\xi_{-l+1}^{n_{-l+1}}\cdots\xi_l^{n_l} = 0. \tag{24}$$

В виде приложения в [32] рассмотрено построение УР для нелинейно возмущенного уравнения Гельмгольца на сфере S^2

$$\Delta w + \lambda w = a_2 w^2 + a_3 w^3 + \cdots$$

(см. по этому поводу также [49,50]). При этом применяется теория коэффициентов Клебша-Гордана [94]. Отметим здесь перспективность общей теории коэффициентов Клебша-Гордана [96,97] произвольной группы симметрии УР при определении его общего вида.

C. Излагаемые далее результаты возникли как обобщение конкретной ситуации при $s = 2$ работ В.И.Юдовича и Г.К.Тер-Григорьянца [98-101]. Рассматривается ветвление периодических решений задач, инвариантных относительно группы движений евклидова пространства R^s. Разыскиваются решения, инвариантные относительно дискретной группы сдвигов T, порожденной основными трансляциями $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$

$$\vec{t}_m = m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_s\vec{a}_s,$$

т.е. решения, являющиеся периодическими функциями по s аргументам. Инвариантность нелинейного уравнения относительно s-параметрической группы сдвигов приводит к тому, что множество решений распадается на семейства s-периодических, каждое из которых содержит все решения, получающиеся одно из другого сдвигами. В то же время одни семейства решений могут быть получены из других преобразованиями группы симметрии $\tilde{G}^1$ параллелепипеда Π_0, построенного на основных трансляциях $\vec{a}_i, i = 1, \cdots, s$. Таким образом, надо построить УР, допускающее симметрию кристаллографической группы $\tilde{G}^1 \bowtie T$. Такого рода задачи называют задачами о нарушении симметрии.

Здесь мы следуем схеме, заимствованной из физики твердого тела [2,102,103]. Поскольку элементы $N(B)$ инвариантны относительно дискретной группы сдвигов $\vec{t}_m$, неприводимые представления которой одномерны, в качестве модели $N(B)$ следует взять набор функций Блоха $\varphi_l(\cdot, q) = u_l e^{i(l,q)}$, где u_l не зависит от координат $q = (q_1, \cdots, q_s)$, на которые действует группа сдвигов. Тогда сдвиги $\vec{t}_m$ представляются посредством $e^{i(l,\vec{t}_m)}$,т.е. $\vec{t}_m\varphi_l(q) = e^{i(l,\vec{t}_m)}\varphi_l(q)$. В общем случае u_l не инвариантны относительно дискретной группы $\tilde{G}^1$ вращений-отражений основного параллелепипеда Π_0 (такова ситуация в задаче о стационарной конвекции в слое). Инвариантность базисных элементов $\varphi_l \in N(B)$ относительно сдвигов $\vec{t}_m$ приводит к равенству

$$e^{i(l,\vec{t}_m)} = 1,$$

которое означает, что векторы l принадлежат решетке Λ', обратной решетке Λ, порожденной основными трансляциями $\vec{a}_i, i = 1, \cdots, s$. Если подпространство $N(B)$ неприводимо относительно $G_1 \times \tilde{G}^1$ $\quad (G_1 = G_1(a)$ $\quad s$-параметрическая группа сдвигов в R^s), то базис в нем порождается одним элементом φ_l (одним вектором l) при действии группы $\tilde{G}^1$, в противном случае порождающих элементов φ_l (векторов l) более одного. Такая модель $N(B)$ определяет ячеистую структуру ответвляющихся семейств решений, инвариантных относительно дискретной группы T сдвигов определенных периодов $|\vec{a}_i|$ по определенным направлениям $\vec{a}_i, i = 1, \cdots, s$ и переходящих друг в друга при преобразованиях группы симметрии $\tilde{G}^1$ основного параллелепипеда Π_0. Условимся также о нумерации элементов φ_l : если вектору l и элементу φ_l дан нечетный номер, то вектору $-l$ и элементу φ_{-l} приписывается последующий четный номер.

Т е о р е м а 13. *При выборе в $N(B)$ базиса вида $u_l e^{i(l,q)}$ с учетом соглашения о нумерации базисных элементов φ_l вещественное УР периодических решений, допускающее симметрию кристаллографической группы $\tilde{G}^1 \bowtie T$, имеет вид*

$$t_j(\xi, \lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=r, (\beta,l)=l_j} A_{\beta;j}(\lambda)\xi^\beta, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{25}$$

где n четно и $t_{2k}(\xi, \lambda) = \overline{t_{2k-1}(\xi, \lambda)}$. Уравнения системы (25) переходят друг в друга при действии представления $\tilde{G}^1$ подстановками номеров векторов l_j. При этом подстановки, сохраняющие номер j, дают соотношения симметрии между коэффициентами j-го уравнения.

Действительно, разлагая УР по однородным формам $t^{(r)}(\xi,\lambda)$ порядков $r=1,2,\cdots$ по ξ, воспользуемся их инвариантностью относительно s-параметрической группы сдвигов

$$e^{i(l_j,a)}t_j^{(r)}(\xi,\lambda)=t_j^{(r)}(\xi_1 e^{i(l_1,a)},\cdots,\xi_n e^{i(l_n,a)},\lambda). \tag{26}$$

Это соотношение приводит к условию $l_j=(\beta,l)=\beta_1 l_1+\cdots+\beta_n l_n$, при выполнении которого может быть отличен от нуля коэффициент при мономе ξ^β в j–м уравнении системы разветвления. Инвариантность УР относительно группы симметрии $\tilde{G}^1$ основного параллелепипеда выражается с помощью группы подстановок номеров j векторов l_j и позволяет выразить все уравнения системы разветвления через их часть, определяемую числом элементов φ_{l_j}, порождающих базис в $N(B)$ при действии этой группы подстановок. Кроме того, она дает соотношения симметрии коэффициентов УР, количество которых равно числу подстановок группы $\tilde{G}^1$, оставляющих неизменным номер соответствующего уравнения в системе разветвления. Равенство $t_{2k}=\bar{t}_{2k-1}$ обусловлено инвариантностью относительно комплексного сопряжения (вещественностью) УР и соглашением о нумерации элементов $N(B)$.

З а м е ч а н и е 3. Следует различать скалярный (элементы $N(B)$ скалярной функции) и векторный (элементы $N(B)$ вектор-функции) случаи. В первом случае инвариантность УР относительно отражения и комплексного сопряжения (вещественность) приводит к тому, что коэффициенты УР оказываются вещественными. В векторном случае они, вообще говоря, комплексные.

В качестве иллюстрации изложенных методов построения УР в скалярном случае рассмотрена [7,15,76] задача о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла. Она сводится в [104,105] "расцеплением" цепочки уравнений Н.Н.Боголюбова [106], получаемым на основе уравнения, связывающего простую и бинарную плотности распределения частиц. В результате возникает нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна (или система уравнений в случае сложных решеток) с трехкратными интегралами по R^3 и ядром, зависящим от модуля разности аргументов, определяемым парным потенциалом взаимодействия частиц.

В [7,15,76] изложено исследование случая симметрии простой кубической решетки. Размерность $N(B)$ оказывается равной числу представлений натурального s в виде суммы трех квадратов. Общая формула числа таких ппредставлений натурального s приведена в [107,ГЛ.4,§16]). Группа симметрии куба O_h состоит из 48 элементов. Поэтому в случае единственного порождающего элемента в $N(B)$ значения $n=dimN(B)$ (размерности УР) являются делителями порядка $|O_h|=48$ группы куба, т.е. n может быть равно 6,8,12,24 и 48. Если имеется более одного порождающего элемента в $N(B)$, то n может быть равно суммам некоторых из этих делителей. Например, встречаются значения $n=6+24, 24+48$, а суммы первых трех делителей из двух слагаемых невозможны. Числа вида $4^k(8m+7)$ не допускают представления в виде суммы трех квадратов [107]. В случаях $n=6,12$ и 8 возникают укладки R^3 ячейками, имеющими соответственно формы октаэдра, кубооктаэдра и куба (тела Платона). На основе изложенной теории выписаны главные части систем разветвления при $n=6,8,12,24,48$ и $n=6+24=30$ и построена асимптотика разветвляющихся решений для $n=6,8,12$, соответственно УР и асимптотика решений, инвариантных относительно нормальных делителей O_h. При $n=6$ УР потенциально, а при $n=8$ и 12 установлена потенциальность главной части УР. Редукция УР проводилась на основе результатов [5,6].

Векторный случай задач о нарушении симметрии в теории ветвления представлен задачей о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое жидкости над ровным дном [7,52-54,108]. Отметим, что при шестимерном вырождении линеаризованного оператора [109] (симметрия с неправильной гексагональной решеткой периодичности) коэффициенты УР второго порядка чисто мнимые.

3.4. Применение теоремы Л.В.Овсянникова об инвариантных многообразиях при построении общего вида УР по допускаемой группе

Указанный метод является наиболее эффективным при построении и исследовании УР. Как в аналитическом, так и в непрерывном случаях он позволяет построить полное УР, а не только главную его часть. Метод применяется в задачах о нарушении симметрии: задаче о кристаллизации [28,31,110,111], ряде задач о капиллярно-гравитационных волнах в слоях жидкости (см. §4), в уравнении Монжа-Ампера на торе как пример ветвления периодических решений нелинейно возмущенных эллиптических уравнений [30,31], а также в общем случае построения УР бифуркации Андронова-Хопфа (см. §5). Результаты общего характера и их различные приложения изложены в работах [28-40].

Уравнение разветвления $0 = f(\xi,\lambda) = \{f_k(\xi,\lambda)\}_1^m : \Xi^n \to \Xi^m$ допускает группу G, если для некоторых ее представлений $\mathcal{A}_g$ в Ξ^n и $\mathcal{B}_g$ в Ξ^m выполнено равенство (2.3) (во фредгольмовом случае равенство (2.4))

$$f(\mathcal{A}_g\xi,\lambda) = \mathcal{B}_g f(\xi,\lambda).$$

Это равенство означает, что для наследуемой УР группы преобразований

$$\tilde{\xi} = \mathcal{A}_g\xi, \quad \tilde{f} = \mathcal{B}_g f \tag{27}$$

многообразие $\mathcal{F} : f - f(\xi,\lambda) = 0$ в пространстве Ξ^{n+m} является инвариантным многообразием. Рассматривая l-параметрическую группу преобразований (27), предполагаем, что $\mathcal{F}$ является ее неособым инвариантным многообразием. Это означает, что если $(X_\nu;F_\nu)_{\nu=1}^l$ базис соответствующей алгебры Ли инфинитезимальных операторов,то ранг $r(X_\nu;F_\nu)|_{\mathcal{F}}$ матрицы $M(X_\nu^i;F_\nu^j)$ их коэффициентов ($\nu = 1,\cdots,l; i = 1,\cdots,n; j = n+1,\cdots,n+m,$ ν-номер строки, i,j - номера столбцов) на многообразии $\mathcal{F}$ совпадает с ее общим рангом r_*. Тогда, если

$$I_1(\xi,f),\cdots,I_{n+m-r_*}(\xi,f) \tag{28}$$

базисная система функционально независимых инвариантов группы (27), то инвариантное многообразие $\mathcal{F}$ можно представить [26,27] в виде

$$\Phi^\sigma(I_1,\cdots,I_{n+m-r_*}) = 0, \quad \sigma = 1,\cdots m. \tag{29}$$

Для построения общего вида УР должно быть выполнено условие $\operatorname{rank}[\frac{\partial I_k}{\partial f_j}] = m$ независимости системы инвариантов (28) относительно f_j. Оно может быть заменено требованием $r_*(X,F) = r_*(X)$ [27,C.250]. Равенства (29) в изложенной схеме построения инвариантного многообразия дают редукцию УР с помощью полной системы функционально независимых инвариантов.

В аналитическом случае при высоких размерностях вырождения линеаризованного оператора возникают технические трудности,связанные с тем, что при разложении УР по однородным формам не все инвариантные мономы переменных ξ могут быть выражены через степени базисных инвариантов. Привлечение же дополнительных инвариантов приведет к повторению слагаемых в УР, если степени инвариантов выбраны наименее возможными. Поэтому используя дополнительные инварианты наименьших возможных степеней,мы должны профакторизовать построенное разложение УР по связям между инвариантами. Эта факторизация по отношению к выражению внутри скобок будет обозначаться далее символом $[\cdots]^{out}$.

Прежде всего рассмотрим наши постоянные примеры симметрии относительно групп вращений $SO(2)$ и $SO(3)$ [28,92,112].

Т е о р е м а 14. *При $n = 2$ непрерывное УР в вещественном базисе, допускающее группу $SO(2)$, имеет вид*

$$\begin{gathered} t_1(\tau,\lambda) \equiv \tau_1|\tau|^{-1}u(|\tau|,\lambda) - \tau_2|\tau|^{-1}v(|\tau|,\lambda) = 0, \\ |\tau| = (\tau_1^2+\tau_2^2)^{1/2}, \\ t_2(\tau,\lambda) \equiv \tau_1|\tau|^{-1}v(|\tau|,\lambda) + \tau_2|\tau|^{-1}u(|\tau|,\lambda) = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где функции $u(|\tau|,\lambda), v(|\tau|,\lambda)$ и их производные по $|\tau|$ непрерывны в окрестности (0,0) и являются бесконечно малыми при $|\tau| \to 0, \lambda \to 0$. Если УР аналитично по τ в окрестности нуля, то

$$u(|\tau|,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)|\tau|^{2k+1}\cos\alpha_k(\lambda),$$

$$v(|\tau|,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)|\tau|^{2k+1}\sin\alpha_k(\lambda),$$

где $c_k(\lambda), \alpha_k(\lambda)$ – непрерывные функции.

Действительно, инфинитезимальный оператор группы

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(далее используем обозначение $[1,2] \to \alpha$) имеет вид

$$X = X(\tau,t) = -\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_2} - t_2\frac{\partial}{\partial t_1} + t_1\frac{\partial}{\partial t_2}.$$

Переходя к полярным координатам $\tau_1 = r\cos\varphi, \tau_2 = r\sin\varphi, t_r = t_1\cos\varphi + t_2\sin\varphi, t_\varphi = -t_1\sin\varphi + t_2\cos\varphi$, получаем $X = \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Отсюда определяется система инвариантов $I_1 = r = |\tau| = \sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}, I_2 = t_r, I_3 = t_\varphi$, т.к. $r_* = 1$, то по теореме о представлении неособого инвариантного многообразия группы [26,27] получаем, что редуцированное с помощью полной системы инвариантов УР имеет вид $t_r \equiv u(r,\lambda) = 0, t_\varphi \equiv v(r,\lambda) = 0$. Отсюда следует (30). В аналитическом случае получаем результат теорем 8, 9.

Т е о р е м а 15. *При $n \geq 3$ непрерывное УР, допускающее симметрию основного представления $SO(n)$, имеет вид*

$$t_j(\tau,\lambda) \equiv \tau_j|\tau|^{-1}u(|\tau|,\lambda) = 0, \quad j = 1,\cdots,n, \quad |\tau| = (\tau_1^2+\cdots+\tau_n^2)^{1/2}$$

и является потенциальным. Функция $u(|\tau|,\lambda)$ обладает теми же свойствами, как в теореме 1, $U(\tau,\lambda) = \int_0^{|\tau|} u(s,\lambda)ds$ - потенциал УР. В аналитическом случае $u(|\tau|,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)|\tau|^{2k+1}$.

Доказательство выполнено в [91,92] индукцией по размерности n. Для случая $n = 3$ теорема 1 применяется к каждой паре из трех уравнений системы разветвления. Затем,предполагая справедливость утверждения для $n-1$, мы применяем этот результат к каждым $n-1$ уравнениям из n уравнений системы разветвления.

В работе [112] рассмотрены случаи $n > 2$ при симметрии УР относительно $SO(2)$ и $O(2)$, т.е. при совпадении нескольких точек ветвления.

Применим общую теорию этого пункта к построению УР периодических решений с симметрией простой кубической решетки в скалярном случае [28,31] (см. задачу о кристаллизации п.3).

В подпространстве $N(B)$ выбирается базис

$$\varphi_j = e^{i(l_j,q)}, \quad j = 1,\cdots,n, \quad q = (x,y,z),$$

где $l_j = m_1^{(j)}e_1 + m_2^{(j)}e_2 + m_3^{(j)}e_3$ ($m_k^{(j)}$–целые числа) – вектор обратной решетки, $s = |l_j| = m_1^{(j)^2} + m_2^{(j)^2} + m_3^{(j)^2}$. Тогда $n_s = dimN(B_s)$ равно числу представлений целого s в виде суммы трех квадратов. Принято прежнее соглашение о нумерации: если вектору l отвечает нечетный номер, то вектору $-l$ ставится в соответствие последующий четный номер. Следствием этого соглашения и вещественности УР являются равенства $t_{2k}(\xi,\varepsilon) = \overline{t_{2k-1}(\xi,\varepsilon)}$.

