ТОЧНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.М. Беркович, И.С. Орлова[1]

В работах [1,2] был представлен метод точной линеаризации нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) n–го порядка, предложенный одним из авторов. Этот метод основан на факторизации нелинейных ОДУ через нелинейные дифференциальные операторы первого порядка, а также на использовании как точечных, так и неточечных преобразований. В настоящей работе дана точная линеаризация некоторых классов ОДУ 2–го, 3–го и 4–го порядков, причем впервые найден общий вид автономных уравнений 4–го порядка, допускающих точную линеаризацию с помошью неточечного преобразования. Получены в квадратурах формулы для нахождения общих и частных решений исследуемых классов уравнений.

1. Предварительные замечания

Важную роль для данной работы играет следующий результат, вытекающий из результата, анонсированного в [1,2], и приводимый ниже с доказательством.

ЛЕММА 1. Для того чтобы уравнение

$$y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (') = d/dx \tag{1.1}$$

обратимым преобразованием

$$y = v(y)z, \qquad dt = u(y)dx, \tag{1.2}$$

где $v(y)$ и $u(y)$ суть достаточно гладкие функции в области $\Gamma(x, y)$, не аннулирующиеся в ней, привести к линейному автономному виду

$$z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) + c = 0, \quad b_k = const, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы (1.1) можно было представить в виде

$$\prod_{k=1}^{n} [\frac{1}{u} D - \frac{v^*}{vu} y' - r_k] y + cv = 0, \ D = d/dx, \ (*) = d/dy \tag{1.4}$$

[1]Беркович Лев Мейлихович, Орлова Ирина Сергеевна, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

через нелинейные дифференциальные операторы первого порядка (коммутативная факторизация), или

$$\prod_{k=n}^{1}[D-(\frac{v^*}{v}+(k-1)\frac{u^*}{u})y'-r_k u]y+cu^n v=0 \tag{1.5}$$

(некоммутативная факторизация), где r_k суть корни характеристического уравнения

$$r^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_k r^{n-k}=0. \tag{1.6}$$

• **Необходимость.** Представим (1.3) в виде

$$\prod_{k=n}^{1}(D_t-r_k)z+c=0, \quad D_t=d/dt. \tag{1.7}$$

Применим к (1.7) преобразование, обратное к (1.2)

$$z=v^{-1}y, \qquad dx=u^{-1}dt:$$

$$\prod_{k=n}^{1}[\frac{1}{u}D-r_k]\frac{y}{v}+c=\prod_{k=n}^{2}[\frac{1}{u}D-r_k][\frac{1}{u}D-r_1]\frac{y}{v}+c=\prod_{k=n}^{2}(\frac{1}{u}D-r_k)\frac{1}{v}[\frac{1}{u}D-\frac{v'}{vu}-r_1]y+c=0.$$

Используя операторное тождество

$$(\frac{1}{u}D-r_k)\frac{1}{v}=\frac{1}{v}(\frac{1}{u}D-\frac{v'}{vu}-r_k),$$

придем к выражению

$$\frac{1}{v}\prod_{k=1}^{n}(\frac{1}{u}D-\frac{v'}{vu}-r_k)y+c=0, \ (')=(*)y',$$

что соответствует формуле (1.4). Факторизация (1.5) может быть получена из (1.4) следующим образом. Последовательно применяя легко проверяемое тождество

$$(\frac{1}{u}D-\frac{v'}{vu}-r_s)\frac{1}{u^{s-1}}=\frac{1}{u^s}[D-\frac{v'}{v}-(s-1)\frac{u'}{u}-r_s u], \ s=\overline{1,n},$$

приходим к некоммутативной факторизации

$$\frac{1}{vu^n}\prod_{k=n}^{1}[D-\frac{v'}{v}-(k-1)\frac{u'}{u}-r_k u]y+c=0,$$

что соответствует (1.5).

