

О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В.И. Курочкин, С.В. Цаплин ¹

В данной статье проводится исследование структуры ударной волны в плотном газе на основе газодинамического и кинетического подходов. Как показывают результаты, расчеты кинетического и газодинамического подхода находятся в качественном соответствии.

Исследованию структуры ударных волн посвящено достаточно много работ. Первоначально такие исследования были основаны на решении уравнений Навье-Стокса [1, 2], или Барнетта [3]. Затем появились более точные методы, основанные на решении уравнения Больцмана [4, 5]. В настоящей работе будет изучено влияние неидеальности на структуру ударной волны. Первоначально остановимся на газодинамическом подходе.

1. Газодинамический подход

Одномерное течение вязкого теплопроводного неидеального газа описывается системой уравнений Навье-Стокса в виде [6]:

$$\rho u = G \equiv \rho_1 u_1, \quad (1)$$

$$Gu + p - \left(\frac{4}{3}\eta + k \right) \frac{du}{dx} = B \equiv Gu_1 + p_1, \quad (2)$$

$$G \left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 \right) - \lambda \frac{dT}{dx} - \left[\left(\frac{4}{3}\eta + k \right) u \frac{du}{dx} \right] = L \equiv G \left(E_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}u_1^2 \right), \quad (3)$$

где $p = p(\rho, T)$, $E = E(\rho, T)$, $\eta = \eta(\rho, T)$, $k = k(\rho, T)$, $\lambda = \lambda(\rho, T)$.

Здесь и далее индексом "1" будем обозначать параметры потока перед ударной волной (т.е. в сверхзвуковой ее части), а параметры за ударной волной будут обозначаться индексом "2".

Введем безразмерные величины

$$v = \frac{u}{1}, \quad y = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad t = \frac{T}{T_1}, \quad z = \frac{p}{\rho_1 T_1}, \quad x' = \frac{x}{l_1},$$

$$h = \frac{\left(E + \frac{p}{\rho} \right) (\gamma - 1)}{\gamma R T_1}, \quad \beta = \frac{\frac{4}{3}\eta + k}{l_1 \rho_1}, \quad \alpha = \frac{\lambda T_1}{l_1 \rho_1 a_1^3},$$

¹Курочкин Виктор Иванович, Цаплин Сергей Васильевич. Кафедра физики твердого тела Самарского государственного университета

где $a_1^2 = \gamma RT_1$, $l_1 = \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma^2\rho_1}$.

Величины $z - 1$ и $h - 1$ учитывают поправки на неидеальность в уравнении состояния и энтальпии, величина a_1 в пределе идеального газа равна скорости звука, а l_1 — длина свободного пробега перед ударной волной. Далее будем рассматривать одноатомный газ и положим $\gamma = \frac{5}{3}$.

С учетом введенных величин система уравнений (1)-(3) сведется к более удобному для численного исследования виду

$$yv = v_1 \quad (4)$$

$$\beta \frac{dv}{dx'} = \frac{ytz - z_1}{\gamma} + v_1(v - v_1) \quad (5)$$

$$\alpha \frac{dt}{dx'} = v_1 \frac{ht - h_1}{\gamma - 1} + v_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2} - \beta v \frac{dv}{dx'}. \quad (6)$$

Устойчивая схема численного решения системы (4)-(6) получается при счете в отрицательном направлении x , начиная с граничных значений v_2 и t_2 , которые находятся из численного решения системы нелинейных уравнений, являющейся уравнениями Ренкина-Гюгонио для неидеального газа:

$$y_2 v_2 = v_1, \quad (7)$$

$$\frac{y_2 t_2 z_2 - z_1}{\gamma} + v_1(v_2 - v_1) = 0, \quad (8)$$

$$v_1 \frac{t_2 h_2 - h_1}{\gamma - 1} + v_1 \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что для умеренно плотного газа выражения для z и h могут быть представлены в виде

$$z = 1 + B(T)\rho + C(T)\rho^2 + \dots, \quad (10)$$

$$h = 1 + \frac{2}{5} \left[(B - TB')\rho + \left(C - \frac{1}{2}TC' \right) \rho^2 + \dots \right], \quad (11)$$

где $B(T)$, $C(T)$ — соответственно второй и третий вириальные коэффициенты уравнения состояния.