Таким образом, решается задача построения общего вида УР по группе

$$\mathcal{A}(\alpha) = diag\{e^{i(l_1,\alpha)},\cdots,e^{i(l_n,\alpha)}\},$$

индуцированной в $N(B)$ трехмерными сдвигами $L_\alpha u(x,y,z) = u(x+\alpha_1, y+\alpha_2, z+\alpha_3)$, оставляющими инвариантным соответствующее пространство периодических функций, и группе симметрии элементарной ячейки Π_0 . Для простоты изложения будем проводить построение вещественных УР в комплексных переменных $\xi_{2k-1}, \xi_{2k} = \overline{\xi}_{2k-1}, \quad k = 1,\cdots,\frac{n_s}{2}$.

В силу инвариантности вещественного УР относительно отражения коэффициенты УР вещественны (см. замечание 3). Порожденные векторами l_j представления группы O_h подстановками в координатах ξ и τ для $n_s = 6, 8, 12, 24, 48$, а также таблица умножения в группе O_h выписаны в [7,15,76].

А. При $s = 1, n_s = 6$ имеем $l_{2k-1} = 2\pi e_{2k}, k = 1,2,3$, УР в переменных ξ допускает группы вращений $[2k-1, 2k] \to \alpha_k, k = 1,2,3$, и группу подстановок номеров вершин октаэдра

$$C_4^{(1)} \cong (3,5,4,6), C_4^{(2)} \cong (1,6,2,5),\ C_4^{(2)} \cong (1,3,3,4), \mathcal{I} \cong (1,2)(3,4)(5,6),\cdots$$

Базис алгебры Ли группы вращений имеет вид

$$X_1(\xi) = (-\xi_1, \xi_2, 0,0,0,0), \quad X_2(\xi) = (0,0,-\xi_3,\xi_4,0,0),$$

$$X_3(\xi) = (0,0,0,0-\xi_5,\xi_6), \quad F_\nu(f) \equiv X_\nu(f), \quad \nu = \overline{1,3}; \quad r_* = 3.$$

Система дифференциальных уравнений

$$X_\nu^i \frac{\partial I}{\partial \xi_i} + F_\nu^j \frac{\partial I}{\partial f_j} = 0, \quad \nu = 1,2,3 \tag{31}$$

определяет базисные инварианты

$$I_k = \frac{f_k}{\xi_k}, \quad k = 1,\cdots,6; \quad I_{6+j} = \xi_{2j-1}\xi_{2j} = \xi_{2j-1}\overline{\xi}_{2j-1}, \quad j = 1,2,3.$$

Согласно общей теории, получаем УР вида ($c_p^{(j)}$ -коэффициенты j-го уравнения при мономе ξ^p)

$$f_1(\xi,\lambda)\equiv c_0(\lambda)\xi_1+\sum_{|p|=1}^{\infty}c^{(1)}_{p_1p_2p_3}(\lambda)\xi_1(\xi_1\xi_2)^{p_1}(\xi_3\xi_4)^{p_2}(\xi_5\xi_6)^{p_3}=0,$$

$$f_3(\xi,\lambda)\equiv C_4^{(3)}f_1(\xi,\lambda)=0,\quad f_5(\xi,\lambda)\equiv C_4^{(2)^3}f_1(\xi,\lambda)=0,$$
$$f_{2j}(\xi,\lambda)\equiv\overline{f_{2j-1}(\xi,\lambda)}=0,$$

или в переменных τ

$$t_1(\tau,\lambda)\equiv c_0(\lambda)\tau_1+\sum_{|p|=1}^{\infty}c^{(1)}_{p_1p_2p_3}(\lambda)\tau_1(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p_1}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{p_2}(\tau_5^2+\tau_6^2)^{p_3}=0,$$

$$t_2(\tau,\lambda)\equiv c_0(\lambda)\tau_2+\sum_{|p|=1}^{\infty}c^{(1)}_{p_1p_2p_3}(\lambda)\tau_2(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p_1}(\tau_3^2+\tau_4^2)^{p_2}(\tau_5^2+\tau_6^2)^{p_3}=0,$$

$$t_3(\tau,\lambda)\equiv C_4^{(3)}t_1(\tau,\lambda)=0,\quad t_4(\tau,\lambda)\equiv C_4^{(3)}t_2(\tau,\lambda)=0,$$

$$t_5(\tau,\lambda)\equiv C_4^{(2)^3}t_1(\tau,\lambda)=0,\quad t_6(\tau,\lambda)\equiv C_4^{(2)^3}t_2(\tau,\lambda)=0,$$

где $C_4^{(2)}(\tau)=(\tau_5,-\tau_6,\tau_3,\tau_4,\tau_1,\tau_2), C_4^{(3)}(\tau)=(\tau_3,\tau_4,\tau_1,-\tau_2,\tau_5,\tau_6)$. При этом инвариантность УР относительно группы подстановок вершин октаэдра приводит к следующим соотношениям симметрии коэффициентов УР:

$$c^{(1)}_{p_1p_2p_3}=c^{(1)}_{p_1p_3p_2}=c^{(3)}_{p_2p_1p_3}=c^{(5)}_{p_3p_2p_1},$$

$$c^{(3)}_{p_1p_2p_3}=c^{(3)}_{p_3p_2p_1}=c^{(5)}_{p_1p_3p_2},$$
$$c^{(5)}_{p_1p_2p_3}=c^{(5)}_{p_2p_1p_3},\quad c_p^{(2k)}=c_p^{(2k-1)},\quad k=1,2,3.$$

B. При $s=2, n_s=12$

$$l_1=2\pi(e_1+e_2),\quad l_3=2\pi(e_1-e_2),\quad l_5=2\pi(e_1+e_3),$$

$$l_7=2\pi(e_1-e_3),\quad l_9=2\pi(e_2+e_3),\quad l_{11}=2\pi(e_2-e_3),$$
$$l_{2k}=-l_{2k-1},$$

получаем покрытие R^3 кубооктаэдрами. Допускаемая УР группа состоит из вращений $[1,2]\to(\alpha_1+\alpha_2),[3,4]\to(\alpha_1-\alpha_2),[5,6]\to(\alpha_1+\alpha_3),[7,8]\to(\alpha_1-\alpha_3),[9,10]\to(\alpha_2+\alpha_3),[11,12]\to(\alpha_2-\alpha_3)$, и подстановок

$$C_4^{(1)}\cong(1,5,3,7)(2,6,4,8)(9,12,10,11), C_4^{(2)}\cong(1,11,4,9)(2,12,3,10)(5,7,6,8),$$

$$C_4^{(3)}\cong(1,4,2,3)(5,9,8,12)(6,10,7,11),\quad \mathcal{I}\cong(1,2)\cdots(11,12),\quad\cdots$$

Базис алгебры Ли, отвечающей выписанным вращениям, имеет вид

$$X_1=(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,\xi_4,-\xi_5,\xi_6,-\xi_7,\xi_8,0,0,0,0),$$

$$X_2=(-\xi_1,\xi_2,\xi_3,-\xi_4,0,0,0,0,-\xi_9,\xi_{10},-\xi_{11},\xi_{12}),$$

$$X_3 = (0, 0, 0, 0, -\xi_5, \xi_6, \xi_7, -\xi_8, -\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, -\xi_{12}),$$

$r_* = 3$; для записи векторов F_ν при $\nu = 1, 2, 3$ следует заменить в X_ν символы ξ на f. Тогда базисные инварианты,определяемые системой (31), следующие

$$I_k = \frac{f_k}{\xi_k}, \quad k = 1, \cdots, 12; \quad I_{12+j} = \xi_{2j-1}\xi_{2j} = \xi_{2j-1}\overline{\xi}_{2j-1}, \quad j = 1, \cdots, 6.$$

Оставшиеся три инварианта из системы $2n - r_* = 21$ следует подобрать в виде мономов наименьшей степени по ξ, в данном случае третьей степени. Всюду ниже для сокращения записи мономов будем опускать символ ξ, оставляя только индексы,например $\xi_1\xi_6\xi_{12} = [1, 6, 12]$. Нетрудно проверить, что такими решениями системы (5) являются восемь мономов третьей степени (выписаны попарно комплексно сопряженные инварианты)

$$[1, 6, 12], [2, 5, 11]; [1, 8, 10], [2, 7, 9]; [3, 6, 9], [4, 5, 10]; [3, 8, 11], [4, 7, 12]. \tag{32}$$

Соотношения

$$\begin{gathered} [1, 6, 12][2, 7, 9][4, 5, 10] = [1, 2][5, 6][9, 10][4, 7, 12], \\ [1, 6, 12][4, 5, 10][3, 8, 11] = [3, 4][5, 6][11, 12][1, 8, 10], \\ [3, 8, 11][2, 7, 9][4, 5, 10] = [3, 4][7, 8][9, 10][2, 5, 11], \\ [3, 8, 11][2, 7, 9][[1, 6, 12] = [1, 2][[7, 8][11, 12][3, 6, 9], \\ [1, 6, 12][2, 7, 9][3, 8, 11][4, 5, 10] = [1, 2]...[11, 12] = I_{13}I_{14}I_{15}I_{16}I_{17}I_{18} \end{gathered} \tag{33}$$

показывают, что тремя искомыми инвариантами являются, например, $I_{19} = [1, 6, 12], I_{20} = [2, 7, 9], I_{21} = [3, 8, 11]$. Из инвариантности УР $f_j(\xi) = \sum_r f_j^{(r)}(\xi) = 0$ (где $f_j^{(r)}$ - однородные формы r-й степени) относительно вращений следует правило для определения мономов r-той степени первого уравнения системы разветвления

$$l_1 = l_{k_1} + \cdots + l_{k_r}. \tag{34}$$

В то же время для инвариантов (32) имеем $l_1 + l_6 + l_{12} = 0, \cdots$. Поэтому правило (34) будет выполнено для степеней инвариантов (32), умноженных на ξ_1 : $\xi_1(\xi_1\xi_6\xi_{12})^{q_1}(\xi_2\xi_5\xi_{11})^{q_2} \cdots (\xi_4\xi_7\xi_{12})^{q_8}$. Согласно общей теории, непрерывное УР записывается в виде $f_j \equiv \xi_j\Phi_j(I_{13}, \cdots, I_{18}, I_{19}, I_{20}, I_{21}) = 0, j = 1, \cdots, 12$. В силу аналитичности УР и соотношений (33) использование всех степеней инвариантов I_{19},I_{20}, I_{21} приведет к повторению или пропуску слагаемых в разложении УР по степеням ξ. Поэтому первое уравнение системы разветвления следует записать в виде

$$f_1(\xi, \lambda) \equiv c_0^{(1)}\xi_1 + \sum_{p_\alpha, q_\beta} c^{(1)}_{p_\alpha, q_\beta}(\xi_1\xi_2)^{p_1} \cdots (\xi_{11}\xi_{12})^{p_6} \times \tag{35}$$

$$\times[\xi_1(\xi_1\xi_6\xi_{12})^{q_1}(\xi_2\xi_7\xi_9)^{q_2}(\xi_3\xi_8\xi_{11})^{q_3}(\xi_4\xi_5\xi_{10})^{q_4}]^{out} = 0,$$

где символ $[\cdots]^{out}$ означает, что согласно соотношениям (33), в выражении внутри скобки отброшены сомножители вида $(\xi_{2k-1}\xi_{2k})$ и под знаком суммы из всех слагаемых, для которых $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$, p_α сохраняется только одно при $q_\beta = 0$, p_α, т.е. выражение внутри скобки профакторизовано по соотношениям (33). Явный вид УР с раскрытием символа $[\cdots]^{out}$ содержится в [110,111] и здесь не приводится ввиду громоздкости. Остальные уравнения найдутся из условия групповой симметрии УР относительно подстановок соответствующего представления группы O_h

$$f_j(\xi,\lambda)\equiv p_{j-1}f_1(\xi,\lambda)=0,\quad j=2,3,\cdots,12,$$

где

$$p_1=C_4^{(3)^2}, p_2=\mathcal{I}\circ C_4^{(2)^2}, p_3=C_4^{(3)}, p_4=C_4^{(1)}, p_5=u_{58}=C_4^{(3)^2}\circ C_4^{(1)^3},$$

$$p_6=C_4^{(1)^3}, p_7=C_3^{(4)^3}\circ C_4^{(1)}, p_8=C_4^{(2)^3}, p_9=u_{38}=C_4^{(3)^2}\circ C_4^{(2)},$$

$$p_{10}=C_4^{(2)},\quad p_{11}=u_{15}=C_4^{(1)^2}\circ C_4^{(2)}.$$

Соотношения симметрии коэффициентов УР определяются на основе подстановок, сохраняющих номер определенного уравнения.

C. При $s=3, n_s=8$

$$l_1=2\pi(e_1+e_2+e_3), l_3=2\pi(-e_1+e_2+e_3), l_5=2\pi(e_1-e_2+e_3),$$

$$l_7=2\pi(e_1+e_2-e_3),\quad e_{2k}=-e_{2k-1}$$

получаем покрытие R^3 кубами. УР инвариантно относительно вращений

$$[1,2]\to(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\quad [3,4]\to(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$

$$[5,6]\to(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3),\quad [7,8]\to(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$$

и подстановок

$$C_4^{(1)}=(1,5,4,7)(2,6,3,8),\quad C_4^{(2)}=(1,7,6,3)(2,8,5,4),$$

$$C_4^{(3)}=(1,3,8,5)(7,6,2,4),\quad \mathcal{I}=(1,2)(3,4)\cdots(7,8),\quad \cdots$$

Выписывая базис алгебры Ли, соответствующий указанным вращениям

$$X_1=(-\xi_1,\xi_2,\xi_3,-\xi_4,-\xi_5,\xi_6,-\xi_7,\xi_8),$$

$$X_2=(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,\xi_4,\xi_5,-\xi_6,-\xi_7,\xi_8),$$

$$X_3=(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,\xi_4,-\xi_5,\xi_6,\xi_7,-\xi_8),$$

$r_*=3$ (векторы F_ν записываются аналогично), находим систему инвариантов:

$$I_k=\frac{f_k}{\xi_k}, k=1,\cdots,8; I_{8+j}=\xi_{2j-1}\xi_{2j}; j=1,\cdots,4, I_{13}=\xi_1\xi_4\xi_6\xi_8, I_{14}=\xi_2\xi_3\xi_5\xi_7,$$

где $I_{13}I_{14}=I_9I_{10}I_{11}I_{12}$. Следовательно, УР запишется в виде

$$f_1(\xi,\lambda)\equiv c_0\xi_1+\sum_{p_\alpha,q_\beta}c_{p_\alpha,q_\beta}(\lambda)(\xi_1\xi_2)^{p_1}\cdots(\xi_7\xi_8)^{p_4}\times$$

$$\times[\xi_1(\xi_1\xi_4\xi_6\xi_8)^{q_1}(\xi_2\xi_3\xi_5\xi_7)^{q_2}]^{out}=\xi_1\sum_{|p|>0}c_{p0}(\lambda)(\xi_1\xi_2)^{p_1}\cdots(\xi_7\xi_8)^{p_4}+$$

$$+\sum_{p_\alpha;k>0}c_{p_\alpha k}(\lambda)(\xi_1\xi_2)^{p_1}\cdots(\xi_7\xi_8)^{p_4}\xi_2^{k-1}((\xi_3\xi_5\xi_7)^k+$$

$$+\sum_{p_\alpha;k>0} c^1_{p_\alpha k}(\lambda)(\xi_1\xi_2)^{p_1}\cdots(\xi_7\xi_8)^{p_4}\xi_1^{k+1}((\xi_4\xi_6\xi_8)^k=0,$$

$$f_j(\xi,\lambda)\equiv p_{j-1}f_1(\xi,\lambda)=0,\quad j=2,\cdots,8,$$

где

$$p_1=u_{45}=C_4^{(3)^3}\circ C_4^{(1)^2},p_2=C_4^{(3)},p_3=C_4^{(1)^2},p_4=C_4^{(3)^3},p_5=C_4^{(2)^2},$$

$$p_6=\mathcal{I}\circ C_4^{(3)^2},\quad p_7=\mathcal{I}\circ u_{17}=\mathcal{I}\circ C_4^{(3)}\circ C_4^{(1)^2}.$$

Соотношения симметрии между коэффициентами УР выписываются на основе подстановок, сохраняющих номер определенного уравнения.

З а м е ч а н и е 4. Построение общего вида УР в двух возможных реализациях случая $n_s=24$ выполнено в [28,110,111]. Вырождение порядка $n_s=48$ рассмотрено в [111]. Здесь имеется 16 инвариантных мономов третьей степени и 180 инвариантных мономов четвертой степени, в [111] на основе связей между ними выделен 21 функционально независимый моном.

4. Капиллярно-гравитационные волны в пространстве

Задачи о капиллярно-гравитационных волнах в слоях жидкости восходят к знаменитым работам А.И.Некрасова [113,114], Т.Леви-Чивита [115], Д.Стройка [116] и Н.Е.Кочина [117], в которых рассмотрены плоские задачи. В работе [117] методами [113,114] исследована задача о волне на границе раздела двух жидкостей, более сложная технически. В работах [118,119] также методами интегральных уравнений рассмотрена задача о волнах на поверхности флотирующей жидкости. Нами в цикле работ [7,52-54,108,109,120-127] рассмотрены соответствующие пространственные задачи непосредственно по описывающей явление системе дифференциальных уравнений со свободной границей. Поскольку эти задачи являются типичными задачами теории ветвления о нарушении симметрии, в работах [120-127] применялись методы группового анализа, изложенные в п. 3.4.

