ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Н.Н. Столяров, Н.И. Дедов, А.Н. Симаков[1]

Получены дифференциальное уравнение, описывающее деформирование подкрепленной цилиндрической оболочки, уравнения для радиального перемещения и углового поворота сечений кольца при упруго-пластическом термосиловом нагружении. Предложены уравнения совместности деформаций для многосвязной тонкостенной конструкции в местах стыков оболочек между собой и с кольцом. Разработаны алгоритмы и программы расчета напряженно - деформированного состояния цилиндрической оболочки переменного сечения, оптимизации ее геометрических параметров. Проведены тестовые расчеты.

1. Рассматриваются цилиндрические подкрепленные оболочки, входящие в состав многосвязной конструкции. Многосвязная конструкция включает цилиндрические и сферическую оболочки. В местах стыков оболочек имеются подкрепляющие кольца. Цилиндрические оболочки могут быть гладкими или подкрепленными в кольцевом и продольном направлениях. Сферическая оболочка гладкая.

Многосвязная конструкция нагружается осевой силой, давлением и находится под действием температурного поля переменного по длине.

При упруго-пластическом деформировании согласно деформационной теории пластичности связь между напряжениями и деформациями запишем в виде [1], [2]

$$\sigma_{ij} - \sigma_0 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0),$$

где σ_0, ε_0 - среднее напряжение и средняя деформация, σ_i, ε_i - интенсивность напряжений и деформаций. Зависимость между средним напряжением и средней деформацией с учетом перепадов температур [2]

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0 - \alpha T),$$

где K – обьемный модуль упругости,
α – коэффициент температурного расширения,
T – перепад температур по длине.

Нормальные напряжения при упруго-пластических деформациях в обшивке будут

$$\sigma_{11} = A(\varepsilon_{11} + B_1\varepsilon_{22}) - C,$$
$$\sigma_{22} = A(\varepsilon_{22} + B_1\varepsilon_{11}) - C,$$

[1]Столяров Николай Николаевич, Дедов Николай Иванович, Симаков Александр Николаевич. Кафедра сопротивление материалов Самарского государственного технического университета

где

$$A = 4G_c \frac{1+\frac{G_c}{3K}}{1+\frac{4}{3}\frac{G_c}{K}}, \qquad B_1 = \frac{1-\frac{2}{3}\frac{G_c}{K}}{2\left(1+\frac{1}{3}\frac{G_c}{K}\right)},$$

$$C = 6\alpha T \frac{G_c}{1+\frac{4}{3}\frac{G_c}{K}}.$$

Нормальные напряжения в продольных и кольцевых ребрах будут

$$\sigma_1 = A_1(\varepsilon_1 - \alpha T),$$

$$\sigma_2 = A_1(\varepsilon_2 - \alpha T),$$

где

$$A_1 = \frac{3G_c}{1+\frac{G_c}{3K}}.$$

Проинтегрировав напряжения по толщине обшивки и площади подкрепляющих ребер, получим внутренние силы и изгибающие моменты в сечениях цилиндрической оболочки

$$T_{11} = B_{11}\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 + A_{11}^{(1)}\chi_{11} + A_{22}\chi_{22} - M - N_1,$$

$$T_{22} = B\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + A_{22}\chi_{11} + A_{11}^{(2)}\chi_{22} - M - N_2,$$

$$M_{11} = A_{11}^{(1)}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + D_{11}\chi_{11} + D\chi_{22} - m - n_1,$$

$$M_{22} = A_{22}\varepsilon_1 + A_{11}^{(1)}\varepsilon_2 + D\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} - m - n_2,$$