В работе проводились расчеты на основе решения систем уравнений (4)-(9) с учетом реальных зависимостей коэффициентов переноса от плотности и температуры и вириальных коэффициентов от температуры для приведенной температуры $k\frac{T_1}{\epsilon} = 3,0$ при трех относительных плотностях $n^* = 0; 0,1; 0,3$. На рис.1 представлены расчеты зависимости $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ от относительной сжимаемости $\frac{p_2}{\rho_1}$.

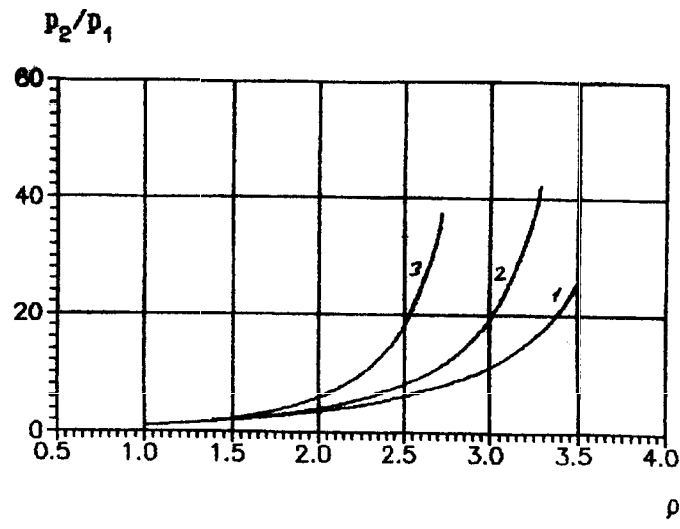


Рис.1. Ударная адиабата. 1: $n^* = 0$; 2: $n^* = 0,1$; 3: $n^* = 0,3$

Как видно из рисунка, в неидеальном газе отношение $\frac{p_2}{p_1}$ растет значительно быстрее в зависимости от $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, чем в идеальном газе. Учет неидеальности необходим уже в случае умеренно плотного газа ($n^* = \frac{2\pi\sigma^3}{0,1}$).

На рис.2 показана зависимость приведенной обратной толщины ударной волны $\frac{l_1}{\delta}$ в зависимости от относительного сжатия ($\delta = \int \frac{\rho(x) - \rho_1(x)}{\rho_2(x) - \rho_1(x)} dx$). Кривая 1' на этом рисунке представляет аналогичный расчет, приведенный в [6] для газа обычной плотности.

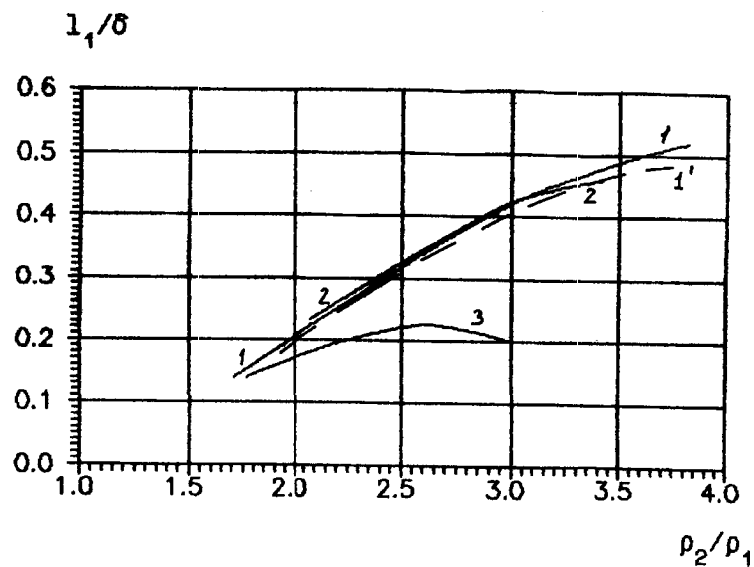


Рис.2. Приведенная обратная толщина ударной волны.
1: $n^* = 0$; 2: $n^* = 0,1$; 3: $n^* = 0,3$

Профиль плотности в ударной волне показан на рис.3.