А. Определяются периодические с периодами $\frac{2\pi}{a},\frac{2\pi}{b}$ по x и y потенциальные течения флотирующей тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей $z=f(x,y)$, близкой к горизонтальной плоскости $z=0$, ответвляющиеся от основного движения с постоянной скоростью V в направлении оси Ox. Потенциал скорости имеет вид $\varphi(x,y,z)=Vx+\Phi(x,y,z)$, h – толщина слоя, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ-плотность несущей жидкости, ρ_0 - поверхностная плотность флотируемого вещества, g-ускорение свободного падения. Описывающая ответвляющиеся течения система дифференциальных уравнений в безразмерных переменных ($k=\frac{\rho_0}{\rho h}$, $F=\frac{\sqrt{hg}}{V}$ -величина,обратная числу Фруда, $\gamma=\frac{\sigma}{\rho g h^2}$ – число Бонда) записывается в виде

$$\Delta\Phi=0,\quad -1<z<f(x,y);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,-1)=0\quad (\text{условие непротекания на дне}\quad z=-1);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}=(\nabla f,\nabla_{xy}\Phi)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\quad \text{при}\quad z=f(x,y);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+F^2f+\frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}[F^2+$$

$$+(-\nabla f\cdot\nabla_{xy}+\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2)]-$$

$$-\gamma F^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})]=const \text{ при } z=f(x,y)$$

(интеграл Бернулли для флотирующей жидкости [119]).

Система инвариантна относительно двумерной группы сдвигов $L_\beta g(x,y)=g(x+\beta_1,y+\beta_2)$ и отражений

$$s_1:\quad x\to -x,\quad \Phi(x,y,z)\to-\Phi(-x,y,z),\quad f(x,y)\to f(-x,y),$$

$$s_2:\quad y\to -y,\quad \Phi(x,y,z)\to\Phi(x,-y,z),\quad f(x,y)\to f(x,-y).$$

Выполняя распрямляющую свободную границу замену переменных

$$\zeta=\frac{z-f(x,y)}{1+f(x,y)},\Phi(x,y,f(x,y)+\zeta(1+f(x,y)))=u(x,y,\zeta)$$

и полагая $F^2=F^2_{mn}+\varepsilon$, где F_{mn} критическое значение числа Фруда, получаем эквивалентную систему

$$\Delta u=w^{(0)}(u,f),\quad -1<\zeta<0;\quad \frac{\partial u}{\partial\zeta}(x,y,-1)=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial\zeta}-\frac{\partial f}{\partial x}=w^{(1)}(u,f)\quad\text{при}\quad\zeta=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\zeta}+F^2_{mn}f-\gamma F^2_{mn}\Delta f=w^{(2)}(u,f,\varepsilon)\quad\text{при}\quad\zeta=0,$$

где $w^{(j)}(u,f)$ -малые нелинейности, $j=0,1,2$. Система (1) записывается в виде нелинейного функционального уравнения $BX=R(X,\varepsilon)$, $R(0,\varepsilon)\equiv0$, $X=(u,f)$ - задачи о точках бифуркации [1] с линейным фредгольмовым [128] оператором

$$B=B_{mn}:C^{2+\alpha}(\Pi_0\times[0,1])\dot{+}C^{2+\alpha}(\Pi_0)\to C^{\alpha}(\Pi_0\times[0,1])\dot{+}C^{\alpha}(\Pi_0)\dot{+}C^{\alpha}(\Pi_0),$$

$0<\alpha<1$, где Π_0 – прямоугольник периодов в плоскости x,y со сторонами $a_1=\frac{2\pi}{a}$ и $b_1=\frac{2\pi}{b}$.

Метод Фурье, примененный к линеаризованной системе (1), дает для некоторых пар целых чисел (m_j,n_j) дисперсионное соотношение

$$m_j^2a^2(\frac{chs_{m_jn_j}}{s_{m_jn_j}shs_{m_jn_j}}+k)=F^2(1+\gamma s^2_{m_jn_j}), \tag{2}$$

$$s_j^2=s^2_{m_jn_j}=m_j^2a^2+n_j^2b^2,\quad F^2=F^2_{m_jn_j},$$

при выполнении которого подпространство нулей $N(B)=span\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, $\varphi_k=\{\Phi_k,f_k\}$ оператора B имеет базис

$$\varphi_{1j}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(m_jax+n_jby)}=\varphi_{l_{1j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(l_{1j},q)},$$

$$\varphi_{3j}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(m_jax-n_jby)}=\varphi_{l_{3j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(l_{3j},q)},$$

$$\varphi_{l_{2j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),iv_2\}e^{-i(l_{1j},q)},\quad \varphi_{l_{4j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),iv_2\}e^{-i(l_{3j},q)}$$

$$v_{1j}(\zeta)=\frac{m_ja\sqrt{ab}ch[s_j(\zeta+1)]}{\pi s_j shs_j},v_2=\frac{\sqrt{ab}}{\pi},\quad l_{2j}=-l_{1j},l_{4j}=-l_{3j}.$$

Здесь j номер решетки периодичности Λ, принято прежнее соглашение о нумерации векторов l обратной решетки Λ'. Если $n_j\neq 0$, мы имеем двумерную обратную решетку, если $n_j=0$, то одномерную. Требование эллиптичности равенства Бернулли в сочетании со вторым дифференциальным соотношением на границе приводит к ограничению на безразмерные параметры $k<\gamma F_{mn}^2$ (или $h>\frac{\rho_0 V_{mn}^2}{\sigma}$).

Исследование дисперсионного соотношения (2) показывает [125], что возможны: 2,4-кратное вырождения, четырехкратное (взаимодействие двух вырожденных решеток, или одна прямоугольная), 6-кратное (неправильный гексагон), 8,10 и 12-кратное вырождения фредгольмова оператора B. Правильная гексагональная решетка невозможна, невозможно также взаимодействие трех вырожденных решеток и решения с симметрией тройного прямоугольника (квадрата). Существуют решения с симметрией двойного прямоугольника и, в частности,двойного квадрата, решения с симметрией 3-кратного прямоугольника и, в частности, 3-кратного квадрата. Доказано существование решений с симметрией двойного прямоугольника и одной больших размеров вырожденной решетки [129]. Во всех случаях вырождения методами группового анализа строится и исследуется УР, выписана асимптотика разветвляющихся решений.

З а м е ч а н и е 1. При $k=0$ полученные результаты согласуются с найденными в [52-54,108] в случае 4-мерного вырождения с одной решеткой периодичности и [109,123], где вычислена асимптотика решений в случаях неправильной гексагональной решетки и трех решеток, две из которых вырождены.

В теореме 6 доказана потенциальность четырехмерного УР (одна прямоугольная решетка периодичности) задач о капиллярно-гравитационных волнах в слое жидкости над ровным дном в базисе [7,§4.3],[54]

$$\varphi_1^\times=\frac{1}{2}(\hat\varphi_1-\hat\varphi_4)=\frac{1}{2}\{-v_1(\zeta)\sin(max+nby),v_2\cos(max+nby)\},$$

$$\varphi_2^\times=\frac{1}{2}(-\hat\varphi_1-\hat\varphi_3)=\frac{1}{2}\{-v_1(\zeta)\cos(max+nby),-v_2\cos(max-nby)\},$$

$$\varphi_3^\times=\frac{1}{2}(\hat\varphi_1+\hat\varphi_4)=\frac{1}{2}\{-v_1(\zeta)\sin(max-nby),v_2\cos(max-nby)\},$$

$$\varphi_4^\times=\frac{1}{2}(\hat\varphi_2-\hat\varphi_3)=\frac{1}{2}\{-v_1(\zeta)\cos(max-nby),-v_2\sin(max-nby)\},$$

соответствующее УР записано в переменных τ. Во всех рассмотренных задачах асимптотика разветвляющихся периодических решений выписана для УР в базисе $\{\hat\varphi_i\}$ (в переменных η) [7,§2.5]

$$\hat\varphi_1=\{\Phi_1,f_1\}=\{-v_1(\zeta)\sin max\cos nby,v_2\cos max\cos nby\},$$

$$\hat\varphi_2=\{\Phi_2,f_2\}=\{-v_1(\zeta)\sin max\sin nby,v_2\cos max\sin nby\},$$

$$\hat\varphi_3=\{\Phi_3,f_3\}=\{v_1(\zeta)\cos max\cos nby,v_2\sin max\cos nby\},$$

$$\hat{\varphi}_4 = \{\Phi_4, f_4\} = \{v_1(\zeta)\cos max \sin nby, v_2 \sin max \sin nby\}$$

В этих переменных непрерывная группа симметрии 4-мерного УР представляется матрицей [7,§2.5] $\hat{\mathcal{A}}(\beta) = \hat{\mathcal{A}}(\beta_1, \beta_2)$,

$$\tilde{\eta} = \mathcal{A}(\beta)\eta,$$

$$\begin{aligned} v_2\tilde{\eta}_1 &= \eta_1 f_1(\beta) + \eta_2 f_2(\beta) + \eta_3 f_3(\beta) + \eta_4 f_4(\beta), \\ v_2\tilde{\eta}_2 &= -\eta_1 f_2(\beta) + \eta_2 f_1(\beta) - \eta_3 f_4(\beta) + \eta_4 f_3(\beta), \\ v_2\tilde{\eta}_3 &= -\eta_1 f_3(\beta) - \eta_2 f_4(\beta) + \eta_3 f_1(\beta) + \eta_4 f_2(\beta), \\ v_2\tilde{\eta}_4 &= \eta_1 f_4(\beta) - \eta_2 f_3(\beta) - \eta_3 f_2(\beta) + \eta_4 f_2(\beta). \end{aligned}$$

Матрица $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$ ортогональна. Следовательно, выполнено необходимое условие инвариантности потенциала УР (теорема 4). Матрица перехода от переменных τ к переменным η имеет вид [7,§4.3]

$$\eta = C\tau, \qquad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее выполнено условие $CC' = \frac{1}{2}I$, достаточное для сохранения потенциальности при переходе от τ к η [59]. Следовательно, УР, построенное в базисе $\{\hat{\varphi}_i\}$, также является потенциальным.

З а м е ч а н и е 2. $\mathbf{1}^0$. Матрица $\mathcal{A}(\beta)$ также ортогональна при высоких вырождениях оператора B, $n > 4$. Однако вопрос о потенциальности УР в этих случаях остается открытым вследствие взаимодействия решеток периодичности в каждом отдельном случае построения УР.

$\mathbf{2}^0$. Из изложенного следует потенциальность УР при $n = 2$, т.е. в случае симметрии с одной вырожденной решеткой периодичности.

B. В [120,121] теми же методами исследована пространственная задача о капиллярно-гравитационных волнах на границе раздела двух жидкостей, возникшая из геофизических приложений [117,130,131].

Рассматриваются потенциальные течения двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2, ответвляющиеся от течений с постоянными скоростями V_1 и V_2 в направлении оси Ox, описываемые следующей системой в безразмерных переменных:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad -1 < z < f(x,y); \quad \Delta\Phi_2 = 0, \quad f(x,y) < z < k;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}|_{z=-1} = 0; \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}|_{z=k} = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z = f(x,y), \quad j = 1,2;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \tilde{k}_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi_1|^2 - \frac{\tilde{k}_0}{2}|\nabla\Phi_2|^2 - (1-k_0)F^2 f -$$

$$-\gamma F^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})] = \text{const}, \quad z = f(x,y).$$

Здесь $\Phi_j(x,y,z) = -V_j x + \varphi(x,y,z)$ – потенциалы скоростей жидкостей, $z = f(x,y)$ – поверхность раздела жидкостей, близкая к горизонтальной плоскости $z = 0, k = \frac{h_2}{h_1}$,

$k_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \tilde{k}_0 = \frac{V_2^2}{V_1^2} k_0, F = \frac{\sqrt{h_1 g}}{V_1}$ -величина,обратная числу Фруда, $\gamma = \frac{\sigma}{\rho_1 h_1^2 g}$- число Бонда и g- ускорение поля тяготения.

Разыскиваются периодические решения с периодами $a_1 = \frac{2\pi}{a}$ и $b_1 = \frac{2\pi}{b}$ по x и y, Π_0 - прямоугольник периодичности. Случай $k = \frac{h_2}{h_1} = 1$ требует отдельного исследования. Обзор полученных в [120,121] результатов содержится в [132].

C. В работах [112,122] исследована задача о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности бесконечного цилиндра с силой тяготения к его оси, в работе [121] на той же поверхности – задача о волнах на границе раздела двух жидкостей.

D. В работах [133,134] рассмотрена задача о периодическом рельефе слоя феррожидкости бесконечной глубины при воздействии магнитного поля, имеющая приложения в космонавтике [135]. Нами эта задача рассмотрена [136,137] в предположении конечной глубины слоя.

Слой феррожидкости, ограниченный снизу ровным дном и сверху вакуумом, подвержен воздействию вертикально направленного магнитного поля напряженности H. При достижении критического значения H на верхней границе феррожидкости появляется двоякопериодический рельеф, подлежащий определению вместе с магнитными потенциалами сред. Феррожидкость предполагается несжимаемой, имеющей конечную глубину h, изотропной и свободной от внешних токов. В безразмерных переменных эта задача описывается системой

$$-\Delta\Phi = 0, \quad f(x,y) < z < 1; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=1} = 0;$$

$$-\Delta\varphi = 0, \quad -1 < z < f(x,y); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-1} = 0;$$

$$-\gamma f - \frac{1}{2}[|\nabla(\Phi + \mu Hz)|^2 - \mu|\nabla(\varphi + Hz)|^2] + (\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mu H)\nabla(\Phi + \mu Hz)\vec{n} -$$

$$-\mu(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + H)\nabla(\varphi + Hz)\cdot\vec{n} - \frac{1}{2}\mu(\mu-1)H^2 + (\nabla, \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}) = 0, z = f(x,y);$$

$$\Phi - \varphi + (\mu - 1)Hz = 0, z = f(x,y); \quad \nabla(\Phi - \mu\varphi)\vec{n} = 0, z = f(x,y).$$

Здесь Φ и φ – магнитные потенциалы верхней и нижней сред, $f(x,y)$ – свободная граница, близкая к горизонтальной плоскости $z = 0$, $\vec{n}$ – нормаль к этой границе, μ_0- магнитная постоянная, μ- магнитная проницаемость феррожидкости, $\gamma = \frac{(\delta\rho)gh^2}{\sigma}$, $\delta\rho$ – разность плотностей сред, g – ускорение поля тяготения, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Ставится задача построения периодических решений с периодами $a_1 = \frac{2\pi}{a}$ и $b_1 = \frac{2\pi}{b}$ по осям координат, Π_0 - прямоугольник периодов. После распрямления свободной границы $\zeta = \frac{z-f}{1-zf}$, полагая $H = H_0 + \varepsilon$ (H_0- критическое значение H), получаем нелинейную систему, линейная часть которой представляет собой фредгольмов [128] оператор

$$B : C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times [1,0]) \dot{+} C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times [-1,0])) \dot{+} C^{2+\alpha}(\Pi_0) \to$$

$$\to C^{\alpha}(\Pi_0 \times [1,0]) \dot{+} C^{\alpha}(\Pi_0 \times [-1,0])) \dot{+} C^{\alpha}(\Pi_0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Точка бифуркации H_0 определяется дисперсионным соотношением

$$\frac{\mu(\mu-1)^2}{\mu+1} H_0^2 \frac{shs_{mn}}{chs_{mn}} = \gamma + s_{mn}^2, \quad s_{mn}^2 = m^2a^2 + n^2b^2.$$

Его исследование показывает [136,137], что возможны: 2-кратное вырождение (валики), 4-кратное (взаимодействие двух вырожденных решеток или одна прямоугольная), 6-кратное (гексагональная решетка), 8-кратное (взаимодействие прямоугольных решеток), 10-кратное (взаимодействие прямоугольной и гексагональной решеток) и 12-кратное (двойной гексагон – четыре решетки периодичности, две из которых вырожденные). Отметим, что решения последнего типа в синергетике еще не определялись. В [136] построена асимптотика перечисленных выше периодических решений и исследована их устойчивость относительно возмущений того же периода.

В [127,136] содержатся обзоры результатов некоторых задач о капиллярно-гравитационных волнах в слоях жидкостей.

5. Бифуркация Андронова-Хопфа в условиях групповой симметрии

Вариант метода Ляпунова-Шмидта для нестационарного ветвления – бифуркации Андронова-Хопфа был предложен В.И.Юдовичем [41,42] и развит затем в работах [43-46]. Естественно, что теорема о наследовании групповой симметрии нелинейного уравнения соответствующим УР остается справедливой и в нестационарном случае. Специфика задачи нахождения периодических решений нелинейных автономных эволюционных уравнений в банаховых пространствах заключается в инвариантности ее относительно сдвигов по времени. Кроме этой инвариантности в большинстве приложений имеется также симметрия по пространственным переменным. Поэтому доказательство теоремы о наследовании для нестационарного случая отличается лишь техническими деталями. Естественно, как и в стационарном случае, наиболее сложным является построение и исследование УР при наличии высоких вырождений линеаризованного оператора. Излагаемые здесь результаты содержатся в работах [33-40,44-46].