где

$$B_{11} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} A dz + \frac{1}{l_1}\int\limits_{F_1} A_1 dF, \qquad B_{22} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} A dz + \frac{1}{l_2}\int\limits_{F_2} A_1 dF,$$

$$A_{11}^{(1)} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Azdz + \frac{1}{l_1}\int\limits_{F_1} A_1 zdF, \qquad A_{11}^{(2)} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Azdz + \frac{1}{l_2}\int\limits_{F_2} A_1 zdF,$$

$$D_{11} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Az^2dz + \frac{1}{l_1}\int\limits_{F_1} A_1 z^2dF, \qquad D_{22} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Az^2dz + \frac{1}{l_2}\int\limits_{F_2} A_1 z^2dF,$$

$$B = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} AB_1dz, \qquad A_{22} = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} AB_1zdz, \qquad D = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} AB_1z^2dz,$$

$$M = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Cdz, \qquad m = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} Czdz, \qquad N_1 = \frac{1}{l_1}\int\limits_{F_1} A_1\alpha TdF, \qquad N_2 = \frac{1}{l_2}\int\limits_{F_2} A_1\alpha TdF,$$

$$n_1 = \frac{1}{l_1}\int\limits_{F_1} A_1\alpha TzdF, \qquad n_2 = \frac{1}{l_2}\int\limits_{F_2} A_1\alpha TzdF.$$

При осесимметричной деформации цилиндрической оболочки сдвиговые деформации и изменение кривизны в кольцевом направлении равны нулю

$$\varepsilon_{12} = 0, \qquad \chi_{22} = 0.$$

Записав уравнения равновесия оболочки через внутренние силовые факторы и выражая их через перемещения, получим разрешающее дифференциальное уравнение, описывающее осесимметричное упруго-пластическое деформирование. Имея в виду в дальнейшем применение итерационного метода решения нелинейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, преобразуем его в уравнение с постоянными коэффициентами, отнеся в правую часть члены, характеризующие упруго-пластическое деформирование.

$$a_1^0\frac{d^4w}{dx^4}-2b^2\frac{d^2w}{dx^2}+k^4w=-q-\frac{b_3^0}{R}-\frac{d^2\triangle M_{11}}{dx^2}-\frac{\triangle T_{22}}{R}, \tag{1}$$

где

$$b^2=-\frac{1}{2R}(a_2^0+b_1^0),\qquad k^4=\frac{b_2^0}{R^2}.$$

Коэффициенты a_i^0, b_i^0 получаем при упругих деформациях, положив $G_c=G$ по формулам

$$a_1^0=A_{11}^{(1)}\frac{A_{11}^{(1)}}{B_{11}}-D_{11},\qquad a_2^0=A_{11}^{(1)}\frac{B}{B_{11}}-A_{22},\qquad a_3^0=\frac{A_{11}^{(1)}}{B_{11}}(T_{11}+M+N_1)-m-n_1, \tag{2}$$

$$b_1^0=B\frac{A_{11}^{(1)}}{B_{11}}-A_{22},\qquad b_2^0=B\frac{B}{B_{11}}-B_{22},\qquad b_3^0=\frac{B}{B_{11}}(T_{11}+M+N_1)-M-N_2.$$

Приращения кольцевой силы $\triangle T_{22}$ и продольного изгибающего момента $\triangle M_{11}$ запишем в виде

$$\triangle T_{22}=(b_1-b_1^0)\frac{d^2w}{dx^2}+(b_2-b_2^0)\frac{w}{R}+(b_3-b_3^0),$$

$$\triangle M_{11}=(a_1-a_1^0)\frac{d^2w}{dx^2}+(a_2-a_2^0)\frac{w}{R}+(a_3-a_3^0),$$

где коэффициенты a_i, b_i вычисляются по формулам (2) при упруго-пластических деформациях.

Для решения двухточечной краевой задачи применяется метод конечных разностей. Используя конечные разности, запишем дифференциальное уравнение (1) для узла "i"

$$a_1^0w_{i+2}-(4a_1^0+2b^2h^2)w_{i+1}+(6a_1^0+4b^2h^2+k^4h^4)w_i-(4a_1^0+2b^2h^2)w_{i-1}+a_1^0w_{i-2}= \tag{3}$$
$$\left[-q_i-\frac{b_3^0}{R}-\frac{\triangle M_{11,i+1}-2\triangle M_{11,i}+\triangle M_{11,i-1}}{h^2}-\frac{\triangle T_{22,i}}{R}\right]h^4,$$

где h – шаг сетки.