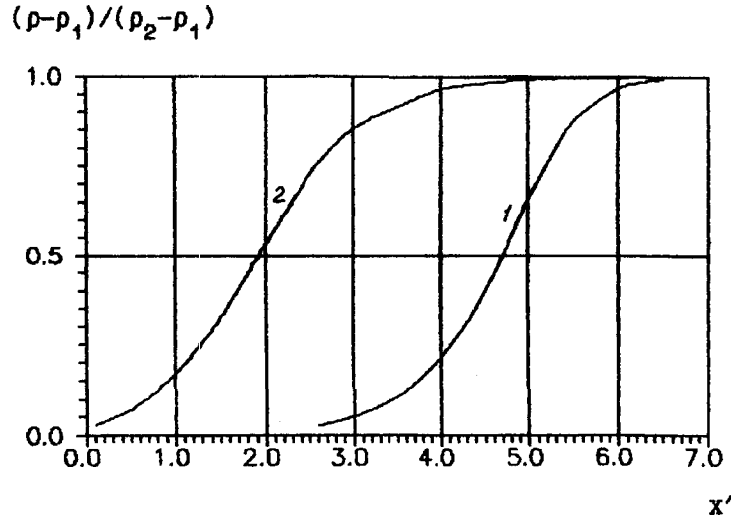


Рис.3. Изменение плотности в ударной волне. 1 : $n^* = 0, 2$; 2 : $n^* = 0, 3$

Таким образом, исходя из представленных расчетов можно заключить, что относительная толщина ударной волны в плотном газе увеличивается с увеличением плотности.

2. Кинетический подход

Изучению структуры ударной волны на основе решения уравнения Больцмана посвящен ряд работ [4, 5]. В данной работе на базе идеи Мотт-Смита о делении частиц на две группы используется уравнение переноса, полученное в работах Курочкина В.И., Великодного В.Ю. Решается модифицированное уравнение Энского для смесей методом моментов с учетом билинейных слагаемых по разности парциальных скоростей и температур и проводится исследование структуры сильных ударных волн. Плотность частиц первой группы равна нулю после ударной волны, плотность частиц второй группы равна нулю перед ударной волной. Взаимодействие групп осуществляется внутри ударной волны и описывается системой кинетических уравнений для смесей газов, подобно рассмотренной в работе [10]. В нулевом приближении функции распределения f_i берутся локально – максвелловскими при парциальных значениях средних концентраций n_i , температур T_i и скоростей u_i ($i = 1, 2$ соответствуют состояниям до и после ударной волны). При расчете структуры ударной волны считается, что внутри ударной волны меняются только парциальные плотности n_i , а скорости u_i и температуры T_i остаются неизменными.

Для плотного газа система уравнений аналогична приведенной в [9], для газа нормальной плотности получена в [7, 8] в результате решения модифицированного уравнения Энского для смесей газов из твердых сфер методом тринадцати моментов Грэда в нулевом приближении и может быть записана в следующем виде:

$$n_1 u_1 + n_2 u_2 = C_1, \quad (12)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 + \rho_2 u_2^2 + p_2 = C_2 \quad (13)$$

$$\frac{5}{2} (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) + \frac{1}{2} (\rho_1 u_1^3 + \rho_2 u_2^3) = C_3 \quad (14)$$

$$\frac{dp_1}{dx} + G_{12} = \frac{8m}{3} n_1 n_2 x_{12} \Omega_{12} \Gamma u_{21}. \quad (15)$$

$$\Gamma = \frac{3}{2} e^{-v^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} (k+2)!}{(2k+1)!(2k+3)} v^{2k} \right], \quad u_{21} = u_2 - u_1, \quad (16)$$

$$v^2 = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2k(T_1 + T_2)}, \quad \Omega_{12} = \left(\frac{2\pi k}{m} \right)^{1/2} \sigma_{12}^2 (T_1 + T_2)^{1/2}, \quad (17)$$

$$G_{12} = m B_{12} n_1 n_2 \left(\left[\frac{k(T_1 + T_2)}{m} + \frac{3}{10} u_{21}^2 \right] \frac{dh_{12}}{dx} + \frac{3}{5} u_{21}^2 \chi_{21} n_2^{-1} \frac{d\eta_2}{dx} \right), \quad (18)$$

$$p_i = n_i k T_i (1 + B_{i1} n_1 \chi_{i1} + B_{i2} n_2 \chi_{i2}). \quad (19)$$