5.1. Вывод УР в нестационарном ветвлении

В вещественных банаховых пространствах E_1, E_2 рассматривается дифференциальное уравнение с вещественным малым параметром ε

$$A\frac{dx}{dt} + Bx = R(x,\varepsilon). \tag{1}$$

Здесь A и B – линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B)$ плотно в E_1 и $D(A) \supset D(B)$, нелинейный оператор $R(x,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируем в окрестности $(0,0) \in E_1 \dot{+} R^1$ и $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$. Рассматривается наиболее общий случай,когда A-спектр $\sigma_A(B)$ оператора B состоит из трех частей: $\sigma_A^-(B)$, лежащий строго в левой полуплоскости, $\sigma_A^0(B)$ - на мнимой оси и $\sigma_A^+(B)$,лежащий строго в правой полуплоскости. Соответственно банахово пространство E_1 разлагается в прямую сумму трех подпространств E_1^-, E_1^0 и E_1^+. Мы предполагаем, что оператор $A\frac{d}{dt} + B$ порождает для $t > 0 (t < 0)$ на $E_1^+(E_1^-)$ аналитическую полугруппу с экспоненциальным убыванием при $t \to +\infty (t \to -\infty)$. При этом $\sigma_A^0(B)$ состоит из конечного числа точек $\pm\mu i$ - ненулевых собственных значений конечной кратности без присоединенных элементов (т.е. жордановы цепочки имеют единичную длину). Множество чисто мнимых собственных значений в верхней полуплоскости распадается на непересекающиеся подклассы. К определенному подклассу принадлежат все собственные значения

$i\alpha_s, s = 1, \cdots, m$ такие, что $\alpha_s = k_s\alpha$, где k_s – натуральные числа без общих делителей. Количество таких подклассов совпадает с числом различных α. Для каждого α мы построим свое собственное УР $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$-периодических решений, где $\mu = \mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Выполняя в (1) замену переменных $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}, x(t) = y(\tau)$, получаем задачу построения 2π-периодических решений дифференциального уравнения

$$\alpha A\frac{dy}{d\tau} + By = -\mu A\frac{dy}{d\tau} + R(x,\varepsilon). \tag{2}$$

Пусть собственным значениям $-i\alpha_s \in \sigma_A(B)$ кратности n_s отвечают собственные элементы $u_{sj}, j = 1, \cdots, n_s$, а собственным значениям $i\alpha_s \in \sigma_A(B)$ - собственные элементы $v_{sj}, j = 1, \cdots, n_s$ сопряженной задачи на собственные значения с жордановыми цепочками единичной длины, т.е. $< Au_{sj}, v_{\sigma k} >= \delta_{jk}\delta_{s\sigma}$. Предполагаемый фредгольмовым, оператор $(\mathcal{B}y)(\tau) \equiv \alpha A\frac{dy}{d\tau} + By(\tau)$ и оператор $(Ky)(\tau) = A\frac{dy}{d\tau}$ отображают пространство Y 2π-периодических непрерывно дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dot{+} iE_1$ в пространство Z 2π-периодических непрерывных функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dot{+} iE_2$. Используются функционалы специального вида

$$\ll y, f \gg = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} < y(\tau), f(\tau) > d\tau,\ y \in Y, f \in Y^* \text{ или } y \in Z,\ f \in Z^* \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что подпространства нулей $N(\mathcal{B})$ и $N(\mathcal{B}^*)$операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^* = -\alpha A^*\frac{d}{dt} + B^*$ $2n$-мерны, $n = n_1 + \cdots + n_m$,

$$N(\mathcal{B}) = span\{\varphi_{sj}, \overline{\varphi}_{sj}\}_{\substack{j=1,\cdots,n_s,\\ s=1,\cdots,m}}, \quad \varphi_{sj} = \varphi_{sj}(\tau) = u_{sj}e^{ik_s\tau},$$

$$N(\mathcal{B}^*) = span\{\psi_{sj}, \overline{\psi}_{sj}\}_{\substack{j=1,\cdots,n_s,\\ s=1,\cdots,m}}, \quad \psi_{sj} = \psi_{sj}(\tau) = v_{sj}e^{ik_s\tau},$$

где $\ll A\varphi_{sj}, \psi_{sj} \gg = \delta_{jk}\delta_{s\sigma}$.

Как и раньше, для получения эквивалентного (2) УР мы применяем два способа. Первый использует сужение $\hat{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$ к дополнительному к $N(\mathcal{B})$ подпространству, а второй – обобщенную лемму Шмидта. Проекторы

$$\mathcal{P} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_s}[\ll \cdot, A^*\psi_{sj} \gg \varphi_{sj} + \ll \cdot, A^*\overline{\psi}_{sj} \gg \overline{\varphi}_{sj} : Y \to N(\mathcal{B}) = Y^{2n},$$

$$\mathcal{Q} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_s}[\ll \cdot, \psi_{sj} \gg A\varphi_{sj} + \ll \cdot, \overline{\psi}_{sj} \gg A\overline{\varphi}_{sj} :$$

$$Z \to span\{z_{sj} = A\varphi_{sj}\}_{\substack{j=1,\cdots,n_s,\\ s=1,\cdots,m}} = Z_{2n}$$

порождают разложения в прямые суммы $Y = Y^{2n} \dot{+} Y^{\infty-2n}$, $Z = Z_{2n} \dot{+} Z_{\infty-2n}$.

Разыскивая вещественные решения уравнения (2) в виде

$$y = \mathcal{P}y + (I-\mathcal{P})y \equiv \xi\cdot\varphi + \overline{\xi}\cdot\overline{\varphi} + u, \xi = (\xi_{11}, \cdots, \xi_{1n_1}, \cdots, \xi_{m_1}, \cdots, \xi_{mn_m}), \tag{4}$$

получаем эквивалентную систему

$$\hat{\mathcal{B}}u = (I-\mathcal{Q})[-\mu A\frac{du}{d\tau} + R(\xi\cdot\varphi + \overline{\xi}\cdot\overline{\varphi} + u, \varepsilon)], \tag{5}$$

$$i\mu k_s\xi_{sj} = \ll R(\xi\cdot\varphi+\overline{\xi}\cdot\overline{\varphi}+u,\varepsilon),\psi_{sj}\gg, j=1,\cdots,n_s, s=1,\cdots,m, \tag{6}$$

где $\hat{\mathcal{B}} = (I-\mathcal{P}) : Y^{\infty-2n} \to Z_{\infty-2n}$ – сужение $\mathcal{B}$ к $Y^{\infty-2n}$. Уравнение (5) является задачей о 2π-периодических решениях дифференциального уравнения в паре банаховых пространств $Y^{\infty-2n}, Z_{\infty-2n}$. Оно имеет единственное малое решение $u = u(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon)$. Подставляя u в (6), получаем УР

$$f_{sj}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) \equiv -i\mu k_s\xi_{sj} + L^{(sj)}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) = 0, \tag{7}$$

$$\overline{f}_{sj}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) = 0, \quad j=1,\cdots,n_s, s=1,\cdots,m.$$

Второй подход использует обобщенную лемму Шмидта [1]: существует ограниченный оператор Г,, обратный к оператору

$$\breve{\mathcal{B}} = \mathcal{B}+\mathcal{K} = \mathcal{B}+\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_s}[\ll\cdot,A^*\psi_{sj}\gg A\varphi_{sj}+\ll\cdot,A^*\overline{\psi}_{sj}\gg A\overline{\varphi}_{sj}].$$

На этом пути мы получаем эквивалентную (2) систему

$$\breve{\mathcal{B}}y = -\mu A\frac{dy}{d\tau}+R(y,\varepsilon), \tag{8}$$

$$\xi_{sj} = \ll y, A^*\psi_{sj}\gg, \quad \overline{\xi}_{sj} = \ll y, A^*\overline{\psi}_{sj}\gg. \tag{9}$$

Интегродифференциальное уравнение (8) в паре банаховых пространств $Y^{\infty-2n} \to Z_{\infty-2n}$ имеет единственное 2π-периодическое решение вида $y = w+\xi\cdot\varphi+\overline{\xi}\cdot\overline{\varphi}$. Тогда уравнение (9) дает УР

$$t_{sj}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) \equiv \ll w(\xi\cdot\varphi+\overline{\xi}\cdot\overline{\varphi},\mu,\varepsilon),A^*\psi_{sj}\gg = 0, \tag{10}$$

$$\overline{t}_{sj}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) = 0, \quad j=1,\cdots,n_s, s=1,\cdots,m.$$

5.2. Теорема о наследовании в нестационарном ветвлении

Следствием автономности (1) является групповая симметрия $SO(2)$ в каждой паре переменных

$$\xi_{sj},\overline{\xi}_{sj}; f_{sj},\overline{f}_{sj}, \xi = (\xi_{11},\overline{\xi}_{11},\cdots,\xi_{mn_m},\overline{\xi}_{mn_m}), f = (f_{11},\overline{f}_{11},\cdots,f_{mn_m},\overline{f}_{mn_m}),$$

выражающаяся равенствами

$$e^{ik_sa_0}f_{sj}(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) = f_{sj}(\cdots,e^{ik_ra_0}\xi_{rl},e^{-ik_ra_0}\overline{\xi}_{rl},\cdots,\mu,\varepsilon) \tag{11}$$

или

$$\mathcal{A}_0f(\xi,\overline{\xi},\mu,\varepsilon) = f(\mathcal{A}_0\xi,\overline{\mathcal{A}_0\xi},\mu,\varepsilon), \mathcal{A}_0 = diag(\underbrace{e^{ik_1a_0},e^{-ik_1a_0}}_{n_1},\cdots,\underbrace{e^{ik_ma_0},e^{-ik_ma_0}}_{n_m}).$$

Учитывая симметрию по пространственным переменным, предполагаем, что (1) допускает группу G в смысле определения 1.1, т.е.

$$AL_gx = L_gAx, \quad BL_gx = K_gBx, \quad R(L_gx,\varepsilon) = K_gR(x,\varepsilon).$$

Продолжая эти представления на соответствующие подпространства $\mathcal{E}_k$, получаем, что уравнение (2) допускает ту же самую групповую симметрию. Тогда операторы

L_g и K_g индуцируют в инвариантных подпространствах $N(\mathcal{B})$ и $N(\mathcal{B}^*)$ конечномерные представления

$$\tilde{\xi} = \mathcal{A}_g \xi, \quad L_g \varphi_{sj} = \mathcal{A}'_g \varphi_{sj} = \sum_{k=1}^{n_s} \alpha_{s;jk}(g)\varphi_{sk}, \tag{12}$$

$$K_g^* \psi_{sj} = \mathcal{B}_g \psi_{sj} = \sum_{k=1}^{n_s} \beta_{s;jk}(g)\psi_{sk}, \quad s = 1, \cdots, m.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть уравнению (1) отвечает фредгольмов оператор $\mathcal{B}$ и оно инвариантно относительно группы G, причем подпространство $Y^{\infty-2n} = (I - \mathcal{P})Y$ инвариантно относительно операторов L_g (условие I). Для уравнения разветвления второго типа предполагаем, что оператор Шмидта $\breve{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \mathcal{K}$ допускает группу G. Тогда УР также допускает группу G, т.е.*

$$\tilde{f}(\xi, \overline{\xi}, \mu, \varepsilon) = \mathcal{B}_g f(\xi, \overline{\xi}, \mu, \varepsilon) = f(\mathcal{A}_g\xi, \overline{\mathcal{A}_g\xi}, \mu, \varepsilon) = f(\tilde{\xi}, \overline{\tilde{\xi}}, \mu, \varepsilon), \tag{13}$$

$$\tilde{t}(\xi, \overline{\xi}, \mu, \varepsilon) = \mathcal{A}_g t(\xi, \overline{\xi}, \mu, \varepsilon) = t(\mathcal{A}_g\xi, \overline{\mathcal{A}_g\xi}, \mu, \varepsilon) = t(\tilde{\xi}, \overline{\tilde{\xi}}, \mu, \varepsilon), \tag{14}$$

Доказательство аналогично приведенному в §2. Инвариантность подпространства $Y^{\infty-2n}$ относительно L_g эквивалентна инвариантности проектора $\mathcal{P}$ относительно группы $G : \mathcal{P}L_g = L_g\mathcal{P}$ и L_g^*-инвариантности подпространства

$$span\{\gamma_{11}, \overline{\gamma}_{11}, \cdots, \gamma_{mn_m}, \overline{\gamma}_{mn_m}\} \subset \mathcal{E}_1^*, \quad \gamma_{sj} = A^*\psi_{sj}.$$

Согласно L_g-инвариантности подпространств $Y^{\infty-2n}$ и $Y^{2n} = N(\mathcal{B})$, уравнение $\mathcal{B}L_g y = -\mu A \frac{dL_g y}{dt} + R(L_g y, \varepsilon)$ можно записать в проекциях

$$\hat{\mathcal{B}}L_g u = (I - \mathcal{Q})[-\mu A \frac{du}{dt} + R(L_g u + L_g v, \mu, \varepsilon)], \tag{15}$$

$$\mathcal{Q}R(L_g u + L_g v, \mu, \varepsilon) = 0. \tag{16}$$

Дифференциальное уравнение (15) в достаточно малой окрестности нуля

$$\omega \subset Y^{2n} \dot{+} R^1 \dot{+} R^1$$

имеет единственное малое решение $L_g u = u(L_g v, \mu, \varepsilon)$. Поэтому существует L_g-инвариантный гомеоморфизм $u(v, \mu, \varepsilon)$ окрестности $\omega(0,0,0)$ в малую окрестность $\Omega(0) \subset Y^{\infty-2n}$, $\quad L_g u(v, \mu, \varepsilon) = u(L_g v, \mu, \varepsilon)$. Подстановка $L_g u$ в (16) дает (13). Доказательство второй части теоремы также использует L_g-инвариантность гомеоморфизма $w(v, \mu, \varepsilon)$ малой окрестности $\omega(0,0,0)$ в малую окрестность нуля $\Omega \subset Y$: $L_g w(v, \mu, \varepsilon) = w(L_g v, \mu, \varepsilon)$.

5.3. Построение УР методами группового анализа

Рассмотрим более интересный случай инвариантности УР относительно непрерывной группы, действующей на пространственные переменные. Приведем общую схему применения методов группового анализа для УР с групповой нвариантностью вида (14). Для краткости изложения будем применять следующие обозначения $\frac{\partial}{\partial \xi_{11}} = \partial\xi_{11} = \partial_{11}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{\xi}_{11}} = \overline{\partial}_{11} \cdots$, причем для простоты рассмотрим только случай $m = 1$.

Согласно теореме 1, мы имеем равенства (11) и (14), где $\mathcal{A}_g$ - конечномерное представление допускаемой группы симметрии в подпространстве $N(\mathcal{B})$. Для непрерывной l-параметрической группы, индуцированной групповым действием в пространственных переменных, мы получаем вместе с инвариантностью (11) $g = g(a) = (a_0, a_1, \cdots, a_l)$, где a_0 - угловой параметр группы вращений. Равенство (14) означает, что для рассматриваемой группы преобразований $\tilde{\xi} = \mathcal{A}_g\xi, \tilde{t} = \mathcal{A}_g t$, многообразие $T = \{t, \xi | t = t(\xi, \overline{\xi})\}$ в пространстве Ξ^{4n} векторов $(\xi, \overline{\xi}, t, \overline{t})$ является инвариантным многообразием. Здесь для краткости опущена зависимость t от малых параметров μ и ε, не являющаяся существенной для группового анализа.

Согласно равенству (11) инвариантности УР относительно группы вращений $SO(2)$, в каждой паре переменных $(\xi_k, \overline{\xi}_k; t_k, \overline{t}_k)$ определен инфинитезимальный оператор

$$X_0 = (\hat{X}_0(\xi), \hat{X}_0(t)), \quad \hat{X}_0(\xi) = \sum_{j=1}^{n}(\xi_j \partial_j - \overline{\xi}_j \overline{\partial}_j).$$

Преобразования, индуцированные пространственными переменными, определяют инфинитезимальные операторы $X_\nu = (\hat{X}_\nu(\xi); \hat{X}_\nu(t))$, $\nu = 1, \cdots, l$.

