ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю.Э. Сеницкий [1]

На основе уравнений уточненной теории, учитывающей деформации поперечного сдвига и инерцию поворота сечений, приводится замкнутое решение неосесимметричной динамической задачи для пологой сферической оболочки из неоднородного материала. Рассматривается наиболее общий случай загружения и упругого закрепления на контуре. Используется метод биортогональных конечных интегральных преобразований. Анализируются различные частные варианты построенного решения.

Введение

Расчету неоднородных оболочек при нестационарных воздействиях уделялось недостаточно внимания. Вместе с тем, подобного рода задачи являются весьма актуальными в атомной энергетике, химическом машиностроении. Действительно, действия реакции, агрессивных сред, интенсивных температурных полей приводит к изменению прочностных характеристик и физико-механических свойств материала, т.е. являются факторами наведенной неоднородности [1]. При взаимодействии одной из поверхностей оболочки с однородными агрессивными полями упругие и инерционные характеристики материала становятся переменными по толщине конструкции z.

В настоящей работе это обстоятельство учитывается путем введения в расчетную модель двух произвольных безразмерных функций неоднородности материала $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Используются линейные соотношения гиперболической теории пологих оболочек [2,3,4], учитывающей эффекты поперечного сдвига и инерции вращения сечений (теория типа Тимошенко). Разрешающая система дифференциальных уравнений при этом теряет симметрию, т.е. является несамосопряженной. Для ее интегрирования применен разработанный автором [5,6] аппарат биортогональных конечных интегральных преобразований (КИП).

Точное решение рассматриваемой неосесимметричной динамической задачи автору неизвестно. Имеются различные варианты ее решения методом разложения по собственным вектор-функциям, соответствующие неосесимметричному [7], осесимметричному [8, 9] деформированию однородных, а также аналогичные результаты

[1] Сеницкий Юрий Эдуардович. Кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарской государственной архитектурно-строительной академии

для неоднородных пологих [5, 10] и трехслойных непологих [11] сферических оболочек.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать в полярных координатах (r^*, θ) пологую сферическую оболочку толщиной $h = h_1 + h_2$ и радиусом кривизны R, загруженную произвольной распределенной нестационарной нормальной $\rho_z^*(r^*, \theta, t^*)$, тангенциальной $\rho_r^*(r^*, \theta, t^*)$, $\rho_\theta^*(r^*, \theta, t^*)$ и моментной $m_r^*(r^*, \theta, t^*)$, $m_\theta^*(r^*, \theta, t^*)$ нагрузкой (t^* - время). Исследуется наиболее общий случай упругого опирания на контуре, коэффициенты жесткости которого $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ (контур с пятью упругими характеристиками). Модуль упругости $E(z)$ и плотность $\rho(z)$ материала изменяются по толщине конструкции, т.е. являются функциями z.

$$E(z) = E_0(z) f_1(z); \qquad \rho(z) = \rho_0 f_0(z), \qquad \nu = const, \tag{1.1}$$

где E_0, ρ_0 - модуль Юнга и плотность материала соответствующей однородной оболочки, ν - коэффициент Пуассона.

Геометрические уравнения для пологой сферической оболочки записываются в виде [12]:

$$\epsilon_r = \epsilon_r^0 + \chi_r^0 z, \quad \epsilon_\theta = \epsilon_\theta^0 + \chi_\theta^0 z, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}^0 + 2\chi_{r\theta}^0 z. \tag{1.2}$$

Здесь $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}, \chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ - соответственно компоненты относительных линейных деформаций, углов сдвига, изменения кривизн изгиба и кручения, причем нулевой индекс относится к нейтральной поверхности оболочки.

$$\epsilon_r^0 = \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + \frac{W^*}{R}, \epsilon_\theta^0 = \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial V^*}{\partial \theta} + U^*\right) + \frac{W^*}{R}, \gamma_{r\theta}^0 = \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \theta} - V^*\right) + \frac{\partial V^*}{\partial r^*},$$

$$\chi_r^0 = \frac{\partial \Psi_r}{\partial r^*}, \quad \chi_\beta^0 = \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \Psi_r^*\right), \quad 2\chi_{r\theta}^0 = \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} - \Psi_\theta\right) + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial r^*},$$

$$\gamma_{rz} = \Psi_r + \frac{\partial W^*}{\partial r^*}, \qquad \gamma_{\theta z} = \Psi_\theta + \frac{1}{r^*}\frac{\partial W^*}{\partial \theta}, \tag{1.3}$$

где $W^*(r^*, \theta, t), U^*(r^*, \theta, t), V^*(r^*, \theta, t), \Psi_r(r^*, \theta, t), \Psi_\theta(r^*, \theta, t)$ - нормальная и тангенциальные составляющие вектора перемещений, а также углы поворота сечений в меридиональной и перпендикулярной ей плоскостях. Последние две формулы (1.3) соответствуют знакам, принятым в теории Миндлина [13].

Если выбрать положение нейтральной поверхности из условия

$$\int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(z) z dz = 0, \tag{1.4}$$

то физические соотношения связывающие погонные усилия и деформации записываются также, как и для однородных оболочек [4]. С учетом геометрических уравнений в результате имеем:

$$N_r^* = C_n\left[\frac{\partial U^*}{\partial r^*} + \frac{\nu}{r^*}\left(U^* + \frac{\partial U^*}{\partial \theta}\right) + \frac{1+\nu}{R} W^*\right],$$

$$N_\theta^* = C_n \left[\nu \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \left(U^* + \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1+\nu}{R} W^* \right],$$

$$N_{r\theta}^* = C_n \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \theta} - V^* \right) + \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right],$$

$$M_r^* = D_n \left[\frac{\partial \Psi_r}{\partial r^*} + \frac{\nu}{r^*} \left(\Psi_r + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$M_\theta^* = D_n \left[\nu \frac{\partial \Psi_r}{\partial r^*} + \frac{\nu}{r^*} \left(\Psi_r + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$M_{r\theta}^* = D_n \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\nu}{r^*} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \Psi_\theta \right) + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial r^*} \right], \tag{1.5}$$

$$Q_r^* = \frac{k_1(1-\nu)}{2} C_n \left(\Psi_r + \frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right), \qquad Q_\theta^* = \frac{k_1(1-\nu)}{2} C_n \left(\Psi_\theta + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*} \right)$$

Здесь $N_r^*, N_\theta^*, N_{r\theta}^*, M_r^*, M_\theta^*, M_{r\theta}^*, Q_r^*, Q_\theta^*$ - соответственно нормальные и сдвигающие усилия, изгибающие и крутящий моменты, поперечные силы; C_n, D_n - соответствующие обобщенные жесткости, определяемые с учетом (1.1) по формулам:

$$C_n = E_0 h \left(1-\nu^2\right)^{-1} n_1, \qquad D_n = E h^3 \left[12\left(1-\nu^2\right)\right]^{-1} n_2, \tag{1.6}$$

причем

$$n_1 = h^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_1(z) dz, \quad n_2 = 12 h^{-3} \int_{-h_1}^{h_2} f_1(z) z^2 dz, \tag{1.7}$$

k_1 - коэффициент поперечного сдвига [2].