Тонкостенная сферическая оболочка нагружена внутренним давлением p, распределенными краевыми силами Q_0 и краевыми моментами M_0 и перепадами температур T. Линейные и угловые перемещения края сферической оболочки от перечисленных выше факторов запишем в виде [3]

$$w=\frac{(1-\mu)pR_{c\phi}^2\sin\varphi_0}{2Eh_{c\phi}}+\frac{2Q_0R_{c\phi}\beta\sin^2\varphi_0}{Eh_{c\phi}}+\frac{2M_0\beta^2\sin\varphi_0}{Eh_{c\phi}}+\alpha TR_{c\phi}\sin\varphi_0,$$

$$\varphi=\frac{2Q_0\beta^2\sin\varphi_0}{Eh_{c\phi}}+\frac{4M_0\beta^3}{Eh_{c\phi}R_{c\phi}},$$

где $R_{c\phi}$ – радиус сферической оболочки,
φ_0 – угол полураствора сферической оболочки,
$h_{c\phi}$ – толщина сферической оболочки,
$\beta^4 = \frac{3(1-\mu^2)R^2_{\text{сф}}}{h^2_{\text{сф}}}$,
μ – коэффициент Пуассона.

Радиальные перемещения и угол поворота кольца при осесимметричной упругопластической деформации запишем в виде [4]

$$w = \frac{R}{I_4 I_1 - I_2^2}(NI_4R - MI_2R + I_3I_4 - I_2I_5),$$

$$\varphi = \frac{R}{I_2^2 - I_4 I_1}(NI_2R - MI_1R + I_2I_3 - I_1I_5),$$

где

$$I_1 = 3\int\limits_F \frac{Gc}{1+\frac{Gc}{3K}}dF, \qquad I_2 = 3\int\limits_F \frac{Gc}{1+\frac{Gc}{3K}}xdF,$$

$$I_3 = 3\int\limits_F \frac{Gc}{1+\frac{Gc}{3K}}\alpha TdF, \qquad I_4 = 3\int\limits_F \frac{Gc}{1+\frac{Gc}{3K}}x^2dF,$$

$$I_5 = 3\int\limits_F \frac{Gc}{1+\frac{Gc}{3K}}\alpha TxdF.$$

2. Для раскрытия статической неопределимости многосвязной конструкции составляются уравнения совместности деформаций, выражающие равенство перемещений и углов поворота в местах стыков оболочек между собой и с кольцом.

В общем случае уравнения совместности деформации запишем в виде

$$\triangle_i = \triangle_{i+1}, \qquad \varphi_i = \varphi_{i+1}, \tag{4}$$

где $\triangle_i, \triangle_{i+1}$ перемещения краев стыкуемых оболочек от внешних нагрузок, температуры и краевых сил и краевых моментов; φ_i, φ_{i+1} углы поворота стыкуемых оболочек от внешних нагрузок, температуры и краевых сил и краевых моментов.

Уравнения совместности деформаций составляются для каждого стыка многосвязной конструкции.

В стыках оболочек между собой и с кольцом угол поворота стыка определяется через прогибы в узлах

$$\varphi_k = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h},$$

а радиальные перемещения принимаются равными узловым перемещениям на стыках. Коэффициенты дифференциального уравнения (3) определяются методом итераций.

В результате решения системы уравнений совместности перемещений и углов поворота определяются краевые силы и моменты. Далее, используя найденные краевые силы и моменты, производится расчет оболочек и кольца и определяется напряженно-деформированное состояние многосвязной конструкции.

Внутренние усилия и изгибающие моменты, полученные в результате расчета напряженно-деформированного состояния подкрепленной цилиндрической оболочки, входящей в состав многосвязной конструкции, используются в процессе итерации для оптимального выбора геометрических параметров сечений.