Функция $F(\xi, \overline{\xi}, y, \overline{t})$ называется инвариантом $(l+1)$-параметрической непрерывной группы $\mathcal{A}(a), a = (a_0, a_1, \cdots, a_l)$, если она не изменяется при преобразованиях аргументов относительно этой группы, т.е. постоянна на траекториях группы. Необходимое и достаточное условие инвариантности функции F выражается дифференциальным уравнением

$$X_\nu F(\xi, \overline{\xi}, t, \overline{t}) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \cdots, l. \tag{17}$$

Число функционально независимых решений системы (17) определяется общим рангом r_* матрицы $M(\hat{X}_\nu(\xi); \hat{X}_\nu(t))$ коэффициентов инфинитезимальных операторов. Если точка $(\xi, \overline{\xi}, t, \overline{t})$ является обыкновенной относительно действия группы (точкой общего положения), т.е. r_*=const в ее окрестности, то система (17) имеет $4n - r_*$ функционально независимых решений - базис инвариантов группы $\mathcal{A}(a), a = (a_0, a_1, \cdots, a_l)$, или полную систему функционально независимых инвариантов.

Пусть $T = \{t, \xi | t - t(\xi, \overline{\xi}) = 0\}$ является неособым инвариантным многообразием группы $\mathcal{A}(a)$,т.е. ранг $M(\hat{X}_\nu(\xi); \hat{X}_\nu(t))$ совпадает на T с общим рангом $r_*(M)$. Пусть

$$I_j(\xi, \overline{\xi}, t, \overline{t}), \qquad j = 1, \cdots, 4n - r_* \tag{18}$$

образуют полную систему функционально независимых инвариантов. Тогда согласно [26,27] многообразие T можно представить в виде

$$\Phi_s(I_1, \cdots, I_{4n-r_*}) = 0, \qquad s = 1, \cdots, 2n. \tag{19}$$

Для возможности построения общего вида УР мы должны представить многообразие T в виде, разрешенном относительно переменных $t_j, \overline{t}_j, j = 1, \cdots, n$. Поэтому должно быть выполнено условие

$$rank[\frac{D(I)}{D(t, \overline{t})}] = 2n$$

независимости системы (19) относительно переменных $t_j, \overline{t}_j, j = 1, \cdots, n$. Согласно [27], оно может быть заменено требованием $r_*(M(\hat{X}_\nu(\xi); \hat{X}_\nu(t))) = r_*(M(\hat{X}_\nu(\xi)))$, достаточным для разрешимости системы (14) по переменным $t_j, \overline{t}_j, j = 1, \cdots, n$. Дискретная группа симметрий дает связи между уравнениями системы разветвления.

Обычно она позволяет выразить все уравнения через их часть и дает соотношения между коэффициентами УР (см. пп.3.3 и 3.4 §3) в аналитическом случае.

Хотя в приложениях при исследовании УР в аналитическом случае для вычисления асимптотики семейств разветвляющихся решений достаточно знать лишь конечное число коэффициентов редуцированного УР, отметим то обстоятельство, что методы группового анализа позволяют определить полное УР по допускаемой им группе, выделить ненулевые коэффициенты и тем самым, значительно сократить вычислительную работу по построению и исследованию УР.

Отметим также, что случай C^1-УР проще аналитического. В аналитическом случае использование только функционально независимых инвариантов ведет к пропуску мономиальных слагаемых в уравнениях системы разветвления. Использование же дополнительных инвариантов дает повторяющиеся слагаемые. Поэтому, как и в стационарном случае, следует определить все связи между используемыми инвариантами и провести факторизацию разложения уравнений по этим связям (см. §3). Для непрерывных УР эти трудности снимаются.

Приведем примеры.

А. Уравнение разветвления с $SO(2)$ и $O(2)$ симметриями по пространственным переменным. Здесь мы рассмотрим случай $m = 2 \quad (n_1 = 2, n_2 = 1)$, где матрица $\mathcal{A}(a_0, a)$ определяется равенствами

$$\tilde{\xi}_{11} = e^{i(p_0 a + k_1 a_0)}\xi_{11}, \quad \tilde{\xi}_{12} = e^{-ip_0 a + ik_1 a_0}\xi_{12}, \quad \tilde{\xi}_{21} = e^{ik_2 a_0}\xi_{21}, \tag{20}$$

где k_1, k_2 - натуральные числа, не имеющие общих делителей. Выпишем систему инфинитезимальных операторов двупараметрической группы преобразований $\tilde{\xi} = \mathcal{A}(a_0, a)\xi, \quad \tilde{t} = \mathcal{A}(a_0, a)t$:

$$X_j = (\hat{X}_j(\xi), \hat{X}_j(t)), \quad j = 0, 1,$$

где $\hat{X}_0(\xi) = k_1\xi_{11}\partial_{11} - k_1\overline{\xi}_{11}\overline{\partial}_{11} + k_1\xi_{12}\partial_{12} - k_1\overline{\xi}_{12}\overline{\partial}_{12} + k_2\xi_{21}\partial_{21} - k_2\overline{\xi}_{21}\overline{\partial}_{21}$,

$$\hat{X}_1(\xi) = \xi_{11}\partial_{11} - \overline{\xi}_{11}\overline{\partial}_{11} - \xi_{12}\partial_{12} + \overline{\xi}_{12}\overline{\partial}_{12}.$$

Т е о р е м а 2. УР в случае $n_1 = 2, n_2 = 1$ с симметрией $SO(2)$ имеет вид

$$t_{11}(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p;s}[a^{(11)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\xi_{11}^{k_2 s+1}\xi_{21}^{k_2 s}\overline{\xi}_{21}^{2k_1 s} + b^{(11)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_{11}^{k_2 s-1}\overline{\xi}_{12}^{k_2 s}\xi_{21}^{2k_1 s}](\xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha)^{p_\alpha} = 0,$$

$$t_{12}(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p;s}[a^{(12)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\xi_{11}^{k_2 s}\xi_{12}^{k_2 s+1}\overline{\xi}_{21}^{2k_1 s} + b^{(12)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_{11}^{k_2 s}\overline{\xi}_{12}^{k_2 s-1}\xi_{21}^{2k_1 s}](\xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha)^{p_\alpha} = 0,$$

$$t_{21}(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{p;s}[a^{(21)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\xi_{11}^{k_2 s}\xi_{12}^{k_2 s}\overline{\xi}_{21}^{2k_1 s-1} + b^{(21)}_{p;s}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_{11}^{k_2 s}\overline{\xi}_{12}^{k_2 s}\xi_{21}^{2k_1 s+1}](\xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha)^{p_\alpha} = 0.$$

Если к $SO(2)$ добавляется симметрия отражения $\mathcal{I}(\xi) = (\xi_{12}, \xi_{11}, \xi_{21})$, т.е. УР допускает группу $O(2)$, то $a^{(12)}_{p_1p_2p_3;s} = a^{(11)}_{p_2p_1p_3;s}$ и *$b^{(12)}_{p_1p_2p_3;s} = a^{(11)}_{p_2p_1p_3;s}$.*

Действительно, выполнено достаточное условие $r_*(M(\hat{X}_\nu(\xi))^1_{\nu=0}) = 2$ независимости системы $\{I_s(\xi,t)\}_{s=1}^{10}$ функционально независимых инвариантов относительно переменных $t, \overline{t}$, и эта система может быть выбрана следующим образом:

$$I_j(\xi,t) = \frac{t_{11}}{\xi_{1j}}, \quad \overline{I_j(\xi,t)}, \quad j = 1, 2; \quad I_5(\xi,t) = \frac{t_{21}}{\xi_{21}}, \quad \overline{I_5(\xi,t)};$$

$$I_7(\xi)=\xi_{11}\overline{\xi}_{11},\quad I_8=\xi_{12}\overline{\xi}_{12},\quad I_9=\xi_{21}\overline{\xi}_{21},\quad I_{10}=(\xi_{11}\xi_{12})^{k_2}\overline{\xi}_{21}^{2k_1}.$$

Необходимо использование дополнительного инварианта $\overline{I_{10}(\xi)}$, что приводит к повторяющимся слагаемым в разложении УР. Поэтому мы должны записать

$$t_{11}(\xi;\mu,\varepsilon)\equiv\sum_{p;q}a_{p;q}^{(11)}(\mu,\varepsilon)(\xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha)^{p_\alpha}\left[\xi_{11}I_{10}^{q_1}(\xi)\overline{I}_{10}^{q_2}(\xi)\right]^{out}=0,$$

где символ $[\cdots]^{out}$ означает, что в выражении внутри скобок должны быть опущены сомножители вида $(\xi_\alpha,\overline{\xi}_\alpha)$, т.е. суммирование профакторизовано по связи $I_{10}\overline{I}_{10}=I_1^{k_1}I_2^{k_2}I_3^{2k_1}$ между использованными инвариантами. После факторизации получаем результат теоремы 2.

З а м е ч а н и е 1. Общий случай $2n$-мерного УР

$$n=\sum_{j=1}^{m_1}n_{1j}+\sum_{j=1}^{m_2}n_{2j}=\sum_{j=1}^{m_1}2l_{1j}+\sum_{j=1}^{m_2}l_{2j},$$

когда каждому k_{1j} соответствует l_{1j} экземпляров двумерных подпространств действия группы $SO(2)$ по пространственным переменным и каждому k_{2j} отвечает l_{2j} экземпляров одномерных подпространств действия $SO(2)$, может быть рассмотрен теми же методами [34] .

В. В качестве примера построения общего вида УР периодических решений с симметриями кристаллографических групп рассмотрим УР периодических решений с симметрией квадратной решетки. Отметим, что примеры УР с симметриями других плоских и некоторых пространственных кристаллографических групп рассмотрены в [139], более высокие размерности вырождения вызывают лишь технические трудности.

Пусть $m\geq 1$. Размерности n_s равны числам $r(s)$ представлений целых чисел $S=S(s)$ в виде сумм двух квадратов $S(s)=p^2+q^2$. Числа $r(s)=r(S(s))$ имеют вид $4r_1(S(s))+8r_2(S(s))$ соответственно $r_1(s)=\{{0 \atop 1}$ представлениям с $p=q$ или $(p,q)=(\pm p,0),(0,\pm p)$ и $r_2(s)$ представлениям $(\pm p,\pm q)$ с $p\neq q$. Для примера: $S=1,(p,q)=(\pm1,0),(0,\pm1);S=2,(p,q)=(\pm1,\pm1);S=4,(p,q)=(\pm2,0),(0,\pm2);S=5,(p,q)=(\pm1,\pm2),(\pm2,\pm1);S=8,(p,q)=(\pm2,\pm2);S=9,(p,q)=(\pm3,0),(0,\pm3),\cdots$ для $S=25$ имеем $(p,q)=(\pm3,\pm4),(\pm4,\pm3),(\pm5,0),(0,\pm5)$. В силу нашего соглашения относительно векторов l_j обратной решетки, мы нумеруем элементы $N(\mathcal{B})$ следующим образом: $l_{\sigma1}=(p_\sigma,q_\sigma),l_{\sigma2}=(-p_\sigma,-q_\sigma),l_{\sigma3}=(-p_\sigma,q_\sigma),l_{\sigma4}=(p_\sigma,-q_\sigma),\quad\sigma=1,\cdots,r_1(S(s))+2r_2(S(s))=\frac{1}{4}r(S(s))$. Таким образом, УР допускает 2-параметрическую группу $SO(2)\times SO(2)$, гомоморфную 2-параметрической группе сдвигов, 1-параметрическую группу $SO(2)$, порожденную автономностью (1)

$$\mathcal{A}(a_0,a_1,a_2)=diag\{e^{\pm i[(\pm p_\sigma a_1+q_\sigma a_2)+k_s a_0]}\},\tag{21}$$

$$s=1,\cdots,m,\quad ,\sigma=1,\cdots,\frac{1}{4}r(S(s)),\quad j=1,\cdots,4,$$

где целые числа k_s и p_σ,q_σ такие, что $(k_{s_i},k_{s_j})=1,(p_\sigma,q_\sigma)=d_j\geq1$, $p_\sigma=d_\sigma p'_\sigma,q_\sigma=d_\sigma q'_\sigma$, и группу вращений-отражений квадрата, выражающуюся подстановками

$$\begin{gathered}e,\quad L_1\sim P=(1,2,3,4),\quad L_1^2,\quad L_1^3,\quad \mathcal{I}_1\sim P_1=(1,4)(2,3),\\ \mathcal{I}_2\sim P_2=(1,3)(2,4),\mathcal{I}_3\sim P_3=(1,2)(3,4),\mathcal{I}_{12}\sim P_{12}=(1)(2)(3,4),\\ \mathcal{I}_{34}\sim P_{34}=(1,2)(3)(4)\end{gathered}\tag{22}$$

индексов j координат $\xi_{s,\sigma,j}, j = 1, \cdots, 4$.

Здесь мы рассмотрим только один частный случай: $m = 2, l_{s1} = p_s e_1, l_{s2} = p_s e_2, l_{s,2k} = -l_{s,2k-1}, \quad k = 1, 2$. Система вида (17), кроме инвариантов типов $\frac{f}{\xi}$ и $\xi\overline{\xi}$, определяет следующие 12 мономиальных инвариантов

$$I_1(\xi) = \xi_{11}\xi_{12}\overline{\xi}_{13}\overline{\xi}_{14}, \quad \overline{I_1(\xi)};$$

$$I_2(\xi) = \xi_{21}\xi_{22}\overline{\xi}_{23}\overline{\xi}_{24}, \quad \overline{I_2(\xi)};$$

$$I_3(\xi) = (\xi_{11}\xi_{12})^{k_2}(\overline{\xi}_{23}\overline{\xi}_{24})^{k_1}, \quad \overline{I_3(\xi)};$$

$$I_4(\xi) = (\xi_{13}\xi_{14})^{k_2}(\overline{\xi}_{21}\overline{\xi}_{22})^{k_1}, \quad \overline{I_4(\xi)};$$

$$I_5(\xi) = (\overline{\xi}_{11}\xi_{12})^{q_2}(\xi_{21}\overline{\xi}_{22})^{q_1}, \quad \overline{I_5(\xi)};$$

$$I_6(\xi) = (\xi_{13}\overline{\xi}_{14})^{q_2}(\overline{\xi}_{23}\xi_{24})^{q_1}, \quad \overline{I_6(\xi)},$$

где $(k_1, k_2) = 1, \quad (p_1, p_2) = d \geq 1, \quad p_1 = dq_1, \quad p_2 = dq_2$.

УР записывается в виде

$$f_{sj}(\xi, \mu, \varepsilon) \equiv \sum a^{(sj)}_{\alpha\beta}(\mu, \varepsilon)(\xi_{11}\overline{\xi}_{11})^{\alpha_{11}} \cdots (\xi_{24}\overline{\xi}_{24})^{\alpha_{24}} \times$$

$$\times [\xi_{sj} I_1^{\beta_1}(\xi)(\overline{I_1^{\hat{\beta}_1}}(\xi)) \cdots I_6^{\beta_6}(\xi)(\overline{I_6^{\hat{\beta}_6}}(\xi))]^{out} = 0,$$

$$j = 1, \cdots, 4, \quad s = 1, 2.$$

где символ $[...]^{out}$ означает факторизацию по связям $I_k \overline{I}_k \sim 1$ между инвариантами. Симметрия относительно дискретной группы дает соотношения между коэффициентами УР .

5.4. Об асимптотике малых решений

Здесь мы предполагаем, что в (1) $R(0, \varepsilon) \equiv 0$, т.е. рассматривается бифуркация Андронова-Хопфа. УР является системой n комплекснозначных уравнений относительно неизвестных $\xi_{sj} \in C^1, \quad j = 1, \cdots, n_s, \quad s = 1, \cdots, m; \quad n = n_1 + \cdots + n_m$ и $\mu \in R^1$. Поэтому для $n > 2$ полное описание его решений представляет большие трудности и для построения их асимптотики по малому параметру ε следует рассматривать решения в некоторых подпространствах, инвариантных относительно отображения $f = f(\xi)$ соответствующего УР [44,45]. После определения решений в некотором подпространстве $\Xi_0 \subset C^1$ действием группы G мы получаем траекторию решений (семейство решений) в траектории $\tilde{\Xi}_0 = \bigcup\limits_{g \in G} Img(\Xi_0)$ подпространства Ξ_0.

Здесь интересен случай, когда Ξ_0 является множеством стационарных точек $st(H)$ некоторой подгруппы $H \subset G$. Как и в стационарном случае ([7,18]) это свойство (обобщенная "лемма об эквивариантном ветвлении") открывает возможности доказательства теорем существования семейств решений на основе теории степени отображения [16,17]. Отметим здесь непосредственно примыкающий к исследованиям Пуанкаре-Андронова-Хопфа случай $dim\Xi_0 = 2$ [41-46]. Только технические детали отличают общий случай от важной ситуации, когда мы разыскиваем решения, инвариантные относительно двумерного подпространства [21]. Ниже эта идея реализуется на примере симметрии относительно квадратной решетки. В этом простом случае $\Xi_0 = st(H)$ с $dim\Xi_0 = 2$ мы должны рассмотреть УР в двумерных подпространствах, где возможно полное его исследование по схеме [41-46] для $2n = 2$.