Дифференциальные уравнения движения пологой сферической оболочки в усилиях могут быть представлены следующим образом [4]:

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\partial N_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*}\left(N_r^* - N_\theta^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial N_{r\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{1}{R}Q_r^* - \rho F_m \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} = -P_r^*; \\
\frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial N_{r\theta}^*}{\partial \theta} + 2N_{r\theta}^*\right) + \frac{\partial N_{r\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{R}Q_\theta^* - \rho F_m \frac{\partial^2 V^*}{\partial t_*^2} = -P_\theta^*; \\
\frac{\partial Q_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - Q_r^*\right) - \frac{N_r^* + N_\theta^*}{R} - \rho F_m \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} = -P_z^*; \\
\frac{1}{r^*}\left(\frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + 2M_{r\theta}^*\right) + \frac{\partial M_{r\theta}^*}{\partial r} - Q_\theta^* - \rho J_m \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2} = -m_\theta^*; \\
\frac{\partial M_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*}\left(M_r^* - M_\theta^*\right) - \frac{1}{r^*}\frac{\partial M_{r\theta}^*}{\partial \theta} - Q_r^* - \rho J_m \frac{\partial^2 \Psi_r^*}{\partial t_*^2} = -m_r^*,
\end{array}\right\} \tag{1.8}$$

где

$$\rho F_m = \rho_0 h \left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right] m_1, \quad \rho J_m = \rho_0 \frac{h^3}{12} \left[1 + \frac{3}{20}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right] m_2;$$

$$m_1 = h^{-1} \left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right]^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_2(z) \left[1 + 2\frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right] dz; \tag{1.9}$$

$$m_2 = 12 h^{-3} \left[1 + \frac{3}{20}\left(\frac{h^2}{R}\right)^2\right]^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_2(z) z^2 \left[1 + 2\frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right] dz.$$

R - радиус кривизны нейтральной поверхности оболочки.

С учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ $(N_{r\theta} = N_{\theta r})$, шестое уравнение равновесия моментов относительно оси симметрии оболочки приводит к известному соотношению

$$M_{r\theta} = M_{\theta r}$$

Если теперь ввести безразмерные переменные по формулам

$$r = r^* a^{-1}, \quad (U, V, W) = (U^*, V^*, W^*)\, a^{-1}, \quad t = t^* a^{-1} \left[\frac{E_0}{\rho_0\,(1-\nu^2)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(P_r, P_\theta, P_z) = (P_r^*, P_\theta^*, P_z^*)\, a C_n^{-1}, (m_r, m_\theta) = (m_r^*, m_\theta^*)\, \gamma_{12} \left(\alpha_1^2 C_n n_1\right)^{-1}, \tag{1.10}$$

причем a - радиус оболочки в плане, и воспользоваться соотношениями (1.5), то дифференциальные уравнения (1.8) и граничные условия упругого закрепления на контуре $(r^* = a)$ могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{array}{c}
\bar{L}(U) + \frac{1-\nu}{2r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + Q^-(V) + (1+\nu)\,\beta_1 \frac{\partial W}{\partial r} - m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -P_r; \\
\frac{1-\nu}{2}\bar{L}(V) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + Q^+(U) + (1+\nu)\,\beta_1 \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta} - m^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -P_\theta; \\
k^2 \left\{\bar{L}(W) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + W\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\Psi_r)}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}\right]\right\} - \\
(1+\nu)\,\beta_1 \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rU)}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + 2\beta_1 W\right\} - m^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -P_z; \\
\frac{1-\nu}{2}\bar{L}(\Psi_\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta^2} + Q^+(\Psi_r) - \frac{k^2}{\alpha_1^2}\gamma_{12}\left(\Psi_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) - s^2 \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2} = -m_\theta; \\
\bar{L}(\Psi_r) + \frac{1-\nu}{2r^2}\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial \theta^2} + Q^-(\Psi_\theta) - \frac{k^2}{\alpha_1^2}\gamma_{12}\left(\Psi_r + \frac{\partial W}{\partial r}\right) - s^2 \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2} = -m_r
\end{array}\right\} \tag{1.11}$$

$$U(r,0,t) = U(r,2\pi n,t), \quad V(r,0,t) = V(r,2\pi n,t), \quad W(r,0,t) = W(r,2\pi n,t),$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=2\pi n}, \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{\theta=2\pi n}, \left.\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|_{\theta=2\pi n}. \tag{1.12}$$

$$\{U(0,\theta,t), V(0,\theta,t), W(0,\theta,t), \Psi_r(0,\theta,t), \Psi_\theta(0,\theta,t)\} < \infty, (r=0) \tag{1.13}$$

$$\left.\left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(U + \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + (1+\nu)\,\beta_1 W\right]\right|_{r=1} = \chi_1 U|_{r=1};$$

$$k^2 \left.\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \Psi_r\right)\right|_{r=1} = \chi_2 W|_{r=1}; \left.\left[\frac{\partial \Psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \Psi_r\right)\right]\right|_{r=1} = \chi_3 \Psi_r|_{r=1};$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left.\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - V\right) + \frac{\partial V}{\partial r}\right]\right|_{r=1} = \chi_4 V|_{r=1};$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left.\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} - \Psi_\theta\right) + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}\right]\right|_{r=1} = \chi_5 \Psi_\theta|_{r=1}, \qquad (r=1) \tag{1.14}$$

$$U|_{t=0} = U_0(r,\theta),\; V|_{t=0} = V_0(r,\theta),\; W|_{t=0} = W_0(r,\theta),$$

$$\Psi_r|_{t=0} = \Psi_0(r,\theta),\; \Psi_\theta|_{t=0} = \Lambda_0(r,\theta),$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{U}_0(r,\theta),\; \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{V}_0(r,\theta),\; \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{W}_0(r,\theta),$$

$$\left.\frac{\partial \Psi_r}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(r,\theta),\; \left.\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Lambda}_0(r,\theta), \quad (t=0) \tag{1.15}$$

где $\bar{L}(\ldots)=\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\ldots)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}(\ldots), Q^{\pm}(\ldots)=\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1+\nu)\frac{\partial(\ldots)}{\partial r}\pm\frac{3-\nu}{r}(\ldots)\right]$

$$m^2=\left(1+\alpha_1^2\beta_1^2\right)\gamma_1; s^2=\left(1+\frac{9}{5}\alpha_1^2\beta_1^2\right)\gamma_2; \alpha_1^2=\frac{h^2}{12a^2}; \beta_1=\frac{a}{R}; k^2=\frac{k_1(1-\nu)}{2},$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}$ - безразмерные коэффициенты неоднородности материала

$$\gamma_1=\frac{m_1}{n_1}, \quad \gamma_2=\frac{m_2}{n_2}, \quad \gamma_{12}=\frac{n_1}{n_2} \tag{1.16}$$

Соотношения (1.12),(1.13),(1.14) - соответственно условия периодичности, ограниченности в полюсе ($r=0$) сплошной круговой оболочки и упругого опирания на контуре ($r=1$). В общем случае считаются заданными начальные перемещения (начальные несовершенства) U_0, V_0, W_0, Ψ_0, Λ_0 и начальные линейные и угловые скорости перемещений $\dot{U}_0$, $\dot{V}_0$, $\dot{W}_0$, $\dot{\Psi}_0$, $\dot{\Lambda}_0$.

Если принять $f_1(z)=f_2(z)=1$, то из (1.1), (1.4), (1.7), (1.9), (1.16) следует $E=E_0, \rho=\rho_0, h_1=h_2=\frac{h}{2}, n_1=n_2=m_1=m_2=1, \gamma_1=\gamma_2=\gamma_{12}=1$, и система (1.11) превращается в известные дифференциальные уравнения движения однородной пологой сферической оболочки [4], [7].