Достаточность. Пусть имеется факторизация (1.5). Применим преобразование (1.2), последовательно реализуя подстановки зависимой и независимой переменных: а) $y=v(y)z$; б) $dt=u(y)dx$, $(D=u(y)D_t)$.

$$\prod_{k=n}^{1}[D-\frac{v^*}{v}y'-(k-1)\frac{u^*}{u}y'-r_k u]vz=\prod_{k=n}^{2}[D-\frac{v^*}{v}y'-(k-1)\frac{u^*}{u}y'-r_k u]v(D-r_1 u)z.$$

В силу тождества

$$[D - \frac{v^*}{v}y' - (s-1)\frac{u^*}{u}y' - r_s u]v = v[D - (s-1)\frac{u^*}{u}y' - r_s u]v, \quad s = \overline{1,n}$$

придем к тождеству

$$\prod_{k=n}^{1}[D - \frac{v^*}{v}y' - (k-1)\frac{u^*}{u}y' - r_k u]vz + cu^n v = v\prod_{k=n}^{1}[D - (k-1)\frac{u^*}{u}y' - r_k u]z + cu^n v.$$

Сделаем подстановку независимой переменной:

$$v\prod_{k=n}^{1}[D-(k-1)\frac{u^*}{u}y' - r_k u]z + cu^n v = v\prod_{k=n}^{2}(uD_t - (k-1)\frac{u^*}{u}y' - r_k u)u(D_t - r_1)z + cu^n v.$$

Применив операторное тождество

$$[D - (s-1)\frac{u'}{u} - r_s u]u^{s-1} = u^s(D_t - r_s), \quad s = \overline{1,n},$$

придем к факторизации

$$\prod_{k=n}^{1}[D - \frac{v^*}{v}y' - (k-1)\frac{u^*}{u}y' - r_k u]y + cu^n v = vu^n\prod_{k=n}^{1}(D_t - r_k)z + cu^n v = 0,$$

что соответствует (1.3).•

В дальнейшем последовательно рассмотрим соответствующий класс ОДУ для случаев $n=2,\ n=3,\ n=4$. Хотя первые два случая в той или иной мере известны [1-3], здесь они рассматриваются потому, что на них основано исследование ОДУ–4, проведенное впервые вторым из авторов.

2. Линеаризация уравнений второго порядка

Пусть дано уравнение

$$y'' + F(y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Для того чтобы его можно было привести к линейному виду

$$\ddot{z} + b_1 z' + b_0 z + c = 0,\ b_1,\ b_0,\ c = const \tag{2.2}$$

преобразованием (1.2), необходимо и достаточно, согласно лемме 1, чтобы имела место факторизация (с учетом слагаемого члена cu^2v):

$$[D - (\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})y' - r_2 u][D - \frac{v^*}{v}y' - r_1 u]y + cu^2 v = 0. \tag{2.3}$$

Произведя факторизацию в (2.3), получим выражение

$$y''(1 - \frac{v^*}{v}y) - y'^2[\frac{v^{**}}{v}y + (2\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})(1 - \frac{v^*}{v}y)] - (r_1 + r_2)u(1 - \frac{v^*}{v}y)y' + r_1 r_2 u^2 y. \tag{2.4}$$

Для нахождения явного вида преобразования (1.2) введем обозначение

$$-[\frac{v^{**}}{v}y + (2\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})(1 - \frac{v^*}{v}y)] = f(y)(1 - \frac{v^*}{v}y), \tag{2.5}$$

откуда получим уравнение для множителя $v(y)$ преобразования (1.2)

$$v^{**} - 2\frac{v^{*2}}{v} + (\frac{2}{y} - \frac{u^*}{u} - f)v^* + \frac{1}{y}(\frac{u^*}{u} + f)v = 0,\ f = f(y). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) имеет общее решение, выраженное через квадратуры

$$v(y) = \frac{y}{\alpha + \beta \int u \exp(\int f dy) dy}, \tag{2.7}$$

где $\alpha,\ \beta$ – постоянные интегрирования [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для того чтобы уравнение (2.1) могло быть линеаризовано преобразованием вида (1.2), необходимо и достатоточно, чтобы оно имело следующий вид:

$$y'' + fy'^2 + b_1\varphi y' + \varphi \exp(-\int f dy)[b_0 \int \varphi \exp(\int f dy) dy + c/\beta] = 0, \tag{2.8}$$

причем оно линеаризуется преобразованием

$$z = \beta \int \varphi \exp(\int f dy) dy,\ dt = \varphi dx, \tag{2.9}$$

β – нормирующий множитель.

• Преобразовав (2.3) с помощью (2.4), (2.7) (где $\alpha = 0$), положив $u = \varphi(y)$ и учтя, что $r_k,\ k = 1, 2,$ – корни характеристического уравнения

$$r^2 + b_1 r + b_0 = 0, \tag{2.10}$$

придем к (2.8). •

Специальный случай уравнения (2.8) получается при $\varphi = \exp(-\int f dy)$.