Величины B_{ij} , h_{ij} , χ_{ij} зависят от концентраций n_i и размеров молекул σ_i . Все эффекты, связанные с неидеальностью газа, учитываются здесь через выражение для давления (19) и функции h_{ij} и χ_{ij} которые приближенно учитывают многочастичные эффекты в кинетическом уравнении Энского для смесей газов. В соответствии с моделью функциями координаты x являются только концентрации $n_1(x)$ и $n_2(x)$, причем $n_1(-\infty) = n_{10}$, $n_1(+\infty) = 0$, $n_2(-\infty) = 0$, $n_2(+\infty) = n_{2\infty}$.

После перехода к безразмерным переменным

$$v_i = \frac{u_i}{a_0}, \quad a_0^2 = \frac{\gamma k T_1}{m}, \quad t_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad x' = \frac{x}{l_0},$$

$$l_0^{-1} = \sqrt{2} n_{10} \pi \sigma_1^2, \quad y_i = \frac{n_i}{n_1 0}$$

система уравнений (12)-(15) преобразуется к виду

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 = v_1,$$

$$\gamma y_1 v_1^2 + y_1 z_1 + \gamma y_2 v_2^2 + y_2 t_2 z_2 = \gamma v_1^2 + z_{10},$$

$$5(y_1 z_1 v_1 + y_2 z_2 v_2) + \gamma(y_1 v_1^3 + y_2 v_2^3) = 5z_{10} v_1^3 + \gamma v_1^3,$$

$$A(y_1) \frac{dy_1}{dx'} = B y_1 y_2,$$

где $z_i = \frac{p_i}{n_i k T_i}$, $B = \frac{8}{3} \Gamma (v_2 - v_1) (1 + t_2)^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \right)^2$, $y_2 = \alpha (1 - y_1)$, $\alpha = \frac{n_{2\infty}}{n_{10}} = \frac{v_1}{v_2}$.

Для функции $A(y_1)$ имеем

$$A(y_1) = z_1 + y_1 z_1' + n_{10} B_{12} y_1 y_2 \left[(1 + t_2) h_{12}' + \frac{3(v_2 - v_1)^2}{10} - 2\alpha \right],$$

$$z_1' = \frac{dz_1}{dy_1}, \quad h_{12}' = \frac{dh_{12}}{dy_1}.$$

Величины v_2 , t_2 и $y_{2\infty} \equiv \alpha$ находятся из соотношений Ренкина-Гюгонио, которые принимают вид

$$y_{2\infty} v_2 = v_1, \quad (20)$$

$$\gamma \alpha v_2^2 + \alpha t_2 z_{2\infty} = \gamma v_1^2 + z_{10}, \quad (21)$$

$$5\alpha t_2 z_{2\infty} + \gamma \alpha v_2^3 = 5z_{10} v_1^3 + \gamma v_1^3. \quad (22)$$

Отметим, что при использовании кинетической теории Энскогога для получения согласованных результатов диаметр молекул σ_i предполагается зависящим от температуры. Следуя работе [11], положим

$$\sigma_i = \sigma_{10} t_i^{-0,1}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2}. \quad (23)$$

Результаты численного решения уравнения при различных начальных плотностях $n^* = n_{10} B_{11}$ представлены на рис.4,5. В частности, получены зависимости толщины ударной волны. На рис.5 показан профиль плотности.

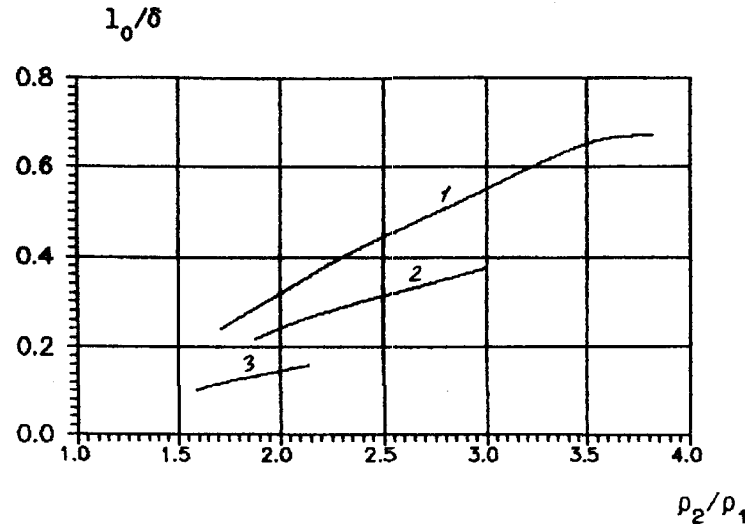


Рис.4. Приведенная обратная толщина ударной волны.