Равенства (1.11)-(1.15) и представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

2. Метод решения

Решение осуществляем методом конечных интегральных преобразований (КИП). Сначала применяем синус и косинус - преобразования Фурье с конечными пределами по угловой координате θ, т.е.

$$\{U_c(r,n,t), W_c(r,n,t), \Psi_c(r,n,t)\}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\{U(r,\theta,t), W(r,\theta,t), \Psi_r(r,\theta,t)\}\,cosn\theta d\theta;$$

$$\{V_s(r,n,t), \Psi_s(r,n,t)\}=\int_0^{2\pi}\{V(r,\theta,t), \Psi_\theta(r,\theta,t)\}\,sinn\theta d\theta. \tag{2.1}$$

с соответствующими формулами обращения

$$\{U(r,\theta,t), W(r,\theta,t), \Psi_r(r,\theta,t)\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\{U_c(r,n,t), W_c(r,n,t), \Psi_c(r,n,t)\}\,cosn\theta;$$

$$\{V(r,\theta,t), \Psi_\theta(r,\theta,t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\{V_s(r,n,t), \Psi_s(r,n,t)\}\,sinn\theta, \tag{2.2}$$

$$\Omega_n=\begin{cases}\pi^{-1}, n\neq 0\\ (2\pi)^{-1}, n=0.\end{cases}$$

Подвергая 1, 3, 5 уравнения (1.11), соответствующие граничные (1.13), (1.14) и начальные (1.15) условия косинус-преобразованию, а 2, 4 равенства (1.11) и оставшиеся соотношения (1.13) – (1.15) синус-преобразованию Фурье, получаем

$$\left.\begin{array}{c} \bar{L}(U_c) - \frac{1-\nu}{2r^2}n^2U_c + Q_*^-(V_s) + (1+\nu)\beta_1\frac{\partial W_c}{\partial r} - m^2\frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} = -p_c; \\ \frac{1-\nu}{2}\bar{L}(V_s) - \frac{n^2}{r^2}V_s - Q_*^+(U_c) - (1+\nu)\beta_1\frac{n}{r}W_c - m^2\frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2} = -p_s; \\ k^2\left\{\bar{L}(W_c) + (1-n^2)\frac{1}{r^2}W_c + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\Psi_c)}{\partial r} + n\Psi_s\right]\right\} - (1+\nu)\beta_1 * \\ \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rU_c)}{\partial r} + nV_s\right] + 2\beta_1 W_c\right\} - m^2\frac{\partial^2 W_c}{\partial t^2} = -z_c; \\ \frac{1-\nu}{2}\bar{L}(\Psi_s) - \frac{n^2}{r^2}\Psi_s - Q_*^+(\Psi_c) - \frac{k^2}{\alpha_1^2}\gamma_{12}\left(\Psi_s - \frac{n}{r}W_c\right) - s^2\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial t^2} = -m_s; \\ \bar{L}(\Psi_c) - \frac{1-\nu}{2r^2}n^2\Psi_c + Q_*^-(\Psi_s) - \frac{k^2}{\alpha_1^2}\gamma_{12}\left(\Psi_c + \frac{\partial W_c}{\partial r}\right) - s^2\frac{\partial^2\Psi_c}{\partial t^2} = -m_c. \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

$$U_c < \infty, V_s < \infty, W_c < \infty, \Psi_s < \infty, \Psi_c < \infty. (r=0) \qquad (2.4)$$

$$\left[\frac{\partial U_c}{\partial r} + \nu(U_c + nV_s) + (1+\nu)\beta_1 W_c\right]\Bigg|_{r=1} = \chi_1 U_c(1,n,t); (r=1)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial V_s}{\partial r} - nU_c - V_s\right]\Bigg|_{r=1} = \chi_4 V_s(1,n,t); k^2\left[\frac{\partial W_c}{\partial r} + \Psi_c\right]\Bigg|_{r=1} = \chi_2 W_c(1,n,t);$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - n\Psi_c - \Psi_s\right]\Bigg|_{r=1} = \chi_5\Psi_s(1,n,t); \qquad (2.5)$$

$$\left[\frac{\partial \Psi_c}{\partial r} + \nu(n\Psi_s + \Psi_c)\right]\Bigg|_{r=1} = \chi_3\Psi_c(1,n,t).$$

$$U_c = U_{oc}(r,n); V_s = V_{os}(r,n); W_c = W_{oc}(r,n); \Psi_s = \Lambda_{oc}(r,n); (t=0)$$

$$\Psi_c = \Psi_{oc}(r,n); \left.\frac{\partial U_c}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{U}_{oc}(r,n); \left.\frac{\partial V_s}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{V}_o(r,n); \qquad (2.6)$$

$$\left.\frac{\partial W_c}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{W}_{oc}(r,n); \left.\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Lambda}_{os}(r,n); \left.\frac{\partial \Psi_c}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Psi}_{oc}(r,n).$$

Здесь

$$Q_*^{\pm}(\ldots) = \frac{n}{2r}\left[(1+\nu)\frac{\partial(\ldots)}{\partial r} \pm \frac{3-\nu}{r}(\ldots)\right];$$

p_c, z_c, m_c, p_s, m_s - косинус и синус-трансформанты Фурье соответствующих функций динамических нагрузок, а именно:

$$\{p_c(r,n,t), z_c(r,n,t), m_c(r,n,t)\} = \int_0^{2\pi}\{p_r(r,\theta,t), p_\theta(r,\theta,t), m_r(r,\theta,t)\}\, cosn\theta d\theta$$

$$\{p_s(r,n,t), m_s(r,n,t)\} = \int_0^{2\pi}\{p_\theta(r,\theta,t), m_\theta(r,\theta,t)\}\, sinn\theta d\theta. \qquad (2.7)$$

Аналогично представляются и трансформанты функций начальных перемещений и их скоростей.

$$\left\{U_{oc}(r,n), \dot{U}_{oc}(r,n), \ldots, \dot{\Psi}_{oc}(r,n)\right\} = \int_0^{2\pi}\left\{U_o(r,\theta), \dot{U}_o(r,\theta), \ldots, \dot{\Psi}_o(r,\theta)\right\} cosn\theta d\theta;$$

$$\left\{V_{os}(r,n),\ldots,\dot{\Lambda}_{os}(r,n)\right\}=\int\limits_0^{2\pi}\left\{V_o(r,\theta),\ldots,\dot{\Lambda}_o(r,\theta)\right\}sinn\theta d\theta. \qquad (2.8)$$

В процессе преобразования системы уравнений (1.11) к (2.3) учитывались условия периодичности (1.12).