Итак, мы рассматриваем УР с симметрией квадратной решетки при $m = 1, p = q$. В качестве мономиальных инвариантов имеем $I_1(\xi) = \xi_1\xi_2\overline{\xi}_3\overline{\xi}_4$, $\overline{I_1(\xi)} = \overline{\xi}_1\overline{\xi}_2\xi_3\xi_4$ и УР имеет тот же вид, как в случае $m = 1, (p,q) = (\pm p, 0), (0, \pm p)$:

$$f_1(\xi;\mu,\varepsilon) = f_2(\xi;\mu,\varepsilon) = f_3(\xi;\mu,\varepsilon) = f_4(\xi;\mu,\varepsilon) = 0, \tag{23}$$

$$f_1(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{\alpha;k} (\xi\overline{\xi})^\alpha [a_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\xi_1^{k+1}(\xi_2\overline{\xi}_3\overline{\xi}_4)^k + b_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_1^{k-1}(\overline{\xi}_2\xi_3\xi_4)^k],$$

$$f_2(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{\alpha;k} (\xi\overline{\xi})^\alpha [a_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\xi_2^{k+1}(\xi_1\overline{\xi}_4\overline{\xi}_3)^k + b_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_2^{k-1}(\overline{\xi}_1\xi_4\xi_3)^k],$$

$$f_3(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{\alpha;k} (\xi\overline{\xi})^\alpha [a_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\xi_3^{k+1}(\xi_4\overline{\xi}_1\overline{\xi}_2)^k + b_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_3^{k-1}(\overline{\xi}_4\xi_1\xi_2)^k],$$

$$f_4(\xi;\mu,\varepsilon) \equiv \sum_{\alpha;k} (\xi\overline{\xi})^\alpha [a_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\xi_4^{k+1}(\xi_3\overline{\xi}_2\overline{\xi}_1)^k + b_{\alpha;k}(\mu,\varepsilon)\overline{\xi}_4^{k-1}(\overline{\xi}_3\xi_2\xi_1)^k],$$

где $a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;k} = a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_3;k}$, $b_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;k} = b_{\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_3;k}$ согласно инвариантности $f_1(\xi)$ относительно $P_{12} = (1)(2)(3,4)$.

Непосредственными вычислениями проверяется инвариантность следующих подпространств относительно отображения f (23)

$$\begin{gathered}\Xi_1 = (\xi_1, 0, 0, 0); \quad \Xi_{2,3} = (\xi_1, \pm\xi_1, 0, 0); \quad \Xi_4 = (\xi_1, 0, 0, \xi_1);\\ \Xi_5 = (\xi_1, 0, \xi_1, 0); \quad \Xi_{6,7} = (\xi_1, \pm\xi_1, \pm\xi_1, \xi_1); \quad \Xi_8 = (\xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2);\\ \Xi_9 = (\xi_1, \xi_2, 0, 0); \quad \Xi_{10} = (\xi_1, 0, 0, \xi_2); \quad \Xi_{11} = (\xi_1, 0, \xi_2, 0);\\ \Xi_{12,13} = (\xi_1, \pm\xi_1, \xi_2, \pm\xi_2); \quad \Xi_{14} = (\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_1).\end{gathered} \tag{24}$$

Нетрудно выписать стационарные подгруппы для каждого из указанных подпространств; однако случаи $p = q$ и $(\pm p, 0), (0, \pm p)$ должны рассматриваться отдельно.

В работе [40] выписана главная часть УР (23), затем УР рассмотрено в каждом из подпространств (24) и выписана асимптотика соответствующих малых решений.

6. Устойчивость разветвляющихся решений

Ветвление решений нелинейных уравнений тесно связано с понятием устойчивости решений. Оно возникает при потере устойчивости основным (тривиальным) решением эволюционного уравнения. Возникает вопрос об устойчивости решений, ответвившихся от тривиального. Здесь также будет максимально использоваться соответствующая конечномерная ситуация, связанная с УР ветвящихся решений и жордановой структурой оператор-функций (см. 2.1, §2 – уравнение разветвления в корневом подпространстве, теорема 2.3). Излагаются результаты работ [61-63,140]. Менее общая ситуация рассматривалась в работах [7,§3.1], 141-146].

А. В банаховых функциональных пространствах E_1, E_2 рассматривается уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = Bx + f(x,t), \quad ||f(x,t)|| = o(||x||), ||x|| \to 0, \tag{1}$$

где $A : D_A \subset E_1 \to E_2$, $B : D_B \subset E_1 \to E_2$, $D_A \subset D_B$ – замкнутые плотно определенные линейные операторы (B в некотором смысле подчинен A или ограничен). Операторы A и B фредгольмовы с подпространствами нулей $N(A) = span\{\phi_1, .., \phi_m\}$,

$N(B) = span\{\varphi_1, .., \varphi_n\}$ и дефектными подпространствами $N^*(A) = span\{\dagger_1, .., \dagger_m\}$; $N^*(B) = span\{\psi_1, .., \psi_n\}$ и $\{\theta_j\}_1^m, < \phi_k, \theta_j >= \delta_{kj}; \{\gamma_j\}_1^n, < \varphi_k, \gamma_j >= \delta_{kj}$; $\{Z\}_1^m, < Z_j, \dagger_k >= \delta_{jk}; \{z\}_1^n, < z_j, \psi_k >= \delta_{jk}$ – соответствующие биортогональные системы.

Определение 1. Определенное для $t \geq 0$ решение $x_0(t)$ уравнения (1) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$, $||x(0) - x_0(0)|| < \delta$ при $t > 0$ выполнено неравенство $||x(t) - x_0(t)|| < \varepsilon$, и асимптотически устойчиво, если кроме того $||x(t) - x_0(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$.

На основе теоремы 2.3 определены проекторы на корневые подпространства и с их помощью получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть в однородном линейном уравнении $A\frac{dx}{dt} = Bx$ оператор A фредгольмов, имеет полный обобщенный B-жорданов набор, и A-спектр $\sigma_A(B)$ обобщенной задачи на собственные значения $(B - \mu A)\varphi = 0$ лежит в левой полуплоскости $Re\{\mu|\mu \in \sigma_A(B)\} < 0$ (хотя бы одна точка $\sigma_A(B)$ попадает в правую полуплоскость). Тогда тривиальное решение линейного однородного уравнения (1) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) нелинейный оператор $f(x,t)$ непрерывно дифференцируем по x и t при $t \geq 0$, x из некоторой окрестности Ω точки $0 \in E_1$ до порядка l, где l максимальная длина B-жордановых цепочек базисных элементов $\{\phi_i\}_1^m \in N(A)$, причем $||D^j f(x,t)|| = o(||x||)$ при $||x|| \to 0$ (в автономном случае $f(x)$ непрерывно дифференцируема по x до порядка l). Если оператор A фредгольмов, имеет полный B-жорданов набор, и A-спектр $\sigma_A(B)$ обобщенной задачи на собственные значения $(B - \mu A)\varphi$ лежит в левой полуплоскости (хотя бы одна точка $\sigma_A(B)$ попадает в правую полуплоскость), то тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Теоремы 1,2 позволяют получить критерии устойчивости стационарных решений уравнения

$$A\frac{dx}{dt} = Bx - R(x,\varepsilon), \quad R(0,\varepsilon) = 0, \quad R_x(0,0) = 0, \tag{3}$$

ответвляющихся от тривиального. Пусть $x_0(\varepsilon)$ – стационарное решение (3). Заменой $y = x - x(\varepsilon)$ приведем (3) к виду $A\frac{dy}{dt} = B(\varepsilon)y + R_1(y,\varepsilon)$, где $B(\varepsilon)y = By - R_x(x_0(\varepsilon),\varepsilon)y$. Проверим выполнение условий теоремы 2. Если A имеет полный B-жорданов набор, то для малых ε оператор A будет иметь и полный $B(\varepsilon)$-жорданов набор. Действительно, в силу необходимого и достаточного условия полноты ОЖН [1,§31] оператор $A - \tau B$ обратим при малых τ. Тогда для малых ε оператор $A - \tau B(\varepsilon) = A - \tau B - \tau(B(\varepsilon) - B)$ также обратим. Следовательно, A имеет также полный $B(\varepsilon)$-жорданов набор.

Поэтому выполняется принцип линеаризованной устойчивости: ответвляющееся от $x = 0$ решение $x_0(\varepsilon)$ уравнения

$$Bx - R(x,\varepsilon) = 0 \tag{4}$$

устойчиво, если спектр $\sigma_A(B - R_x(x_0(\varepsilon),\varepsilon))$ производной Фреше $B - R_x(x_0(\varepsilon),\varepsilon))$ на решении $x_0(\varepsilon)$ лежит в левой полуплоскости, и неустойчиво, если существует хотя бы одна точка $\mu(\varepsilon) \in \sigma_A(B - R_x(x_0(\varepsilon),\varepsilon))$ в правой полуплоскости. Таким образом, вопрос об устойчивости разветвляющихся решений сводится к исследованию поведения точки $0 \in \sigma_A(B)$ при возмущении $R_x(x_0(\varepsilon),\varepsilon)$ в предположении, что $\sigma_A(B)\backslash\{0\}$ принадлежит левой полуплоскости. Если ответвившееся от $x = 0$ решение $x_0(\varepsilon)$ представляется рядом по дробной степени ε,будем считать, что произведена замена этой степени новой переменной, которая снова обозначена ε.

Резюмируем сказанное:

Пусть корневые числа $k(A;B) = q_1 + \cdots + q_m$ и $k(B;A) = p_1 + \cdots + p_n$ оператор-функций $A - \lambda B$ и $B - \mu A$ конечны. Тогда метод диаграммы Ньютона, примененный к μ-УРК (уравнению разветвления в корневом подпространстве) оператор-функции $B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon) - \mu A$ дает $f(\mu, \varepsilon) = 0$,

$$f(\mu,\varepsilon) \equiv det[< \{B - \mu A - R_x - R_x[(I-Q)(\mathrm{B} - \mu\mathrm{A} - \mathrm{R_x})]^{-1}(I-Q)\mathrm{R_x}\}\Phi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{s})}, \psi_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{p}+1-\sigma)} >],$$

где $\Phi_i^{(s)}$ и $\psi_j^{(k)}$ элементы триканонического ОЖН оператор-функций $B - \mu A$ и $B^* - \mu A^*$, (см. 2.1) позволяет вычислить главные члены асимптотики $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ A-собственных значений $\mu(\varepsilon)$ оператора $B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)$, ответвляющихся от собственного значения $\mu = 0$, и тем самым определить устойчивость стационарного решения $x_0(\varepsilon)$ уравнения (3).

Согласно методу Ляпунова-Шмидта [1], стационарное уравнение (4) сводится к эквивалентному УР (x-УР)

$$t_k(\xi,\varepsilon) \equiv \xi_k - < x, \gamma_k > = - < R(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon), \psi_k > = 0, \quad k = 1, \cdots, n. \tag{5}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $p_i = 1$, $i = 1, \cdots, n$ и корневое число $k(A;B) = q_1 + \cdots + q_m$ конечно. Пусть элементам $\{\varphi_i\}_1^n \in N(B)$ отвечает полный канонический ОЖН относительно оператор-функции $B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)$ с ОЖЦ длин $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$. Тогда стационарное решение $x(\varepsilon)$ уравнения (3) устойчиво, если для соответствующего решения $\xi(\varepsilon)$ (5) главные члены асимптотики собственных значений $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \cdots, n$, определяемые главной частью матрицы Якоби $\mathcal{J} = t_\xi = [\frac{\partial t_k}{\partial \xi_j}]$*

$$det[t_\xi(\xi(\varepsilon),\varepsilon) - \nu I)] =$$

$$= (-1)^n det[< R_x(x(\varepsilon),\varepsilon)(I - \Gamma R_x(x(\varepsilon),\varepsilon))^{-1}\varphi_j, \psi_k > + \nu\delta_{jk}], \tag{6}$$

имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво, если хотя бы одна из них положительна.

Доказательство. Записывая уравнение (4) в виде системы

$$\breve{B} = R(x,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j z_j,\ \xi_k = < x, \gamma_k >,\ k = \overline{1,n},\ \text{где}\ \Gamma = \breve{B}^{-1},\ \breve{B} = B + \sum_{j=1}^{n} < \cdot, \gamma_j > z_j,$$

получаем УР (5) стационарных решений. Из первого уравнения системы следует, что $x = \Gamma R(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i$. Поэтому $\frac{\partial x}{\partial \xi_k} = \Gamma R_x(x,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \xi_k} + \varphi_k$, откуда $\frac{\partial x}{\partial \xi_k} = [I - \Gamma R(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon)]^{-1}\varphi_k$, $k = 1, \cdots, n$. Следовательно, матрица Якоби $\mathcal{J} = [\frac{\partial t_k(\xi,\varepsilon)}{\partial \xi_j}]$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} t_k(\xi,\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} < R(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon), \psi_k > = - < R_x(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \xi_j}, \psi_k > =$$

$$= - < R_x(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon)[I - \Gamma R_x(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon)]^{-1}\varphi_k, \psi_k > .$$

Используя лемму Шмидта, сведем задачу $[B - R_x(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon) - \mu A]y = 0$ о ветвлении собственных чисел и элементов фредгольмова оператора B [1,§32] к эквивалентному μ-УР

$$L(\mu,\varepsilon) = \sum_{r+s\geq 1} L_{rs}\varepsilon^r \mu^s \equiv det[a_{ik}(\mu,\varepsilon)] = \tag{7}$$

$$= det[< (\mu A + R_x(x(\varepsilon), \varepsilon))[I - \Gamma(\mu A + R_x(x(\varepsilon)\varepsilon))]^{-1}\varphi_j, \psi_k >] = 0.$$

Так как $p_i = 1$, то $\Delta_1 = \det[< A\varphi_j, \psi_k >] \neq 0$. Согласно методу диаграммы Ньютона, μ-УР (7) имеет ровно n решений $\mu_j(\varepsilon)$.

Пусть символ $\{(\Gamma R_x)^s, (\Gamma A)^l\}$ означает сумму всевозможных произведений s операторов ΓR_x и l операторов ΓA. Тогда элементы $a_{jk}(\mu, \varepsilon)$ определителя (7) можно записать в виде

$$a_{jk}(\mu, \varepsilon) =< \Gamma R_x(I - \Gamma R_x)^{-1}\varphi_j + \sum_{l=1}^{\infty}\mu^l \sum_{s=0}^{\infty}\{(\Gamma R_x)^s, (\Gamma A)^l\}\varphi_j, \gamma_k >=$$

$$=< \Gamma R_x(I - \Gamma R_x)^{-1}\varphi_j + \sum_{l=1}^{\infty}\mu^l(I - \Gamma R_x)^{-1}[(\Gamma A)(I - \Gamma R_x)^{-1}]^l\varphi_j, \gamma_k > .$$

Так как ОЖЦ оператора $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ имеют длины r_j, $j = 1, ..., n$, можно показать, что $a_{sk}(\mu, \varepsilon) = a_{sk}^{0r_s}\varepsilon^{r_s} + \cdots + \mu < A\varphi_s, \psi_k > +\mu\sum_{j=1}^{\infty} a_{sk}^{1j}\varepsilon^j + \mu^2\sum_{j=0}^{\infty} a_{sk}^{2j}\varepsilon^j + \cdots$

Из линейного свойства определителя следует, что главные члены асимптотики $\mu_j(\varepsilon)$ (определяемые из (7)) и $\nu_j(\varepsilon)$ (определяемые из (6)) совпадают.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы 3 устойчивость стационарного решения $x(\varepsilon)$ уравнения (3) определяется принципом линеаризованной устойчивости для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = t(\xi, \varepsilon), \tag{8}$$

где $t(\xi, \varepsilon) = \{t_k(\xi, \varepsilon)\}_{k=1}^n$ определяется равенствами (5).

З а м е ч а н и е 1.

1^0. Теорема 3 и следствие остаются справедливыми, если $n \geq 2$ и одна из ОЖЦ оператора $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ имеет бесконечную длину. Для случая $A = I$ этот результат в иной интерпретации доказан в [144].

2^0. Результаты теоремы 3 и следствия, вообще говоря, неверны, если биортогональные системы $\{\varphi_j; \gamma_j\}_1^n$ нельзя выбрать так, чтобы соответствующий им ОЖН оператор-функции $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ был каноническим.

3^0. В [62,63] рассматривается общий случай $\infty > k(B, A) > n$.

B. В [140] рассмотрено уравнение вида

$$A_0\frac{d^s x}{dt^s} = A_1\frac{d^{s-1}x}{dt^{s-1}} + \cdots + A_{s-1}\frac{dx}{dt} + A_s x + f(x, t), ||f(x, t)|| = o(||x||), \tag{9}$$

где $A_k : D(A) \subset E_1 \to E_2, \overline{D}_A = E_1$ – замкнутые линейные операторы, A_0 и A_s – фредгольмовы. Предполагается, что в обозначениях $x_1 = x^{(s-1)}, x_2 = x^{(s-2)}, \cdots x_s = x$ (9) приводится к эквивалентному уравнению

$$\mathcal{A}_0\frac{dX}{dt} = \mathcal{A}X + F(X, t), \tag{10}$$

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & C, & \cdots, & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0, & 0, & \cdots, & C \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \cdots, & A_{s-1}, & A_s, \\ C, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0, & 0, & \cdots, & C, & 0 \end{pmatrix},$$

где $C \in L(E_1, E_2)$ -произвольный обратимый оператор [68-71].