1 : $n^* = 0$; 2 : $n^* = 0, 1$; 3 : $n^* = 0, 3$

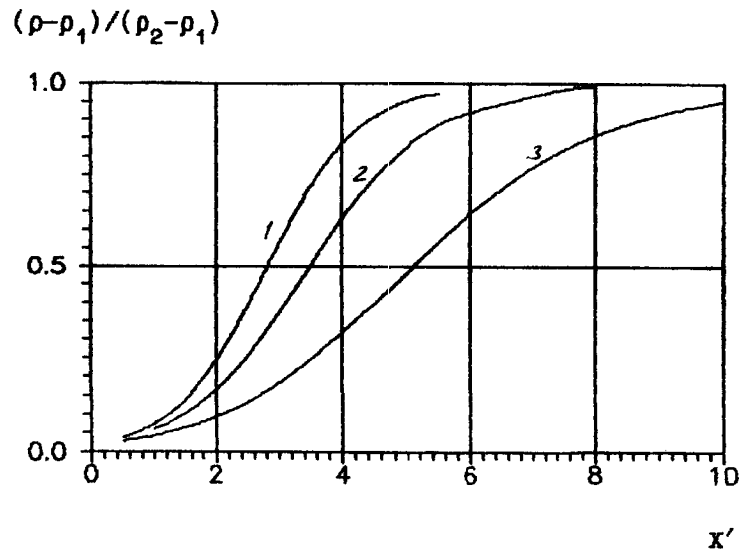


Рис.5: Изменение плотности в ударной волне.

1 : $n^* = 0$; 2 : $n^* = 0, 1$; 3 : $n^* = 0, 3$

Результаты находятся в качественном соответствии с расчетами газодинамического подхода. При увеличении относительной плотности приведенная толщина ударной волны увеличивается. В качестве физического объяснения увеличения относительной толщины ударной волны можно предположить следующее. С увеличением плотности возрастает взаимное влияние молекул, находящихся в непосредственной близости, через множественные столкновения и увеличение так называемого вклада в перенос импульса и энергии. Наблюдается также усиление взаимного влияния на более удаленные друг от друга молекулы.

Литература

- [1] Мордухов М., Либи П. В сб.: Механика. Вып.1. М.: Изд-во иностр.лит., 1950.
- [2] Либбер Ф., Романо Ф., Лев Г. В сб.: Механика. Вып.1 М.: Изд-во иностр.лит., 1952.
- [3] Simon C.E., Fosh J.D. // In: Rarefied gas dynamics. 1978. V.1. P.493.
- [4] Mott-Smith H.M. // Phys. Rev. 1951. V.82. P.885.
- [5] Glandsdorf P. // Phys. Fluids. 1961, V.4. P.371.
- [6] Лойцянский В.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978, 736С.
- [7] Курочкин В.И., Макаренко С.Ф., Тирский Г.А. // Прикл. механика и техн. физика. 1984. 2. 58С.
- [8] Курочкин В.И. В сб.: Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982, 54С.
- [9] Струминский В.В., Великодный В.Ю. Докл. АН СССР. 1982, Т.266, 1, 28С.
- [10] Великодный В.Ю. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ. 1982, 150С.
- [11] Coremans J., Benakker J. Physica. 1960. V.26. P.653.

ABOUT SHOCK WAVE STRUCTURE IN DENSE GAS

V.I Kurochkin, S.V. Tsaplin ²

In present paper the research of structure of shock wave in dense gas based on kinetic and gas – dynamical approaches is carried out. The results show that kinetic and gas – dynamical accounts correspond qualitatively one another.

²Kurochkin Vladimir Ivanovitch, Tsaplin Sergey Vasil'evich, dept. of solid state physics, Samara state university