Замечание 1. Таким образом, уравнения вида

$$y'' + f_2(y) y'^2 + f_1(y) y' + f_0(y) = 0 \tag{2.11}$$

могут быть подвергнуты испытанию методом точной линеаризации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Общее решение уравнения (2.8) можно представить в параметрическом виде

$$\beta \int \varphi e^{\int f dy} dy = \begin{cases} C_1 exp(r_1\tau) + C_2 exp(r_2\tau) - \frac{C}{b_0},\ r_1 \neq r_2 \neq 0 \\ exp(-\frac{b_1 t}{2})(C_1 t + C_2) - \frac{C}{b_0},\ r_1 = r_2 = -b_1/2 \neq 0 \\ C_1 + C_2 exp(-b_1 t) - Ct/b_1,\ r_1 = 0,\ r_2 \neq 0 \\ C_1 + C_2 + Ct^2/2,\ r_1 = r_2 = 0 \\ A sin(\sqrt{b_0} t + B) - C/b_0,\ b_1 = 0, b_0 > 0 \\ A sh(\sqrt{b_0} t + B) - C/b_0,\ b_1 = 0, b_0 < 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$x = \int \frac{dt}{\varphi(y(t))}, \tag{2.13}$$

где C_1, C_2, A, B - постоянные интегрирования.

Пусть в уравнении (2.8) $c = 0$. Тогда оно допускает следующие однопараметрические решения:

$$r_k x + C = \int \frac{exp(\int f dy)dy}{\int \varphi exp(\int f dy)dy}, \tag{2.14}$$

где r_k - простые корни (2.10).

Пример 1. (см. для сравнения [4, 5]):

$$y'' + 3yy' + y^3 = 0. \tag{2.15}$$

Преобразованием

$$z = y^2, \quad dt = ydx \tag{2.16}$$

оно линеаризуется: $\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z = 0$ и имеет общее решение, представленное в параметрической форме

$$y = \pm\sqrt{C_1 exp(-2t) + C_2 exp(-t)}, \quad x = \pm \int \frac{dt}{\sqrt{C_1 exp(-2t) + C_2 exp(-t)}}.$$

Полученный интеграл берется в конечном виде, и в результате исключения параметра t найдем общее решение в виде

$$y = \frac{2x + a}{x^2 + ax + b}.$$

Кроме того, (2.15) имеет однопараметрические семейства решений

$$y = (x + C)^{-1}, \quad y = 2(x + C)^{-1}.$$

3. Линеаризация уравнений третьего порядка

Пусть дано уравнение

$$y''' = F(y, y', y''). \tag{3.1}$$

Для того чтобы его можно было привести к виду

$$\dddot{z} + 3b_1\ddot{z} + 3b_2\dot{z} + b_3 z + c = 0 \tag{3.2}$$

преобразованием (1.2), необходимо и достаточно, согласно лемме 1, чтобы имела место факторизация (с учетом добавочного слагаемого cvu^3)

$$[D - (\frac{v^*}{v} + 2\frac{u^*}{u})y' - r_3 u][D - (\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})y' - r_2 u][D - \frac{v^*}{v}y' - r_1 u]y + cvu^3 = 0. \tag{3.3}$$

Подействуем дифференциальным оператором $[D - (\frac{v^*}{v} + 2\frac{u^*}{u})y' - r_3 u]$ на дифференциальное выражение (2.4). Получим

$$y'''(1 - \frac{v^*}{v}y) - y''y'[3\frac{v^{**}}{v}y + (1 - \frac{v^*}{v}y)(6\frac{v^*}{v} + 4\frac{u^*}{u})] + y'^3[(1 - \frac{v^*}{v}y)\times$$

$$\times(6\frac{{v^*}^2}{v^2} + 6\frac{u^*v^*}{uv} + 3\frac{{u^*}^2}{u^2} - 2\frac{v^{**}}{v} - \frac{u^{**}}{u}) + 4\frac{v^*v^{**}}{v^2}y + 3\frac{u^*v^{**}}{uv}y - \frac{v^{**}}{v} - \frac{v^{***}}{v}y] -$$

$$-u(r_1+r_2+r_3)y''(1-\frac{v^*}{v}y)+u(r_1+r_2+r_3)y'^2[\frac{v^{**}}{v}y+(1-\frac{v^*}{v}y)(2\frac{v^*}{v}+\frac{u^*}{u})]+$$

$$+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)u^2y'(1-\frac{v^*}{v}y)-r_1r_2r_3u^3y]. \tag{3.4}$$