Воспользуемся теперь пятикомпонентным биортогональным КИП по переменной r [5], [6] с неизвестными пока компонентами двух ядровых функций $G_1(\lambda_{in},r)$, $G_2(\lambda_{in},r)$, $\ldots$, $G_5(\lambda_{in},r)$, $K_1(\mu_{in},r)$, $K_2(\mu_{in},r)$, $\ldots$, $K_5(\mu_{in},r)$ и весовыми коэффициентами b_1, b_2, $\ldots$, b_5, т.е.

$$\phi(\lambda_{in},n,t)=\int\limits_0^1[b_1U_c(r,n,t)G_1(\lambda_{in},r)+b_4V_s(r,n,t)G_4(\lambda_{in},r)+b_2W_c(r,n,t)*$$

$$*G_2(\lambda_{in},r)+b_5\Psi_s(r,n,t)G_5(\lambda_{in},r)+b_3\Psi_c(r,n,t)G_3(\lambda_{in},r)]\,rdr. \qquad (2.9)$$

$$\{U_c(r,n,t);V_s(r,n,t),W_c(r,n,t),\Psi_s(r,n,t),\Psi_c(r,n,t)\}=\sum_{i=1}^{\infty}\phi(\lambda_{in},n,t)*$$

$$*\{K_1(\mu_{in},r),K_4(\mu_{in},r),K_2(\mu_{in},r),K_5(\mu_{in},r),K_3(\mu_{in},r)\}\left(\bar{K}_i,\bar{G}_i\right)^{-1}, \qquad (2.10)$$

где λ_{in}, μ_{in} - параметры, образующие для каждого "n" счетные множества ($i=1,\bar{\infty}$),

$$\left(\bar{K}_i,\bar{G}_i\right)=\int\limits_0^1\left[\sum_{k=1}^{5}b_kK_k(\mu_{in},r)G_k(\lambda_{in},r)\right]rdr. \qquad (2.11)$$

Равенства (2.9), (2.10) представляют соответственно трансформанту и формулы обращения биортогонального КИП.

Применяя к уравнениям (2.3) и начальным условиям (2.6) преобразование (2.9) в соответствии со структурным алгоритмом метода подробно описанным в [6], [9], в результате получаем счетное множество задач Коши относительно трансформанты $\Phi(\lambda_{in},t)$.

$$\frac{d^2\phi(\lambda_{in},n,t)}{dt^2}+\lambda_{in}^2\phi(\lambda_{in},n,t)=-\rho(\lambda_{in},n,t);i=1,\bar{\infty}$$

$$\phi(\lambda_{in},n,0)=\phi_0(\lambda_{in},n);\ \left.\frac{d\phi(\lambda_{in},n,t)}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\phi}_0(\lambda_{in},n);(t=0) \qquad (2.12)$$

и сопряженную для компонент ядра $G_k(\lambda_{in},r)$ биортогонального КИП однородную систему дифференциальных уравнений и граничных условий

$$\left.\begin{array}{c}
\bar{L}(G_1)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}G_1+Q_*^+(G_4)-(1+\nu)\beta_1G_2'+\lambda_{in}^2m^2G_1=0;\\
\frac{1-\nu}{2}\bar{L}(G_4)-\frac{n^2}{r^2}G_4-Q_*^+(G_1)-(1+\nu)\beta_1\frac{n}{r}G_2+\lambda_{in}^2m^2G_4=0;\\
k^2\left\{\bar{L}(G_2)+\frac{1-n^2}{r^2}G_2+\frac{\gamma_{12}}{r}\left[(rG_3)'+nG_5\right]\right\}-\\
-(1+\nu)\beta_1\left\{\frac{1}{r}\left[(rG_1)'+nG_4\right]+2\beta_1G_2\right\}+\lambda_{in}^2m^2G_2=0;\\
\alpha_1^2\left[\frac{1-\nu}{2}\bar{L}(G_5)-\frac{n^2}{r^2}G_5-Q_*^+(G_3)\right]-k^2\left(\gamma_{12}G_5-\frac{n}{r}G_2\right)+\lambda_{in}^2\alpha_1^2s^2G_5=0;\\
\alpha_1^2\left[\bar{L}(G_3)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}G_3+Q_*^-(G_5)\right]-k^2\left(G_2'+\gamma_{12}G_3\right)+\lambda_{in}^2\alpha_1^2s^2G_3=0;
\end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

$$G_1<\infty;G_2<\infty;G_3<\infty;G_4<\infty;G_5<\infty,(r=0) \qquad (2.14)$$

$$G_1' + \nu\left(G_1 + nG_4\right) + (1+\nu)\beta_1 G_2 - \chi_1 G_1 = 0;$$
$$\frac{1-\nu}{2}\left(G_4' - nG_1 - G_4\right) - \chi_4 G_4 = 0; k^2\left(G_2' + \gamma_{12}G_3\right) - \chi_2 G_2 = 0; (r=1)$$
$$\frac{1-\nu}{2}\left(G_5' - G_5 - nG_3\right) - \chi_5 G_5 = 0; G_3' + \nu\left(G_3 + nG_5\right) - \chi_3 G_3 = 0. \qquad (2.15)$$

Здесь

$$\rho(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^1 r\left[m^{-2}\left(b_1 p_c G_1 + b_4 p_s G_4 + b_2 z_c G_2\right) + s^{-2}\left(b_5 m_s G_5 + b_3 m_c G_3\right)\right] dr;$$

$$\phi_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^1 r\left(b_1 U_{oc} G_1 + b_4 V_{os} G_4 + b_2 W_{oc} G_2 + b_5 \Lambda_{os} G_5 + b_3 \Psi_{oc} G_3\right) dr;$$

$$\dot\phi_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^1 r\left(b_1 \dot U_{oc} G_1 + b_4 \dot V_{os} G_4 + b_2 \dot W_{oc} G_2 + b_5 \dot\Lambda_{os} G_5 + b_3 \dot\Psi_{oc} G_3\right) dr.$$

Штрих обозначает дифференцирование по r.

В процессе приведения (2.3) — (2.5) к (2.13) — (2.15) проводилось интегрирование по частям, использовались операционное свойство, обращение в нуль внеинтегральных членов на концах интервала $r = \overline{0,1}$, а также условия (2.4), (2.5) [9]. Коэффициенты при инерционных членах уравнения движения (1.11) определяют параметры b_1, b_2, ..., b_5 биортогонального КИП (2.9). Имеем:

$$b_1 = b_2 = b_4 = m^2, b_3 = b_5 = \alpha_1^2 s^2. \qquad (2.16)$$

Поскольку структурный алгоритм метода КИП [5], [6], [9] содержит алгоритмическую процедуру выделения сопряженного оператора, то
(2.13) - (2.15) при соответствиях $U_c \sim G_1$, $W_c \sim G_2$, $\Psi_c \sim G_3$, $V_s \sim G_4$, $\Psi_s \sim G_5$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim -\lambda_{in}^2$ представляет сопряженную к (2.3) — (2.5) краевую задачу для векторфункции ядра биортогонального преобразования (2.9), (2.10).