О п р е д е л е н и е 2. Определенное при $t \geq 0$ решение $x_0(t)$ уравнения (10) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ с $\sum_{k=0}^{s-1} ||x^{(k)}(0) - x_0^{(k)}(0)|| < \delta$ при $t > 0$ выполнено неравенство $\sigma(t) = \sum_{k=0}^{s-1} ||x^{(k)}(t) - x_0^{(k)}(t)|| < \varepsilon$, и асимптотически устойчиво, если $\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Линеаризация (10) и результаты [68-71] позволяют получить обобщение теорем 1-3 для уравнения (9).

Т е о р е м а 4. Пусть операторы A_0 и A_s в уравнении (9) фредгольмовы, A_0 имеет полный ОЖН $\{\Phi_k^{(j)}\}$, $\quad j = 1, \cdots, q_k, \quad k = 1, \cdots, m$ относительно оператор-функции $A_0 - \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^k A_k$, и спектр $\sigma_A(A_s)$ обобщенной задачи на собственные значения $(A_s + \mu A_{s-1} + \cdots + \mu^{s-1} A_1 - \mu^s A_0)\varphi = 0$ лежит в левой полуплоскости $Re\{\mu | \mu \in \sigma_A(A_s)\} < 0$ (хотя бы одна точка $\sigma_A(A_s)$ попадает в правую полуплоскость). Тогда тривиальное решение линейного однородного уравнения (9) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Т е о р е м а 5. Пусть $F(X, t)$ непрерывно дифференцируема по X и t при $t \geq 1$ и X из некоторой окрестности Ω точки $0 \in \underbrace{E_1 \times \cdots \times E_1}_{s}$ до порядка l, где l – максимальная длина ОЖЦ базисных элементов $\{\Phi_k^{(j)}\}_1^m \in N(A_0)$ относительно оператор-функции $A_0 - \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^k A_k$, причем $||D^j F(X, t)|| = o(||X||)$ при $||X|| \to 0, \quad j = 1, ..., l$ равномерно по $t \geq 0$ (в автономном случае $F(X)$ непрерывно дифференцируема по X до порядка l). Если фредгольмов оператор A_0 имеет полный ОЖН относительно оператор-функции $A_0 - \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^k A_k$ и спектр $\sigma_A(A_s)$ обобщенной задачи на собственные значения $(A_s + \mu A_{s-1} + \cdots + \mu^{s-1} A_1 - \mu^s A_0)\varphi = 0$ лежит в левой полуплоскости (хотя бы одна его точка попадает в правую полуплоскость),то тривиальное решение уравнения (9) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Как и в случае уравнения (3), теоремы 4,5 позволяют получить результаты об устойчивости стационарных разветвляющихся решений уравнения

$$A_0 \frac{d^s x}{dt^s} - A_1 \frac{d^{s-1} x}{dt^{s-1}} - \cdots - A_{s-1} \frac{dx}{dt} = A_s x - R(x; \varepsilon) = 0,$$

$$R(0, \varepsilon) \equiv 0, R_x(0, 0) = 0. \tag{11}$$

Справедлив принцип линеаризованной устойчивости: ответвляющееся от тривиального $x = 0$ решение $x_0(\varepsilon)$ уравнения

$$A_s x - R(x, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

устойчиво, если спектр $\sigma_A(A_s - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon))$ оператор-функции

$$A_s - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon) + \mu A_{s-1} + \cdots + \mu^{s-1} A_1 - \mu^s A_0, \tag{13}$$

т.е. спектр $\sigma_A(A_s - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon))$ производной Фреше оператора (12) на решении $x_0(\varepsilon)$ лежит в левой полуплоскости, и неустойчиво, если существует хотя бы одна точка $\sigma_A(A_s - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon))$, принадлежащая правой полуплоскости.

Тогда можно сформулировать следующее утверждение. Пусть корневые числа: $k(A_0; A_1, \cdots, A_s) = q_1 + \cdots + q_m$ и $k(A_s; A_{s-1}, \cdots, A_1, A_0) = p_1 + \cdots, p_n$ конечны. Тогда метод диаграммы Ньютона, примененный к УРК оператор-функции (13), позволяет вычислить главные члены асимптотики $p = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ собственных значений $\mu(\varepsilon)$ задачи $(A_s - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon) + \mu A_{s-1} + \cdots + \mu^{s-1} A_1 - \mu^s A_0)\varphi = 0$, ответвляющихся от собственного значения $\mu(0) = 0$, и тем самым определить устойчивость (неустойчивость) стационарного решения $x_0(\varepsilon)$.

Т е о р е м а 6. *Пусть $p_i = 1, \quad i = 1, ..., n$, корневое число $k(A_0; A_1, \cdots, A_s) = q_1 + \cdots + q_m$ конечно и элементам $\{\varphi_i\}_1^n \in N(A_s)$ отвечает полный канонический ОЖН оператор-функции $B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)$ с ОЖЦ длин $r_1 \le r_1 \le \cdots \le r_n$. Тогда стационарное решение $x_0(\varepsilon)$ уравнения (11) устойчиво, если для соответствующего решения $\xi_0(\varepsilon)$ x-УР (5) главные члены асимптотики собственных значений $\nu_j(\varepsilon), \quad j = 1, ..., n$, определяемые главной частью матрицы Якоби $\mathcal{J} = t_\xi = [\frac{\partial t_k}{\partial \xi_j}]$*

$$det[t_\xi(\xi_0(\varepsilon), \varepsilon) - \nu I)] =$$

$$= (-1)^n det[< R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)(I - \Gamma R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon))^{-1}\varphi_k, \psi_j > + \nu\delta_{jk}] = 0,$$

имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво, если хотя бы одна из них положительна.

Справедливы аналоги следствия теоремы 3 и замечания 1.

С. Рассмотрим схему исследования устойчивости разветвляющихся решений в условиях групповой инвариантности. Пусть уравнение (3) допускает l-параметрическую группу симметрии G, т.е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2, такие что для любого $g \in G$ $AL_g x = K_g Ax$, $BL_g x = K_g Bx$, $R(L_g x, \varepsilon) = K_g R(x, \varepsilon)$. Отсюда следует, что подпространства нулей $N(A)$ и $N(B)$ фредгольмовых операторов A и B инвариантны относительно L_g, а области их значений инвариантны относительно K_g. Корневые подпространства оператор-функций $A - \lambda B, \quad B - \mu A$ и $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ также инвариантны относительно операторов L_g. В инвариантном подпространстве $N(B) = E_1^n \quad L_g$ индуцирует n-мерное представление

$$\mathcal{A}_g = [\alpha_{ij}(g)]_{i,j=1}^n, \tilde{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j, \varphi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i \in N(B), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \Xi_\varphi^n \qquad (14)$$

(см. §1,2). Без ограничения общности предположим, что полный канонический ОЖН оператор-функции $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ расположен по возрастанию длин ОЖЦ, т.е.

$$p_1 = \cdots = p_{i_1} < p_{i_1+1} = \cdots = p_{i_1+i_2} < \cdots < p_{i_1+\cdots+i_{k-1}+1} = \cdots = p_{i_1+\cdots+i_k}.$$

Тогда длина $p_i(\varphi)$ ОЖЦ (определяемых однозначно условием $< \varphi_s^{(j)}, \gamma_k >= 0, \ j > 1$) произвольного элемента $\varphi \in N(B)$ определяется номером первой ненулевой проекции на подпространство, натянутое на множество элементов φ_i с одинаковой длиной ОЖЦ, и для любого $g \in G$ разложение элемента $L_g\varphi$ по базису $\{\varphi_i\}_1^n$ начинается с номеров этого множества. Операторы L_g индуцируют в координатном пространстве Ξ_φ^n нижнюю блочно-треугольную матрицу $\mathcal{A}_g$, т.е. $\alpha_{kj}(g) = 0$ при $p_k < p_i$. Если группа $\mathcal{A}_g$ компактна, то матрицы $\mathcal{A}_g$ имеют блочно-диагональный вид.

При действии группы $\mathcal{A}_g$ n-мерное векторное пространство Ξ_φ^n расслаивается на траектории. Пусть для l-параметрической непрерывной группы (14) $\eta = [\eta_\nu^j(\xi)]_{\substack{j=\overline{1,n} \\ \nu=\overline{1,l}}}$

матрица координат операторов $X_\nu = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_\nu^j(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $\nu = 1, \cdots, l$ соответствующей алгебры Ли. Пусть ее общий ранг равен $n - l_1 \leq l$. Тогда система $X_\nu I(\xi) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l$ имеет l_1 функционально независимых решений - инвариантов $\{I_j(\xi)\}_{j=1}^{l_1}$. Траектории общего положения определяются системой вида $I_j(\xi) = c_j, \quad j = 1, \cdots, l_1$ и имеют размерность $n - l_1$. Порождающие многообразия для траекторий группы (14) в Ξ_φ^n определяются как трансверсальные к этим траекториям и могут быть как подпространствами, так и нелинейными многообразиями. В условиях групповой симметрии решения уравнения (4), если они существуют, не являются простыми, т.е. производная Фреше на решении не является обратимым оператором. Действительно, вместе с любым решением $x_0(\varepsilon)$ решением является также $x(a, \varepsilon) = L(a)x_0(\varepsilon)$, где $L(a)$, $a = (a_1, \cdots, a_l)$, l-параметрическая группа симметрии нелинейного уравнения. Все малые решения представимы в виде l-параметрических семейств $x = L(a)x'$, где x' – общее малое решение в порождающем подпространстве M_{i_0} из полной минимальной системы $\mathcal{M}$ порождающих подпространств в E_1^n. Эквивалентное (4) УР наследует симметрию (14). Согласно определению линейного касательного многообразия $T_{x_0}x(a, \varepsilon)$ к семейству $x(a, \varepsilon)$ в точке $x_0(\varepsilon)$, для уравнения (4) имеем

$$[B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)](L_\nu x_0(\varepsilon)) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, l, \tag{15}$$

а для соответствующего УР

$$t_\xi(\xi_0(\varepsilon), \varepsilon)[\Lambda_\nu \xi_0(\varepsilon)] = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, l_1, \tag{16}$$

где $\xi_0(\varepsilon)$ – решение УР, соответствующее $x_0(\varepsilon)$; L_ν и Λ_ν, $\nu = 1, \cdots, l$ – являются инфинитезимальными представлениями алгебры Ли в E_1^n и Ξ_φ^n.

Так как ранг матрицы η в точках траекторий наибольшей размерности (общего положения) и в точках соответствующих порождающих многообразий равен $n - l_1$, то эти точки имеют стационарные подгруппы размерности $l - (n - l_1)$, и $l + l_1 - n$ решений (15),(16) оказываются линейно зависимыми. Согласно [7] размерность подпространства нулей производной Фреше $B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)$ нелинейного оператора $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = Bx(\varepsilon) - R(x(\varepsilon), \varepsilon)$ равна числу ее ОЖЦ бесконечной длины. Следовательно, для решения $x_0(\varepsilon)$, не зависящего от негрупповых параметров, построенного в порождающем подпространстве старшей размерности l_1, мы имеем $\dim N(B - R_x(x(\varepsilon), \varepsilon)) = n - l_1$ и среди ОЖЦ оператор-функции $B - R_x(x_0(\varepsilon), \varepsilon)$ существует $n - l_1$ цепочек бесконечной длины.

Поэтому в условиях групповой симметрии ответвляющееся семейство решений (соответствующее траекториям старшей размерности) уравнения (4) должно определяться как устойчивое, если A-спектр производной Фреше содержит $(n - l_1)$-кратный ноль, а другие его точки лежат в левой полуплоскости. В теореме 3 мы будем иметь $n - l_1$ ОЖЦ бесконечной длины и такое же количество нулевых собственных значений матрицы Якоби $\mathcal{J}$. Знаки главных частей асимптотики остальных собственных значений определяют устойчивость (неустойчивость) ответвившегося семейства решений. Таким образом, устойчивость разветвляющихся семейств решений определяется принципом линеаризованной устойчивости для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), в правой части которой стоит соответствующее выражение УР.

З а м е ч а н и е 2.

1^0. Идеи раздела **C** переносятся на случай уравнения (14).

2^0. Результаты, полученные в этом параграфе, были применены к исследованию устойчивости разветвляющихся периодических семейств решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в слое жидкости над ровным дном [147] и о рельефе магнитной жидкости [136] относительно возмущений того же периода.

Литература

[1] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 524С.; Noordorf Int. Publ., Leyden, 1974.

[2] Любарский Г.Я. Теория групп и ее применения в физике. М.: ГИТТЛ, 1958. 356С.

[3] Юдович В.И. Свободная конвекция и ветвление // ПММ, 1967. N31. С.101-111.

[4] Овчинникова С.Н., Юдович В.И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1968. 32. С.858-868.

[5] Логинов Б.В., Треногин В.А. О применении непрерывных групп в теории ветвления // ДАН СССР, 1971. N197. С.36-39; Soviet Math. Dokl., 1971. N12.

[6] Логинов Б.В., Треногин В.А. Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений. Математический Сборник, 1971. N85. С.440-454; Math. USSR Sbornik, 14(1971). 3. P.438-452.

[7] Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Ташкент, Фан, 1985. 184С.

[8] Логинов Б.В., Треногин В.А. Идеи групповой инвариантности в теории ветвления // V Казахстанская межвузовская конференция по математике и механике. Ч.I. Математика, Алма-Ата, 1974, С.206-208.

[9] Логинов Б.В., Треногин В.А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления, ДУ, 11(1975),8,1518-1521.

[10] Sattiger D.H. Group representation theory and branch points of nonlinear equations // SIAM J. Math.Anal., 8(1977), 2, 179-201.

[11] Sattinger D.H. Group representation theory,bifurcation theory and pattern formation // J. Funct. Anal., 28(1978). 1. 58-101.

[12] Sattinger D.H. Group theoretic methods in bifurcation theory // Lecture Notes in Math., 762(1979). 240P.

[13] Логинов Б.В. Задачи теории ветвления, инвриантные относительно группы движений R^s // Известия АН УзССР, 1978,3,20-23.

[14] Логинов Б.В. Применение теории ветвления в условиях групповой инвариантности при построении периодических решений задачи о фазовых переходах в статистической теории кристалла // УМН,36(1981),4,209-210.

[15] Логинов Б.В. Применение теории ветвления с групповой инвариантностью при построении периодических решений задачи о фазовых переходах в статистической теории кристалла // "Дифференциальные уравнения и вопросы теории ветвления", Ташкент, 1982. С.54-91.

[16] Треногин В.А., Сидоров Н.А. Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений нелинейных уравнений // Дифференциальные и интегральные уравнения, Иркутский ун-т, 1(1972). С.216-247.

[17] Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления // Иркутский Университет, 1982. 314С.

[18] Логинов Б.В. Об инвариантных решениях в теории ветвления // ДАН СССР, 246(1979),5,1048-1051.

[19] Логинов Б.В. Инварианты и инвариантные решения в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения, Ташкент, 1978. С.117-133.
[20] Vanderbauwhede A. Local bifurcation and symmetry, Habilitation Thesis, Rijksuniversiteit Gent, 1980.
[21] Vanderbauwhede A. Local bifurcation and symmetry // Res.Notes Math., 75(1982), Pitman, Boston. 350P.
[22] Cicogna G. Symmetry breakdown from bifurcation // Letters Nuovo Cimento, 31(1981). P.600-602.
[23] Golubitsky M., Schaeffer D. Singularities and groups in bifurcation theory // Appl.Math.Sci., 51(1),1984. 463P.
[24] Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D. Singularities and groups in bifurcation theory, 69(2), 1985. 534P.
[25] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 256С.; Springer Verlag, Berlin, 1989.
[26] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, НГУ, 1966 - 131 С.
[27] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400С.; Academic Press, NY, 1992.
[28] Логинов Б.В., Рахматова Х.Р., Юлдашев Н.Н. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографические группы) // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей, Ташкент, 1987. С.183-195.
[29] Loginov B.V. On the construction of the general form of branching equation by its group symmetry, EquaDiff-YII, Enlarged Abstracts, Praha, 1989. P.48-50.
[30] Логинов Б.В., Сабирова С.Г. О построении периодических решений нелинейно возмущенных эллиптических уравнений // Известия АН УзССР, 1988. N4. С.32-37.
[31] Loginov B.V. Group analysis methods for construction and investigation of the bifurcation equation // Applications of Mathematics, 37(1992),4,P.241-248.
[32] Логинов Б.В., Юлдашев Н.Н. О построении уравнения разветвления, допускающего группу SO(3) // Узбекский математический журнал, 1992. N5/6. С.52-58.
[33] Логинов Б.В. Общий подход к исследованию бифуркации рождения цикла в условиях групповой симметрии // Известия АН УзССР, 1990. N6. С.16-18.
[34] Логинов Б.В. Об определении уравнения разветвления его группой симметрии // Доклады РАН, 331(1993). N6. С.677-680; Russ. Acad. Sci. Dokl. Math., 48(1994). 1. P.203-205.
[35] Loginov B.V. On the determination of branching equation in nonstationary branching by its group symmetry, Modern Group Analysis and Problems of Mathematical Modelling, Proc. XI Russian Colloq., Samara University, 7-11 June 1993. P.112-114.
[36] Loginov B.V. Bifurcation equation of nonstationary branching with symmetry induced by spatial variables // Uzbek Math. J.,1995. N1. P.58-67.
[37] Loginov B.V. Determination of the bifurcation equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation, Nonlinear Analysis. TMA, 28(1997),12, P.2033-2047.
[38] Логинов Б.В. Групповой анализ в задачах о нарушении симметрии, Материалы межд. конф. "ДУ и их приложения", Мордовский Университет, Саранск, 20-22.12.94, 1995. С.103-119.