Для нахождения явного вида преобразования (1.2) введем обозначение

$$-[3\frac{v^{**}}{v}y+(6\frac{v^*}{v}+4\frac{u^*}{u})(1-\frac{v^*}{v}y)]=3f(y)(1-\frac{v^*}{v}y), \tag{3.5}$$

откуда получим уравнение для множителя $v(y)$ преобразования (1.2):

$$v^{**}-2\frac{v^{*2}}{v}+(\frac{2}{y}-\frac{4}{3}\frac{u^*}{u}-f)v^*+\frac{1}{y}(\frac{4}{3}\frac{u^*}{u}+f)v=0,\ f=f(y). \tag{3.6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Уравнение (3.6) имеет общее решение, выраженное через квадратуры

$$v(y)=\frac{y}{\alpha+\beta\int u^{4/3}\exp(\int fdy)dy}, \tag{3.7}$$

$\alpha,\ \beta$ – постоянные интегрирования [1,2].

• Подстановкой $v=V^{-1}$ (3.6) приводится к линейному неавтономному уравнению

$$V^{**}+(\frac{2}{y}-\frac{4}{3}\frac{u^*}{u}-f)V^*-\frac{1}{y}(\frac{4}{3}\frac{u^*}{u}+f)V=0. \tag{3.8}$$

Оно допускает факторизацию

$$(D_y+\frac{1}{y}-\frac{4}{3}\frac{u^*}{u}-f)(D_y+\frac{1}{y})V=0.$$

Для нахождения общего решения (3.8) используем следующие формулы. Если есть факторизация

$$(D-\alpha_2)(D-\alpha_1)y=0$$

линейного уравнения 2–го порядка, то его общее решение имеет вид $y_{об}=c_1y_1+c_2y_2$, где $y_1=exp(\int\alpha_1dx),\ y_2=exp(\int\alpha_1dx)\int exp(\int(\alpha_2-\alpha_1)dx)dx$, c_1,c_2 – произвольные постоянные [6, гл. 2]. Поэтому общее решение (3.8) есть $V=c_1V_1+c_2V_2$, $V_1=\frac{1}{y}$, $V_2=\frac{1}{y}\left(\int u^{4/3}exp(\int fdy)dy\right)$. Следовательно,

$$V=\frac{1}{y}\left(\alpha+\beta\int u^{4/3}exp(\int fdy)dy\right),$$

$\alpha,\ \beta$ – произвольные постоянные, откуда следует формула (3.7). •

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для того чтобы уравнение (3.1) могло быть линеаризовано преобразованием вида (1.2), необходимо и достатоточно, чтобы оно имело следующий вид:

$$y'''+3fy'y''+(\frac{1}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi}-\frac{5}{9}\frac{{\varphi^*}^2}{\varphi^2}-\frac{1}{3}f\frac{\varphi^*}{\varphi}+f^2+f^*)y'^3+$$

$$+3b_1\varphi y''+b_1\varphi(f+\frac{\varphi^*}{\varphi})y'^2+3b_2\varphi^2y'+ \tag{3.9}$$

$$+\varphi^{5/3}[b_3\exp(-\int fdy)\int\varphi^{4/3}\exp(\int fdy)dy+\frac{c}{\beta}]=0,$$

причем оно линеаризуется преобразованием

$$z = \beta \int \varphi^{4/3} \exp(\int f dy) dy, \quad dt = \varphi dx, \tag{3.10}$$

β – нормирующий множитель.

• Преобразовав (3.3) с помощью (3.4), (3.7) (где $\alpha = 0$), положив $u = \varphi(y)$ и учтя, что r_k, $k = 1, 2, 3$, – корни характеристического уравнения

$$r^3 + 3b_1 r^2 + 3b_2 r + b_3 = 0, \tag{3.11}$$

придем к (3.9). •

Специальный случай получается при $\varphi = \exp(-3/4 \int f dy)$.