Общее решение счетной системы уравнений (2.12) записывается в виде

$$\phi(\lambda_{in}, n, t) = \phi_0(\lambda_{in}, n) cos\lambda_{in} t + \frac{\dot\phi_0(\lambda_{in}, n)}{\lambda_{in}} sin\lambda_{in} t -$$
$$-\frac{1}{\lambda_{in}}\int_0^t \rho(\lambda_{in}, n, \tau) sin\lambda_{in}(t-\tau) d\tau. \qquad (2.17)$$

К системе уравнений (2.13) применяем теперь преобразование (2.9), но с компонентами ядра $K_1, K_2, \ldots, K_5$. Если опять воспользоваться структурным алгоритмом [6], [9] и учесть равенства (2.16) и условия (2.14), (2.15), то в результате получаем соотношение биортогональности [5], [6].

$$\left(\bar K_i, \bar G_j\right) = \delta_i^j \left(\bar K_i, \bar G_i\right),$$

(δ_i^j — символ Кронекера), при котором справедлива формула обращения (2.10), и сопряженную к сопряженной (2.13) — (2.15) краевую задачу для K_1, K_2, ..., K_5. Имеем

$$\left.\begin{array}{c}\bar{L}(K_1)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}K_1+Q_*^-(K_4)+(1+\nu)\beta_1K_2'+\mu_{in}^2m^2K_1=0;\\ \frac{1-\nu}{2}\tilde{L}(K_4)-\frac{n^2}{r^2}K_4-Q_*^+(K_1)-(1+\nu)\beta_1\frac{n}{r}K_2+\mu_{in}^2m^2K_4=0;\\ k^2\left\{\bar{L}(K_2)+\frac{1-n^2}{r^2}K_2+\frac{1}{r}\left[(rK_3)'+nK_5\right]\right\}-\\ -(1+\nu)\beta_1\left\{\frac{1}{r}\left[(rK_1)'+nK_4\right]-2\beta_1K_2\right\}+\mu_{in}^2m^2K_2=0;\\ \alpha_1^2\left[\frac{1-\nu}{2}\bar{L}(K_5)-\frac{n^2}{r^2}K_5-Q_*^+(K_3)\right]-k^2\gamma_{12}\left(K_5-\frac{n}{r}K_2\right)+\mu_{in}^2\alpha_1^2s^2K_5=0;\\ \alpha_1^2\left[\bar{L}(K_3)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}K_3+Q_*^-(K_5)\right]-k^2\gamma_{12}\left(K_2'+K_3\right)+\mu_{in}^2\alpha_1^2s^2K_3=0;\end{array}\right\} \quad (2.18)$$

$$K_1<\infty; K_2<\infty; K_3<\infty; K_4<\infty; K_5<\infty, (r=0) \quad (2.19)$$

$$K_1'+\nu\left(K_1+nK_4\right)+(1+\nu)\beta_1K_2-\chi_1K_1=0; (r=1)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(K_4'-K_4-nK_1\right)-\chi_4K_4=0; k^2\left(K_2'+K_3\right)-\chi_2K_2=0;$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(K_5'-K_5-nK_3\right)-\chi_5K_5=0; K_3'+\nu\left(K_3+nK_5\right)-\chi_3K_3=0. \quad (2.20)$$

При аналогичных соответствиях $U_c\sim K_1$, $W_c\sim K_2$, $\Psi_c\sim K_3$, $V_s\sim K_4$, $\Psi_s\sim K_5$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sim-\mu_{in}^2$ однородная краевая задача (2.18) — (2.20) для K_1, $\ldots$, K_5 является инвариантной к (2.3) — (2.5).

3. Интегрирование ядровой краевой задачи

Обе однородные краевые задачи (2.13)–(2.15) и (2.18)–(2.20) можно объединить. Ниже и рассмотрим такую обобщенную задачу.

$$\left.\begin{array}{c}\bar{L}\left(F_1\right)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}F_1+Q_*^-\left(F_2\right)+(1+\nu)\beta_1F_3'+\varepsilon_{in}^2m^2F_1=0;\\ \frac{(1-\nu)}{2}\bar{L}\left(F_2\right)-\frac{n^2}{r^2}F_2-Q_*^+\left(F_1\right)-(1+\nu)\beta_1\frac{n}{r}F_3+\varepsilon_{in}^2m^2F_2=0;\\ k^2\left\{\bar{L}\left(F_3\right)+\frac{1-n^2}{r^2}F_3+\frac{l_1}{r}\left[(rF_s)'+nF_4\right]\right\}-\\ -(1+\nu)\beta_1\left\{\frac{1}{r}\left[(rF_1)'+nF_2\right]-2\beta_1F_3\right\}+\varepsilon_{in}^2m^2F_3=0;\\ \alpha_1^2\left[\frac{1-\nu}{2}\bar{L}\left(F_4\right)-\frac{n^2}{r^2}F_4-Q_*^+\left(F_5\right)\right]-k^2\left(\gamma_{12}F_4-l_2\frac{n}{r}F_3\right)+\varepsilon_{in}^2\alpha_1^2s^2F_4=0;\\ \alpha_1^2\left[\bar{L}\left(F_5\right)-\frac{(1-\nu)n^2}{2r^2}F_5+Q_*^-\left(F_4\right)\right]-k^2\left(l_2F_3'+\gamma_{12}R_5\right)+\varepsilon_{in}^2\alpha_1^2s^2F_5=0.\end{array}\right\} \quad (3.1)$$

$$F_1<\infty, F_2<\infty, F_3<\infty, F_4<\infty, F_5<\infty, (r=0)$$

$$F_1'+\nu\left(F_1+nF_2\right)+(1+\nu)\beta_1F_3-\chi_1F_1=0; (r=1) \quad (3.2)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(F_2'-F_2-nF_1\right)-\chi_4F_2=0; k^2\left(F_3'+l_1F_5\right)-\chi_2F_3=0;$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(F_4'-F_4-nF_5\right)-\chi_5F_4=0; F_5'+\nu\left(F_5+nF_4\right)-\chi_3F_5=0. \quad (3.3)$$

Здесь

$$l_1,l_2=\left\{\begin{array}{l}\gamma_{12},1-(2.13)-(2.15)\\ 1,\gamma_{12}-(2.18)-(2.20).\end{array}\right.$$

$$\varepsilon_{in}\sim\lambda_{in},\mu_{in},F_1\sim G_1,K_1,F_2\sim G_4,K_4,$$

$$F_3\sim G_2,K_2,F_4\sim G_5,K_5,F_5\sim G_3,K_3.$$

Преобразуем сначала два первых уравнения (3.1). Для этой цели введем функции $U(\varepsilon, r)$ и $\Phi(\varepsilon, r)$ (индексы у ε_{in} опускаем) по формулам

$$F_1 = U' - r\Phi, F_2 = -\frac{n}{r}U. \tag{3.4}$$

С учетом (3.4) первые два уравнения (3.1) принимают такой вид:

$$\nabla_F^2 \Phi = -\frac{2}{1-\nu} m^2 \varepsilon^2 \Phi; \tag{3.5}$$

$$\nabla_F^2 = -m^2\varepsilon^2 U - (1+\nu)\beta_1 F_3 + \frac{1+\nu}{2} r\Phi' + 2\Phi, \tag{3.6}$$

где $\nabla_F^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$ – образ Фурье дифференциального оператора Лапласа.