[39] Loginov B.V., Trenogin V.A. Group Symmetry of Bifurcation Equation in Dynamic Branching, ZAMM, 76(1996),suppl.2. P.237-240.

[40] Loginov B.V., Trenogin V.A. Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions, CHAOS, Amer.Inst.Phys., 7(2)(1997). P.229-238.

[41] Юдович В.И. Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ, 35(1971). 4. С.638-655; // J.Appl. Math.Mech.,35(1971).

[42] Юдович В.И. Исследование колебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ, 36(1972). 3. С.450-459; // J.Appl.Math.Mech.,36(1972).

[43] Треногин В.А. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, встречающиеся в синергетике, КДУ-III "Дифференциальные уравнения и их приложения", Руссе, Болгария, 1985. I. С.421-428.

[44] Моршнева И.В., Юдович В.И. О ветвлении циклов из положений равновесия систем с инверсионной и вращательной симметрией // СМЖ, 26(1985). 1. С.124-133.

[45] Моршнева И.В. Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и свободная конвекция в жидкости: дис. канд. ф.м.н. Ростов-на-Дону, 1989. 130С.

[46] Треногин В.А. Периодические решения и решения типа перехода в абстрактных уравнениях реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1988. С.134-140.

[47] Рудин У. Функциональный анализ, М.: Мир, 1975. 445С.

[48] Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия изложенные методом подвижного репера, М.:МГУ, 1963. 360С.

[49] Логинов Б.В. О ветвлении решений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = f(u)$ на сфере // ДУ, 8(1972). 10. С.1816-1824.

[50] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. О ветвлении решений уравнения $\Delta w + \lambda w = f(w)$ на гиперповерхности // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент, 4(1974). С.129-136.

[51] Логинов Б.В. Дополнение к статье Л.А.Слобожанина "Об одной задаче ветвления цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости" // Математическая физика и функциональный анализ. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1972. 3. С.52-55.

[52] Логинов Б.В. Периодические решения трехмерной задачи о капиллярно- гравитационных волнах над ровным дном // Динамика сплошной среды, СО АН СССР, 42(1979). С.3-22.

[53] Логинов Б.В. Построение периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном // ДАН СССР, 247(1979). 2. С.324-328.

[54] Логинов Б.В. Периодические решения трехмерной задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном - II // Краевые задачи для дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ташкент, 1983. С.90-104.

[55] Vanderbauwhede A. Symmetry and bifurcation near families of solutions // J.Diff.Eq. 36(1980). P.173-187.

[56] Vanderbauwhede A. Note on symmetry and Bifurcation near families of solutions // J.Diff.Eq. 47(1983). P.99-106.

[57] Логинов Б.В. Общая задача теории ветвления в условиях групповой симметрии // Узбекский Математический журнал, 1991. N1. С.39-45.

[58] Логинов Б.В., Сидоров Н.А. Общий метод построения уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и некоторые способы его исследования: X Межд. Конф. по нелинейным колебаниям, Варна, 12-17.9.84, 1985. С.356-359.

[59] Логинов Б.В., Сидоров Н.А. Общий метод построения уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и некоторые способы его исследования // Неклассические задачи математической физики. Ташкент, 1985. С.113-145.

[60] Nashed Z. Generalized Inverses and Applications, AP, NY, 1976. 1006P.

[61] Логинов Б.В. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с вырожденным оператором при производной // Известия АН УзССР, 1988. N1. С.28-32; N2. С.78.

[62] Loginov B.V., Rusak Yu.B. On the role of generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions, III Colloq. on Qualitative Theory of Diff.Eq., 22-26.08.1988, Szeged, Hungary.

[63] Loginov B.V., Rusak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions, Nonlinear Analysis. TMA, 17(1991). 3. P.219-231.

[64] Логинов Б.В. Уравнение разветвления в корневом подпространстве: групповая симметрия и потенциальность // Функциональный анализ. Ульян. гос. пед. ун-т. 35(1994). С.16-28.

[65] Loginov B.V. Branching equation in the root subspace, Nonlinear Analysis. TMA, 32(1998). 3. P.439-448.

[66] Сидоров Н.А., Благодатская Е.Б. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении // ДАН СССР, 319(1991). С.1087-1090.

[67] Loginov B.V., Sidorov N.A., Trenogin V.A. Existence of bifurcation at the presence of Jordan chain of an odd length // Uzbek Math. J., 1993. 3. P.64-68.

[68] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения. Ташкент, 1978. С.113-148.

[69] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и ее роль в теории ветвления. Деп. в ВИНИТИ. N1782-77. 81С. Дополнение N29-78. 11С.

[70] Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней // Известия АН УзССР, 1978. 2. С.15-19.

[71] Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1979. 126С.

[72] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Полные жордановы наборы в линейных задачах теории ветвления с групповой симметрией // Дифференциальные уравнения и их применения в механике. Ташкент, 1985. С.136-153.

[73] Логинов Б.В. О понижении порядка уравнения разветвления в условиях групповой инвариантности // Известия АН УзССР, 1981. 6. С.19-25.

[74] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований, М.: Иностр. лит., 1947. 359С.

[75] Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. М.;Л.:ГИТТЛ, 1940. 396С.

[76] Логинов Б.В.,Рахматова Х.Р., Применение теории ветвления с групповой инвариантностью при построении уравнения разветвления периодических решений задачи о фазовых переходах в статистической теории кристалла // Дифференциальные уравнения и их примененния в механике. Ташкент, 1985. 114-136С.

[77] Наймарк М.А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976. 560С.

[78] Владимиров С.А., Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии // ДУ, 12(1975). 7. С.1180-1189.

[79] Rabinowitz P.H. Some aspects of nonlinear eigenvalue problems // Rocky Mountain J.Math. 3(1973). P.161-202.

[80] Логинов Б.В. Инварианты и инвариантные решения в теории ветвления II // Краевые задачи для уравнений математической физики. Ташкент, 1980. С.99-110.

[81] Логинов Б.В. О вариационных методах в теории ветвления в условиях групповой инвариантности // ДУ, 15(1979). 9. С.1724-1726.

[82] Логинов Б.В., Вариационные методы в теории ветвления и групповая инвариантность: Труды международного симпозиума "Теоретоко-групповые методы в механике". Новосибирск, 1978. С.168-177.

[83] Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов, М.: Мир, 1974. 280С.

[84] Логинов Б.В., Карпова С.А. О потенциальности уравнения разветвления в критических явлениях механики сплошных сред // Механика и процессы управления. Ульян. гос. тех. ун-т, Ульяновск, 1998. С.26-34.

[85] Логинов Б.В., Сидоров Н.А. Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и итерационные методы в задаче о точках бифуркации: математический сб., 182(1991). 5. С.681-691.

[86] Berger M. Perspectives in Nonlinearity. Benjamin, NY, 1968. 189P.

[87] Логинов Б.В. О применении векторных инвариантов для определения общего вида уравнения разветвления в условиях групповой инвариантности // ДАН СССР, 259(1981). 5. С.1045-1050.

[88] Вейль А. Классические группы, их инварианты и представления, М.:Иностр. лит., 1947. 408С.

[89] Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир. 158С.

[90] Лохин В.В.,Седов Л.И. Описание с помощью тензоров дискретных групп симметрии // ДАН СССР, 149(1963).

[91] Логинов Б.В. Симметрия основного представления группы SO(n) в теории ветвления // Известия АН УзССР, 1987. 5. С.33-35.

[92] Trenogin V.A., Sidorov N.A., Loginov B.V. Potentiality, group symmetry and bifurcation in the theory of branching equation, Differential and Integral Equations, An Int. J. Theory Appl., 3(1990). 1. P.145-152.

[93] Треногин В.А., Сидоров Н.А., Логинов Б.В. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркация, симметрия // ДАН СССР, 309(1989). 2. С.286-289.

[94] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп, М.: Наука, 1965. 588С.

[95] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.2, М.: Мир, 1984. 384С.

[96] Шелепин Л.А. Исчисление коэффициентов Клебша-Гордана и его физические приложения // Труды ФИАН СССР, 70(1973). С.3-119.

[97] Карасев В.П. Теоретико-групповой анализ сложных физических систем // Труды ФИАН СССР, 70(1973). С.147-220.

[98] Юдович В.И. О возникновении конвекции // ПММ, 30(1966). 6. С.1000-1005.

[99] Тер-Григорьянц Г.К. О возникновении двоякопериодической конвекции в горизонтальном слое // ПММ, 37(1973). 1. С.177-184.

[100] Тер-Григорьянц Г.К. Об устойчивости стационарных двоякопериодических конвекционных потоков в слое // Известия Северо-Кавказского научн. центра высшей школы, естеств. науки, 1973. 4. С.79-83.

[101] Тер-Григорьянц Г.К. Об одном случае ветвления стационарных режимов конвекции в слое // Известия Северо-Кавказского научн. центра высшей школы, естеств.науки, 1975. 4. С.39-43.

[102] Киттель Ч. Введение в физику твердого тела, М.: Наука, 1978. 792С.

[103] Хейне В. Теория групп в квантовой механике, М.: Иностр. лит., 1969. 522С.

[104] Тябликов С.В. К вопросу о кристаллизации // ЖЭТФ, 17(1947). 5. С.386-389.

[105] Власов А.А. Теория многих частиц, М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 348С.

[106] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике, М.;Л.: Гостехиздат, 1946. 120С.

[107] Венков Б.А. Введение в элементарную теорию чисел, М.;Л.: ГИТТЛ, 1937. 219С.

[108] Логинов Б.В., Кузнецов А.О. Вычисление периодических решений трехмерной задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Ташкент, 1986. С.296-314.

[109] Логинов Б.В., Кузнецов А.О. Вычисление малых периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном // Неклассические уравнения математической физики и задачи теории ветвления, Ташкент, 1988. С.104-117.

[110] Юлдашев Н.Н. Определение общего вида уравнения разветвления по его группе симметрии: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1991. 140С.

[111] Юлдашев Н.Н. Построение уравнения разветвления с кристаллографической группой симметрии, Деп. в ВИНИТИ. N.627-B89. 1989. 85С.

[112] Логинов Б.В., Эргашбаев Т. Многомерное ветвление и задача о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности цилиндра // Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 95(1993). С.89-100.

[113] Некрасов А.И. О волнах установившегося вида // Известия Ивановского политех. ин-та., 6(1922). С.155-171.

[114] Некрасов А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, М.: АН СССР, 1951. 96С.

[115] Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie // Mathematische Annallen, 93(1925). P.264-314.

[116] Struik D. Determination rigoureuse des ondes irrotationelles periodiques dans une canal a profondeur finie // Mathematische Annallen, 95(1926). P.595-634.

[117] Kochin N.E. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie a la surface de separation de deux liquides de profondeur finie // Mathematische Annallen, 98(1928). P.582-615.

[118] Габов С.А. О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // ЖВМиМФ, 28(1988). 10. С.1507-1519.

[119] Габов С.А.,Свешников А.Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости. // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.:ВИНИТИ, 28(1990). С.3-86.

[120] Логинов Б.В., Трофимов Е.В. Вычисление асимптотики капиллярно-гравитационных волн на границе раздела двух жидкостей // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения, Ташкент, 1989. С.57-66.

[121] Трофимов Е.В. Ветвление решений нелинейной задачи о поверхностных волнах на границе раздела двух жидкостей: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1993. 114С.

[122] Эргашбаев Т. О ветвлении решений нелинейных уравнений с группой симметрии на многообразиях: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1991. 117С.

[123] Loginov B.V., Kuznetsov A.O. Capillary-gravity waves over the flat surface // European J. Mech. B/Fluids, 15(1996). 2. P.259-280.

[124] Логинов Б.В., Карпова С.А. Вычисление периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости // Вестник СамГУ, Самара, 1997. N4(6). С.69-80.

[125] Логинов Б.В.,Карпова С.А. Высокие вырождения в задаче о потенциальных течениях флотирующей жидкости в пространственном слое со свободной верхней границейс // Вестник Ульян. тех. ун-та., 1998.

[126] Loginov B.V., Karpova S.A.,Trenogin V.A. Bifurcation, symmetry and parameter continuation in some problems about capillary-gravity waves // Progress in Industrial Mathematics at ECMI-96, Teubner, Stuttgart, 1997. P.432-439.

[127] Loginov B.V., Trenogin V.A., Velmisov P.A. Bifurcation and stability in some problems of continua mechanics // ZAMM, 76(1996). suppl.2. P.241-245.

[128] Агранович М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.: ВИНИТИ, 63(1990). С.5-129.

[129] Карпова С.А. О порядке вырождения линеаризованного оператора в задаче о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности флотирующей жидкости. Материалы III Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения", 19-21.05.1998, Мордовский Университет, Саранск, С.199-200.

[130] Kochin N.E., Uber den Einfluss des Bodenprofils auf die Wellen an der Grenzflache von zwei Flussigkeiten verschiedener Dichte // Известия АН СССР, ОМЕН, сер.геогр. и геофиз., 1937. N3. P.357-381.

[131] Кочин Н.Е. О влиянии рельефа Земли на волны на границе раздела двух жидких масс различных плотностей // Труды Главной Геофизической Обсерватории, 1937. Т.14. С.19-30.

[132] Loginov B.V.,Trenogin V.A. Bifurcation theory methods in the problem about capillary-gravity waves on the interface of two-fluids flow // Proceedings of ECMI-98, Goteborg, Sweden, P.78-86.

[133] Twombley E.E., Thomas J.W. Bifurcation instability of the free surface of a ferrofluid // SIAM J.Math.Anal., 14(1983). 4. P.736-767.

[134] Silber M., Knobloch E. Pattern selection in ferrofluids // Physica D, 30(1988). 1. P.83-98.

[135] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика, М.: Мир, 1989. 360С.

[136] Абдуллаева Ф.Дж. Ветвление и устойчивость решений системы дифференциальных уравнений для определения свободной поверхности магнитной жидкости: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1993. 82С.

[137] Loginov B.V. Bifurcation and stability in free boundary value problem about the surface of ferrofluid in magnetic field. International Conference "Boundary Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus", 16-20.02.1996, dept of math. mech. Belarusian university, Minsk, P.145.

[138] Логинов Б.В. Треногин В.А. Задачи со свободной границей для уравнения Лапласа, капиллярно-гравитационные волны в пространстве, бифуркация, симметрия // ДУ, 34(1998). С.8.

[139] Азизова А.А. Методы группового анализа при построении и исследовании уравнения разветвления: дис. канд. ф.м.н. Ташкент, Институт математики АН УзССР, 1993. 89С.

[140] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной, материалы III межд. конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения", 19-21.05.1998, Мордовский ун-т., Саранск. С.44-46.

[141] Сидоров Н.А. Вариационные методы в теории точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений нелинейных уравнений, Дифференциальные и интегральные уравнения, Иркутский ун-т., 2(1972). С.255-270.

[142] Логинов Б.В. Об устойчивости решений задачи о точках бифуркации // ДАН УзССР, 1980. 8. С.5-7.

[143] Логинов Б.В. Об устойчивости решений задачи о точках бифуркации, Труды II Межд. Конференции "ДУ и их применения", Руссе, Болгария, 1982. Т.2. С.441-444.

[144] Kielhoffer H., Lauterbach R., On the principle of reduced stability // J.Funct.Anal., 53(1983). 2. P.99-111.

[145] Логинов Б.В., Ким-Тян Л.Р. Об устойчивости разветвляющихся решений // ДУ, 24(1988). N4. С.695-698.

[146] Сидоров Н.А., Толстоногов Д.А. Применение теории Морса в исследовании точек бифуркации и неустойчивость дифференциальных уравнений, Иркутский ВЦ СО АН СССР, препринт N7, 1989.

[147] Ким-Тян Л.Р. Об устойчивости разветвляющихся решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в слое жидкости над ровным дном // Узбекский математический журнал, 1993. N5.

BRANCHING OF SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS AND GROUP SYMMETRY.

B.V. Loginov[2]

A survey of the author' investigations on the usage of continuous and discrete group symmetry for construction and investigation of branching equation at stationary and Andronov – Hopf bifurcation is given. The advantages of group analysis methods (RẐMat 1978 11Б883K) in this direction are based. It is shown that the bifurcation theory methods allow to investigate also the stability of bifurcating solutions (RẐMat 1992 7Б916). Applications to symmetry breaking problems (phase transitions theory, surface waves) are given.

[2]Loginov Boris Vladimirovich, dept. of Math. Ulyanovsk technical university