Замечание 2. Таким образом, уравнения вида

$$y''' + \varphi(y) y' y'' + \psi(y) y'' + \sum_{k=0}^{3} f_k(y) y'^k = 0 \tag{3.12}$$

могут быть подвергнуты испытанию методом точной линеаризации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Общее решение уравнения (3.9) можно представить в виде

$$z = \begin{cases} \sum_{k=1}^{3} c_k \exp(r_k t) - \frac{c}{b_3}, \; r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq 0; \\ \exp(-b_1 t)(c_1 t^2 + c_2 t + c_3) - \frac{c}{b_3}; \quad r_1 = r_2 = r_3 = -b_1 \neq 0; \\ c_1 + c_2 \exp(r_2 t) + c_3 exp(r_3 t) - \frac{c}{3b_2} t; \quad r_1 = 0, \; r_2 \neq r_3 \neq 0; \\ c_1 + c_2 t + c_3 \exp(-b_2 t) - \frac{c}{6b_1} t^2; \quad r_1 = r_2 = 0, \; r_3 \neq 0; \\ c_1 + c_2 t + c_3 t^2 - \frac{c}{3!} t^3; \quad r_1 = r_2 = r_3 = 0; \\ \exp(r_1 t) + \exp(r_2 t)(c_2 + c_3 t) - \frac{c}{b_3}; r_1 \neq 0, \; r_2 = r_3 \neq 0; \\ c_1 + exp(r_2 t)(c_2 + c_3 t) - \frac{c}{3b_2} t; \quad r_1 = 0, \; r_2 = r_3 \neq 0; \\ c_1 + A \sin(\sqrt{3b_2} t + B) - \frac{c}{3b_2} t; \quad b_1 = b_3 = 0, \; b_2 > 0; \\ c_1 + A sh(\sqrt{-3b_2} t + B) - \frac{c}{3b_2} t; \quad b_1 = b_3 = 0, \; b_2 < 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

$$x = \int \frac{dt}{\varphi(y(t))}. \tag{3.14}$$

Здесь c_1, c_2, c_3, A, B – произвольные постоянные.

При $c = 0$ получим однопараметрические семейства решений

$$\int \frac{\varphi^{1/3} \exp(\int f dy) dy}{\int \varphi^{4/3} \exp(\int f dy) dy} = r_k x + C, \tag{3.15}$$

где r_k простые корни характеристического уравнения (3.11).

Пример 2. Уравнение

$$y''' - \frac{y'y''}{y} + 3b_1yy'' + 3b_2y^2y' + \frac{1}{2}b_3y^4 + \frac{c}{2}y^2 = 0 \tag{3.16}$$

подстановкой (2.16) линеаризуется к виду (3.2) и имеет однопараметрические решения $y = -2/(r_kx + c)$.

4. Линеаризация уравнений 4–го порядка

Пусть дано автономное нелинейное дифференциальное уравнение 4–го порядка

$$y^{iv} = F(y, y'y'', y'''). \tag{4.1}$$

Для того чтобы (4.1) можно было линеаризовать преобразованием (1.2) к виду

$$\ddddot{z} + 4b_1 \dddot{z} + 6b_2\ddot{z} + 4b_3\dot{z} + b_4z + c = 0, \tag{4.2}$$

согласно лемме 1, необходимо и достаточно, чтобы имела место факторизация (с точностью до слагаемого cvu^4)

$$[D - (\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u})y' - r_4u][D - (\frac{v^*}{v} + 2\frac{u^*}{u})y' - r_3u]\times$$

$$\times[D - (\frac{v^*}{v} + \frac{u^*}{u})y' - r_2u][D - \frac{v^*}{v}y' - r_1u]y + cvu^4 = 0. \tag{4.3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если уравнение (4.1) линеаризуется с помощью (1.2), то имеет место разложение

$$(1-\frac{v^*}{v}y)y^{iv} - y'y'''[4\frac{v^{**}}{v}y + (1-\frac{v^*}{v}y)(8\frac{v^*}{v} + 7\frac{u^*}{u})] - y''^2[3\frac{v^{**}}{v}y + (1-\frac{v^*}{v}y)(6\frac{v^*}{v} + 4\frac{u^*}{u})] +$$

$$+y'^2y''[(1-\frac{v^*}{v}y)(36\frac{{v^*}^2}{v^2} - 18\frac{v^{**}}{v} + 44\frac{u^*v^*}{uv} + 25\frac{{u^*}^2}{u^2} + 7\frac{u^{**}}{u}) + 18\frac{v^{**}v^*}{v^2}y + 22\frac{u^*v^{**}}{uv}y - 6\frac{v^{***}}{v}y] -$$