Аналогично, путем замены

$$F_4 = \frac{n}{r}\left(F_3 - k^{-2}V\right); F_5 = -F_3' + k^{-2}\left(V' - r\Lambda\right) \tag{3.7}$$

преобразуются два последних уравнения системы (3.1). Имеем

$$\nabla_F^2 \Lambda = \frac{2}{1-\nu}\left(\gamma_{12}\alpha_1^{-2}k^2 - s^2\varepsilon^2\right)\Lambda; \tag{3.8}$$

$$\nabla_F^2 V = k^2\left\{\nabla_F^2 F_3 + \left[k^2\alpha_1^{-2}(l_2 - \gamma_{12}) + s^2\varepsilon^2\right]F_3\right\} +$$
$$+(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2)V + \frac{1+\nu}{2} r\Lambda' + 2\Lambda. \tag{3.9}$$

Если подставить (3.4), (3.7) в третье уравнение (3.1), то получаем

$$k^2(1-l_1)\nabla_F^2 F_3 - \left[2(1+\nu)\beta_1^2 - m^2\varepsilon^2\right]F_3 - (1+\nu)\beta_1\nabla_F^2 U + l_1\nabla_F^2 V +$$
$$+ (1+\nu)\beta_1(r\Phi' + 2\Phi) - l_1(r\Lambda' + 2\Lambda) = 0.$$

С учетом вторых равенств (3.4), (3.7) это уравнение принимает вид:

$$k^2\nabla_F^2 F_3\left[\left(l_1k^2s^2 + m^2\right)\varepsilon^2 - \left(1-\nu^2\right)\beta_1^2 + l_1k^4\alpha_1^{-2}(l_2 - \gamma_{12})\right]F_3 +$$
$$+ (1+\nu)\beta_1 m^2\varepsilon^2 U + l_1\left(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2\right)V +$$
$$+\frac{1-\gamma^2}{2}\beta_1(r\Phi') - l_1\frac{1-\nu}{2}(r\Lambda') = 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, имеем систему уравнений (3.4), (3.7), (3.10) относительно F_3, U, V, Φ, Λ. Равенства (3.4), (3.7) позволяют установить соотношения

$$\nabla_F^4\Phi = \frac{4}{(1-\nu)^2}m^4\varepsilon^4\Phi; \nabla_F^2(r\Phi') = -\frac{2}{1-\nu}m^2\varepsilon^2(r\Phi' + 2\Phi);$$

$$\nabla_F^4(r\Phi') = \frac{4}{(1-\nu)^2}m^4\varepsilon^4(r\Phi' + 4\Phi); \nabla_F^4\Lambda = \frac{4}{(1-\nu)^2}\left(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2\right)\Lambda;$$

$$\nabla_F^2(r\Lambda') = \frac{2}{1-\nu}\left(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2\right)(r\Lambda' + 2\Lambda);$$

$$\nabla_F^4(r\Lambda') = \frac{4}{(1-\nu)^2}\left(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2\right)(r\Lambda' + 4\Lambda). \tag{3.11}$$

Для того, чтобы исключить из (3.10) $U, V, r\Phi', r\Lambda'$, подействуем сначала на его левую часть оператором $(\nabla_F^2 + m^2\varepsilon^2)$ и воспользуемся соответствующими равенствами (3.11), (3.6), (3.9). Имеем

$$k^2\nabla_F^4 F_3 + \left[(1+k^2)m^2\varepsilon^2 + k^4\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - (1-\gamma^2)\beta_1^2\right]\nabla_F^2 F_3 +$$

$$+\left\{[m^4 + lk^2 s^2(m^2-s^2)]\varepsilon^4 + (k^4\gamma_{12}\alpha_1^{-2}[l_1(2s^2-m^2) + (m^2-s^2)] -\right.$$

$$\left. -2(1+\nu)\beta_1^2 m^2)\varepsilon^2 + k^6\gamma_{12}^2\alpha_1^{-4}(1-l_1)\right\} F_3 + l_1(k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2)[(m^2-s^2)\varepsilon^2 +$$

$$+k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2}]V + l_1\frac{1-\nu}{2}[(s^2-m^2)\varepsilon^2 - k^2\gamma_{12}\alpha_1^2](r\lambda') = 0. \qquad (3.12)$$

Действуя теперь на (3.12) оператором $\alpha_1^2(l_1k^2\gamma_{12})^{-1}(\nabla_F^2 + s^2\varepsilon^2)$ с учетом (3.11), и вычитая из полученного уравнения равенство (3.12), имеем

$$\nabla_F^6 F_3(\varepsilon, r) + B_1^{in}\nabla_F^4 F_3(\varepsilon, r) + B_2^{in}\nabla_F^2 F_3(\varepsilon, r) + B_3^{in} F_3(\varepsilon, r) = 0, \qquad (3.13)$$

где

$$B_1^{in} = [s^2 + (1+k^{-2})m^2]\varepsilon^2 - k^{-2}(1-\nu^2)\beta_1^2;$$

$$B_2^{in} = [m^2k^{-2} + (1+k^{-2})s^2]m^2\varepsilon^2 - \{\beta_1^2 k^{-2}[2(1+\nu)m^2 + (1-\nu^2)s^2] +$$

$$+\gamma_{12}m^2\alpha_1^{-2}\}\varepsilon^2 + \gamma_{12}\beta_1^2\alpha_1^{-2}(1-\gamma^2);$$

$$B_3^{in} = m^4k^{-2}s^2\varepsilon^6 - [2\beta_1^2k^{-2}(1+\nu)s^2 + \gamma_{12}m^2\alpha_1^{-2}]m^2\varepsilon^4 +$$

$$+2\gamma_{12}\beta_1^2\alpha_1^{-2}(1+\gamma)m^2\varepsilon^2. \qquad (3.14)$$

В результате система (3.1) преобразована к трем независимым уравнениям (3.13), (3.5), (3.8) относительно F_3, Φ, Λ.

Введем порождающее дифференциальное уравнение II-го порядка

$$\nabla_F^2 F_{3k} = -(\xi_k^{in})^2 F_{3k}, \qquad (3.15)$$

тогда

$$\nabla_F^4 F_{3k} = \left(\xi_k^{in}\right)^4 F_{3k}, \nabla_F^6 F_{3k} = -\left(\xi_k^{in}\right)^6 F_{3k}. \qquad (3.16)$$

Подстановка (3.15), (3.16) в (3.13) приводит к такому кубическому уравнению для $(\xi_k^{in})^2$:

$$\left(\xi_k^2\right)^3 - B_1^{in}\left(\xi_k^2\right)^2 + B_2^{in}\xi_k^2 - B_3^{in} = 0, \qquad (3.17)$$

которое определяет три корня $\left(\xi_1^{in}\right)^2, \left(\xi_2^{in}\right)^2, \left(\xi_3^{in}\right)^2$.

Поскольку (3.15) является уравнением Бесселя, и учитывая линейность (3.13), его общее решение можно представить в виде:

$$F_3(\varepsilon_{in}, r) = \sum_{k=1}^{3}\left[C_{1k}^{in}J_n(\xi_k^{in}r) + D_{1k}^{in}Y_n(\xi_k^{in}r)\right]. \qquad (3.18)$$

Здесь J_n, Y_n — цилиндрические функции I-го и II-го рода. Решения уравнений (3.5) и (3.8) также выражаются в функциях Бесселя

$$\Phi(\varepsilon_{in}, r) = C_4^{in}J_n(\chi_{in}r) + D_4^{in}Y_n(\chi_{in}r); \qquad (3.19)$$

$$\Lambda(\varepsilon_{in}, r) = C_5^{in}J_n(\zeta_{in}r) + D_5^{in}Y_n(\zeta_{in}r), \qquad (3.20)$$

причем

$$\chi_{in} = \left(\frac{2}{1-\nu}\right)^{\frac{1}{2}} m\varepsilon_{in}; \zeta_{1n} = \left[\frac{2}{1-\nu}(s^2\varepsilon_{in}^2 - k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Равенство (3.12) с учетом (3.15), (3.16) и соотношений (3.18) и (3.20) приводит к такому соотношению для $V(\varepsilon_{in}, r)$.