3. Задача получения оптимального проекта сводится к минимизации целевой функции при ограничениях на проектные переменные. В качестве целевой функции принимается вес подкрепленной цилиндрической оболочки

$$G = 2\pi R^2 L\gamma W 10^{-2},$$

$$W = x_1 + 0,01\frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{x_2 x_4}{2\pi} + 0,01\frac{\gamma_2}{\gamma}\frac{x_3 x_5}{L}R,$$

где
$x_1 = \frac{10^2 h}{R}$, $x_2 = \frac{10^4 F_1}{R^2}$, $x_3 = \frac{10^4 F_2}{R^2}$ – безразмерные величины толщины обшивки, площади продольных и кольцевых подкреплений,
x_4, x_5 – количество продольных и кольцевых подкрепляющих ребер,
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ – удельные веса материала обшивки,продольных и кольцевых ребер,
h,R,L – толщина, радиус и длина цилиндрической оболочки.

Подкрепляющие ребра могут быть расположены внутри цилиндрической оболочки, снаружи или симметрично относительно обшивки. Поперечные сечения ребер выполняются в виде прямоугольника, уголка, тавра.

Задача минимизации целевой функции веса решается при геометрических ограничениях на толщину обшивки и размеры элементов поперечных сечений подкрепляющего набора

$$g_i(x) \le 1, \qquad i = 1,3,$$
$$g_j(y) \le 1, \qquad j = 1,4,$$
$$g_k(z) \le 1, \qquad k = 1,4.$$

Физические ограничения обеспечивают прочность и устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки. Учитываются ограничения по общей потери устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки, потери устойчивости панели обшивки между ребрами, потери устойчивости элементов подкрепляющих ребер и прочности обшивки и подкрепляющих ребер

$$g_n(x,y,z) \le 1, \qquad n = 1,9.$$

В основе алгоритма оптимизации лежит сведение задачи нелинейного программирования высокой размерности, в которой ряд проектных параметров принимает целочисленные значения, к решению ряда задач меньшей размерности. Используя метод деформированного треугольника [5] определяем оптимальное число продольных и кольцевых ребер. Для заданных значений x_4, x_5 отыскиваются оптимальные значения толщин обшивки и площадей подкреплений. Решение этой задачи осуществляется с помощью алгоритма, основанного на использовании метода спуска по градиенту. Спуск на границу допускаемой области из начальной точки, взятой на плоскости равного уровня целевой функции, осуществляется по формуле

$$x_{i,k} = x_{i,s} - \beta t \frac{W}{\| \nabla W \|^2}\frac{\partial W}{\partial x_i},$$

где $x_{i,s}$ – координаты начальной точки,
$\| \nabla W \|$ – модуль градиента целевой функции,
$\frac{\partial W}{\partial x_i}$ – проекция градиента целевой функции,
β – коэффициент, определяющий величину шага по градиенту,
t – число шагов до активного нагружения.

По найденым площадям решается задача отыскания геометрических размеров элементов сечений продольного и кольцевого подкреплений. Процесс итераций продолжается до достижения заданной точности решения.

В частных случаях результаты оптимального проектирования подкрепленной цилиндрической оболочки хорошо совпадают с известными решениями.

Литература

[1] А.П.Филин Элементы теории оболочек.Л.: Стройиздат, 1975.

[2] В.И.Королев Упруго-пластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971.

[3] В.И.Мяченков,И.В.Григорьев. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ.М.; Машиностроение, 1981.

[4] С.В.Бояршинов. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973.

[5] В.П.Малков,А.Г.Угодчиков. Оптимизация упругих систем. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

OPTIMISATION OF CYLINDER SHELLS UNDER THERMOFORCE LOADING

N.N. Stolyarov,N.I. Dedov,A.N. Simakov[2]

It had got a differential equation, describing the deforming of the strengthing cylinder shell and equations for the radial displacement and the angle turn of the cross-area of the ring under elastic-plastic thermoforce loading. It had offered equations of joint deformation for the multybinding thin shell construction in joints of shells between themselves and with the ring. It had worked out algorithms and programmes of calculation of strain-stress state of cylinder shell with the changing cross-area and the optimisation its geometrical parameters.

[2]Stolyarov Nikolaj Nikolaevich, Dedov Nikolaj Ivanovich, Simakov Alexandor Nikolaevich, dept. of strength of materials of Samara state technique university