$$-y'^4[\frac{v^{****}}{v}y - (2\frac{v^{***}}{v}y - 6\frac{v^{**}v^*}{v^2}y)(2\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u}) - 6\frac{{v^{**}}^2}{v^2}y + 15\frac{v^{**}{u^*}^2}{vu^2}y - 4\frac{v^{**}u^{**}}{uv}y +$$

$$+(1-\frac{v^*}{v}y)(4\frac{v^{***}}{v} - 24\frac{v^{**}v^*}{v^2} + 24\frac{{v^*}^3}{v^3} - 18\frac{u^*v^{**}}{uv} + 36\frac{u^*{v^*}^2}{uv^2} + 30\frac{{u^*}^2v^*}{u^2v} - 8\frac{u^{**}v^*}{uv} - 10\frac{u^*u^{**}}{u^2} +$$

$$+15\frac{{u^*}^3}{u^3} + \frac{u^{***}}{u})] + 4b_1uy'''(1-\frac{v^*}{v}y) - 4b_1y'^3[\frac{v^{***}u}{v}y - 3\frac{v^{**}u^*}{v}y - 3\frac{v^{**}v^*u}{v^2}y + (1-\frac{v^*}{v}y)\times$$

$$\times(u^{**} - 6\frac{u^*v^*}{v} + 3\frac{v^{**}u}{v} - 6\frac{u{v^*}^2}{v^2} - 3\frac{{u^*}^2}{u})] - 4b_1uy'y''[3\frac{v^{**}}{v}y + (1-\frac{v^*}{v}y)(6\frac{v^*}{v} + 4\frac{u^*}{u})] -$$

$$-6b_2y'^2[\frac{u^2v^{**}}{v}y + (1-\frac{v^*}{v}y)(u^*u + 2\frac{v^*u^2}{v})] + 6b_2u^2y''(1-\frac{v^*}{v}y) + 4b_3u^3y'(1-\frac{v^*}{v}y) + b_4u^4y +$$

$$+cvu^4 = 0. \tag{4.4}$$

• Применив дифференциальный оператор $[D - (\frac{v^*}{v} + 3\frac{u^*}{u})y' - r_4 u]$ к (3.4) и добавив к полученному выражению слагаемое cvu^4, придем к формуле (4.4), где r_k удовлетворяют характеристическому уравнению

$$r^4 + 4b_1 r^3 + 6b_2 r^2 + 4b_3 r + b_4 = 0. \tag{4.5}$$

Введя обозначение

$$4\frac{v^{**}}{v}y + (1 - \frac{v^*}{v}y)(8\frac{v^*}{v} + 7\frac{u^*}{u}) = -4f(y)(1 - \frac{v^*}{v}y),$$

придем к уравнению

$$v^{**} - \frac{2}{v}v^{*^2} + (\frac{2}{y} - \frac{7}{4}\frac{u^*}{u} - f)v^* + (\frac{7}{4}\frac{u^*}{u} + f)\frac{1}{y}v = 0, \quad f = f(y). \tag{4.6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$v(y) = \frac{y}{\alpha + \beta\int u^{7/4} exp(\int f dy)dy)}, \tag{4.7}$$

α, β – произвольные постоянные.

• Подстановкой $v = V^{-1}$ уравнение (4.6) приводится к линейному неавтономному уравнению

$$V^{**} + (\frac{2}{y} - \frac{7}{4}\frac{u^*}{u} - f)V - (\frac{7}{4}\frac{u^*}{u} + f)\frac{V}{y} = 0. \tag{4.8}$$

Оно допускает факторизацию

$$(D_y + \frac{1}{y} - \frac{7}{4}\frac{u^*}{u} - f)(D_y + \frac{1}{y})V = 0, \ D_y = d/dy.$$

Поэтому общее решение уравнения (4.8) имеет вид $V = \frac{1}{y}[\alpha + \beta\int u^{7/4} exp(\int f dy)dy]$ и, следовательно, $v(y)$ удовлетворяет соотношению (4.7). •