$$V(\varepsilon_{in,r}) = \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{g_2}{g_1^{in}}(\xi_k^{in})^4 - \frac{g_3^{in}}{g_1^{in}}(\xi_k^{in})^2 + \frac{g_4^{in}}{g_1^{in}}\right]\left[C_{ik}^{in}J_n(\xi_k^{in}r) + D_{1k}^{in}Y_n(\xi_k^{in}r)\right] +$$

$$+\frac{g_5^{in}}{g_1^{in}}\left\{C_5^{in}\zeta_{in}r\left[\frac{n}{\zeta_{in}r}J_n(\zeta_{in}r) - J_{n+1}(\zeta_{in}r)\right] + D_5^{in}\zeta_{in}r\left[\frac{n}{\zeta_{in}r}Y_n(\zeta_{in}r) - Y_{n+1}(\zeta_{in}r)\right]\right\}, \tag{3.21}$$

где

$$g_1^{in} = \frac{\alpha_1^2 m^2}{k^2}\left(\frac{\alpha_1^2}{k^2}s^2\varepsilon_{in}^2 - \gamma_{12}\right)\varepsilon_{in}^2 - \left(\gamma_{12} - \frac{\alpha_1^2}{k^2}s^2\varepsilon_{in}^2\right)^2; g_2 = \frac{\alpha_1^4}{k^2};$$

$$g_3^{in} = \alpha_1^2\left[\gamma_{12} + \frac{\alpha_1^2}{k^2}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)m^2\varepsilon_{in}^2 - \frac{\alpha_1^2\beta_1^2(1-\nu^2)}{k^4}\right];$$

$$g_4^{in} = \alpha_1^2\left\{\frac{\alpha_1^2}{k^2}\left[\frac{m^4}{k^2} + l_1 s^2(m^2 - s^2)\right]\varepsilon_{in}^4 + \left[\gamma_{12}(2l_1 - 1)s^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_{12}(1-l_1)m^2 - 2\frac{\alpha_1^2\beta_1^2(1+\nu)}{k^4}m^2\right]\varepsilon_{in}^2 + \alpha^{-2}k^2\gamma_{12}(1-l_1)\right\};$$

$$g_5^{in} = \frac{\alpha_1^2(1-\nu)}{2k^2}l_1\left[\frac{\alpha_1^2}{k^2}(s^2 - m^2)\varepsilon_{in}^2 - \gamma_{12}\right].$$

Для определения вспомогательной функции U подействуем на уравнение (3.10) оператором $[\nabla_F^2 - (k^2\gamma_{12}\alpha_1^{-2} - s^2\varepsilon^2)]$. Если при этом учесть (3.6), (3.9), (3.11), (3.15), (3.16), в результате получаем

$$U(\varepsilon, r) = (e_1^{in})^{-1}\left\{\left[e_2(\xi_k^{in})^4 - e_3^{in}(\xi_k^{in})^2 + e_4^{in}\right]R_3 + e_5^{in}\,(r\Phi')\right\}.$$

Имея в виду (3.18), (3.19), отсюда следует

$$U(\varepsilon_{in}, r) = \sum_{k=1}^{3}(e_1^{in})^{-1}\left[e_2^{in}(\xi_k^{in})^4 - e_3^{in}(\xi_k^{in})^2 + e_4^{in}\right]\left[C_{1k}^{in}J_n(\xi_k^{in}r) + \right.$$

$$\left.+D_{1k}^{in}Y_n(\xi_k^{in}r)\right] + e_5^{in}(e_1^{in})^{-1}\left\{C_4^{in}\left[nJ_n(\chi_{in}r) - \chi_{in}rJ_{n+1}(\chi_{in}r)\right] + \right.$$

$$\left.+D_4^{in}\left[nY_n(\chi_{in}r) - \chi_{in}rY_{n+1}(\chi_{in}r)\right]\right\}. \tag{3.22}$$

Здесь

$$e_1^{in} = m^2\left[\frac{\alpha_1^2}{k^2}(m^2 - s^2)\varepsilon_{in}^2 + \gamma_{12}\right]\varepsilon_{in}^2; e_2^{in} = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1(1+\nu)};$$

$$e_3^{in} = e_2\left[\left(s^2 + \frac{m^2}{k^2}\right)\varepsilon_{in}^2 + \frac{\beta_1^2(1-\nu)}{k^2}\right];$$

$$e_4^{in} = \frac{e_2}{\alpha_1^2}\left\{\frac{\alpha_1^2}{k^2}[m^2s^2\varepsilon_{in}^2 - \beta_1^2m^2(1+\nu^2) - \beta_1^2s^2(1-\nu^2)]\varepsilon_{in}^2 - \gamma_{12}[m^2\varepsilon_{in}^2 + \beta_1^2(1-\nu^2)]\right\};$$

$$e_5^{in} = g_5^{in} \frac{k^2}{l_1 \alpha_1^2}.$$

Принимая во внимание (3.18)–(3.22) по формулам (3.4), (3.7) находим остальные компоненты вектор-функции ядра преобразования. Имеем:

$$F_1(\varepsilon_{in}, r) = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{in} (e_1^{in})^{-1} \left[e_2 (\xi_k^{in})^4 - e_3^{in} (\xi_k^{in})^2 + e_4^{in} \right] *$$
$$* \left\{ C_{1k}^{in} \left[\frac{n}{\xi_k^{in} r} J_n(\xi_k^{in} r) - J_{n+1}(\xi_k^{in} r) \right] + D_{1k}^{in} \left[\frac{n}{\xi_k^{in} r} Y_n(\xi_k^{in} r) - Y_{n+1}(\xi_k^{in} r) \right] \right\} +$$
$$+ C_4^{in} \left[e_5^{in} (e_1^{in})^{-1} \chi_{in} \left(\frac{n^2}{\chi_{in} r} - \chi_{in} r \right) - r \right] J_n(\chi_{in} r) +$$
$$+ D_4^{in} \left[e_5^{in} (e_1^{in})^{-1} \chi_{in} \left(\frac{n^2}{\chi_{in} r} - \chi_{in} r \right) - r \right] Y_n(\chi_{in} r). \tag{3.23}$$

$$F_2(\varepsilon_{in}, r) = \frac{n}{r} \sum_{k=1}^{3} (e_1^{in})^{-1} \left[e_3^{in} (\xi_k^{in})^2 - e_2 (\xi_k^{in})^4 - e_4^{in} \right] \left[C_{1k}^{in} J_n(\xi_k^{in} r) + \right.$$
$$\left. + D_{1k}^{in} Y_n(\xi_k^{in} r) \right] - e_5^{in} (e_1^{in})^{-1} \frac{n}{r} \left\{ C_4^{in} [n J_n(\chi_{in} r) - \right.$$
$$\left. - \chi_{in} r J_{n+1}(\chi_{in} r)] + D_4^{in} [n Y_n(\chi_{in} r) - \chi_{in} r Y_{n+1}(\chi_{in} r)] \right\}.$$

$$F_4(\varepsilon_{in}, r) = \sum_{k=1}^{3} \frac{n}{r} \left\{ 1 - (k^2 g_1^{in})^{-1} [g_2 (\xi_k^{in})^4 - g_3^{in} (\xi_k^{in})^2 + g_4^{in}] \right\} *$$
$$* \left[C_{1k}^{in} J_n(\xi_k^{in} r) + D_{1k}^{in} Y_n(\xi_k^{in} r) \right] - n \zeta_{in} g_5^{in} (k^2 g_1^{in})^{-1} *$$
$$* \left\{ C_5^{in} \left[\frac{n}{\zeta_{in} r} J_n(\zeta_{in} r) - J_{n+1}(\zeta_{in} r) \right] + D_5^{in} \left[\frac{n}{\zeta_{in} r} Y_n(\zeta_{in} r) - Y_{n+1}(\zeta_{in} r) \right] \right\}.$$