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для того чтобы уравнение (4.1) могло быть линеаризовано преобразованием (1.2), необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в следующем виде

$$y^{(iv)} + 4f(y)y'y''' + y''^2\left(\frac{5}{4}\frac{\varphi^*}{\varphi} + 3f\right) + y'^2y''\left(\frac{35}{2}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{45}{8}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2} - \frac{\varphi^*}{\varphi}f + 6(f^2 + f^*)\right) +$$

$$+y'^4(\frac{699}{64}\frac{\varphi^{*^3}}{\varphi^3} + \frac{111}{16}\frac{\varphi^*\varphi^{**}}{\varphi^2} + \frac{3}{4}\frac{\varphi^{***}}{\varphi} + \frac{303}{16}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi^2}f + \frac{5}{4}\frac{\varphi^{**}}{\varphi}f + \frac{21}{4}\frac{\varphi^*}{\varphi}(f^2 + f^*) + f^3 + 3ff^* + f^{**}) +$$

$$+b_1\varphi y'y''(12f + 5\frac{\varphi^*}{\varphi}) + 4b_1\varphi y''' + b_1 y'^3(\frac{15}{4}\frac{\varphi^{*^2}}{\varphi} - 3\varphi^{**} - 2\varphi^* f - 4\varphi f^2 - 4\varphi f^*) + 6b_2\varphi^2 y'' +$$

$$+6b_2 y'^2\varphi(\frac{3}{4}\varphi^* + \varphi f) + 4b_3\varphi^3 y' + \varphi^{\frac{9}{4}} e^{-\int f dy}[b_4\int \varphi^{\frac{7}{4}} e^{\int f dy} dy + \frac{c}{\beta}] = 0; \tag{4.9}$$

при этом оно приводится к (4.2) преобразованием

$$z = \beta\int \varphi^{7/4} exp(\int f(y)dy)dy, \quad dt = \varphi(y)dx. \tag{4.10}$$

• Преобразовав (4.3) с помощью (4.4), (4.6) (где $\alpha = 0$, положив $\varphi = u(y)$ и учтя, что r_k, $k = \overline{1,4}$, – корни характеристического уравнения (4.5), придем к (4.9). •

Специальный случай уравнения (4.8) получается при $\varphi = \exp(-4/7 \int f(y)dy)$.

Замечание 3. Таким образом, уравнения вида

$$y^{iv} + \varphi_1 y' y''' + \varphi_2 y''^2 + \varphi_3 y'^2 y'' + f_4 4y'^4 + \varphi_4 y''' + \varphi_5 y' y'' + \varphi_6 y'' + f_3 y'^3 + \\ + f_2 y'^2 + f_1 y' + f_0 = 0. \tag{4.11}$$

могут быть подвергнуты испытанию методом точной линеаризации.

Пример 3. Уравнение

$$y^{iv} - \frac{3}{y} y' y''' - \frac{1}{y} y''^2 + \frac{3}{y^2} y'^2 y'' + 4b_1 y y''' - 4b_1 y' y'' + 6b_2 y^2 y'' + 4b_3 y^3 y' + \frac{1}{2} b_4 y^5 + \frac{1}{2} c y^3 = 0$$

подстановкой (2.16) приводится к (4.2) и допускает при $c = 0$ однопараметрические семейства решений $y = -2/(r_k x + c_k)$, где r_k - различные характеристические корни уравнения (4.5).

Литература

[1] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка.//Вестник СамГУ, спецвыпуск, 1995. С.6-14.

[2] Berkovich L.M. The method of an exact linearization of n–order ordinary differential equations, Nonlinear Math. Physics, 1996. V.3, N3-4. P.341-350.

[3] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации автономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. // Прикл. Матем. Мех. 1979, Т.43, N4, С.629-638.

[4] Painlevé P. Lesons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stokholm, Paris, 1897.

[5] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.

[6] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд–во Саратовск. ун–та, Саратов, 1989, 192С.

THE EXACT LINEARIZATION SOME CLASSES OF AUTONOMOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

L.M. Berkovich, I.S. Orlova[2]

The method of exact linearization nonlinear nonautonomous odinary differentional equations of n-order suggested by one of the authors is demonstrated in [1,2] works. This method is based on the factorization of nonlinear O.D.E. through nonlinear differentional the first order's operators, and also is based on using both point and nonpoint transformation. Exact linearization some classes the second's, the third's, the forth's ordezs O.D.E. is given in this work. For the first time common form of autonomous the forth order equations is found, admitting exact linearization with using nonpoint transformation. Formulas has got in quadratures for finding common and partial solutions of investigating equations classes.

[2]Berkovich Lev M., Orlova Irina S., chair of algebra and geometry, Samara state university