$$F_5(\varepsilon_{in}, r) = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{in} \left\{ (k^2 g_1^{in})^{-1} [g_2 (\xi_k^{in})^4 - g_3^{in} (\xi_k^{in})^2 + g_4^{in}] - 1 \right\} *$$
$$* \left\{ C_{1k}^{in} \left[\frac{n}{\xi_k^{in} r} J_n(\xi_k^{in} r) - J_{n+1}(\xi_k^{in} r) \right] + D_{1k}^{in} \left[\frac{n}{\xi_k^{in} r} Y_n(\xi_k^{in} r) - Y_{n+1}(\xi_k^{in} r) \right] \right\} +$$
$$+ C_5^{in} k^{-2} r [g_5^{in} (g_1^{in})^{-1} (n^2 r^{-2} - \zeta_{in}^2) - 1] J_n(\zeta_{in} r) +$$
$$+ D_5^{in} k^{-2} r \left[g_5^{in} (g_1^{in})^{-1} (n^2 r^{-2} - \zeta_{in}^2) - 1 \right] Y_n(\zeta_{in} r).$$

Замечание: Решение построено для случая, когда корни ξ_k^{in} $(k = 1, 2, 3)$ кубического уравнения (3.17) действительные. Если один корень ξ_1^{in} действительный, а два других комплексно сопряженные, то для ξ_2^{in}, ξ_3^{in} в (3.18), (3.23) вместо обычных функций Бесселя следует воспользоваться представлением [14]. Выражения $F_1, \ldots, F_5$ при этом содержат вещественную и мнимую части представлений [14], домноженных на соответствующие произвольные постоянные интегрирования. В виду ограниченного объема статьи эти результаты не приводятся.

Дальнейшее решение задачи очевидно. Если принять во внимание условия регулярности (3.2), то в равенствах (3.18), (3.23) следует считать

$$D_{1k}^{in} = D_4^{in} = D_5^{in} = 0, k = 1, 2, 3. \tag{3.24}$$

При подстановке выражений (3.18), (3.23) с учетом (3.24) в граничные условия (3.3) формируется система однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_{1k}^{in}, C_4^{in}, C_5^{in}, $k = \overline{1,3}$. Разыскивая нетривиальные ее решения, составляем трансцендентное уравнение для определения собственных значений ε_{in}, $(i = \overline{1,\infty}, n = \overline{0,\infty})$, а также находим C_{1k}^{in}, C_4^{in}, C_5^{in}.

$$D(\varepsilon_{in}) = det|\delta_{sp}| = 0; s,p = \overline{1,5}, \tag{3.25}$$

где

$$\delta_{1p} = \left[\frac{e_2}{e_1^{in}}(\xi_k^{in})^4 - \frac{e_3^{in}}{e_1^{in}}(\xi_k^{in})^2 + \frac{e_4^{in}}{e_1^{in}}\right]\left\{n(\nu - 1 - \chi_1)J_n(\xi_k^{in}) + \right.$$

$$\left. + (\chi_1 - \nu - n)J_{n+1}(\xi_k^{in}) + (\xi_k^{in})^2 J_{n+1}(\xi_k^{in})\right\} + \beta_1(1+\nu)J_n(\xi_k^{in}); p = k = 1,2,3.$$

$$\delta_{2p} = n\left[\frac{e_2}{e_1^{in}}(\xi_k^{in})^4 - \frac{e_3^{in}}{e_1^{in}}(\xi_k^{in})^2 + \frac{e_4^{in}}{e_1^{in}}\right] *$$

$$* \left\{[(1-\nu)(1-n) + \chi_n]J_n(\xi_k^{in}) + (1-\nu)\xi_k^{in}J_n(\xi_k^{in})\right\};$$

и т.д.

$$C_{1k}^{in} = D_k, (k = \overline{1,3}), C_4^{in} = D_4, C_5^{in} = D_5 = det|\delta_{sp}|, s,p = \overline{1,4}. \tag{3.26}$$

Здесь D_k, D_4 - детерминанты, получаемые из D_5 путем замены соответственно 'к'-го и 4-го столбцов на столбец $|0 \quad 0 \quad -\delta_{35} \quad -\delta_{45}|^T$.

Если теперь применить к выражению (2.17) последовательно формулы обращения (2.10), (2.2), то при наличии собственных функций (3.18), (3.23), (3.26) трансцендентного уравнения (3.25) и указанных в этом параграфе соответствий получаем общее решение рассматриваемой динамической задачи для упруго закрепленной неоднородной пологой сферической оболочки, загруженной произвольной нестационарной нагрузкой.

Частные результаты

Варьируя коэффициенты жесткости опорного контура χ_1, χ_2, $\ldots \chi_5$ можно получить решение рассматриваемой задачи для различных случаев опирания оболочки. Остановимся на некоторых из них.

1) Если члены уравнения (3.25) и выражений (3.18), (3.23) разделить на χ_1, χ_2, χ_4, а затем осуществить предельные переходы $\chi_1 \to \infty$, $\chi_2 \to \infty$, $\chi_4 \to \infty$, то построенное решение (2.2), (2.10), (2.17) справедливо для упруго защемленной на контуре оболочки.

2) Повторяя описанную выше процедуру для всех коэффициентов жесткости χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5, получаем аналогичные результаты для жесткозащемленной оболочки.

3) В случае, когда $\chi_3 = \chi_5 = 0$, то после проведения описанных в первом пункте операций с χ_1, χ_2, χ_4 из (2.2), (2.10), (2.17), (3.18), (3.23) и (3.25) следуют расчетные соотношения для шарнирно опертой оболочки.

4)При $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = 0$ равенства (2.2), (2.10), (2.17), (3.18), (3.23) и (3.25) представляют решение динамической задачи для свободной оболочки.

5) Если принять $U = \Psi_\theta = 0$, $p_\theta = m_\theta = 0$, а оставшиеся компоненты вектора перемещений и динамической нагрузки считать не зависящими от угловой координаты θ, то разложение (2.10), (2.17) и равенства (3.18), (3.23) F_1, F_3, F_5 $(F_2 = F_4 = 0)$ справедливы для нестационарной осесимметричной задачи. Ее частный случай $(\chi_1 \to \infty$,

$\chi_2 \to \infty$) рассмотрен в работе автора [10].
6) Наконец, если положить

$$f_1(z) = f_2(z) = 1, (n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12} = 1), K_k = G_k,$$

то построенное решение (2.2), (2.10), (2.17), (3.18), (3.23), (3.25) и приведенные выше его частные случаи соответствуют однородным оболочкам [7], [8], [9].

Разложения (2.2), (2.10) получены для произвольных динамических воздействий и начальных условий при которых естественно существуют соответствующие интегралы (трансформанты). В каждом конкретном случае нагружения задаваемого функциональными зависимостями $p_r^*, p_\theta^*, p_z^*, m_r^*, m_\theta^*, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dots, \Lambda_0, \dot{\Lambda}_0$ необходимо лишь вычислить $\phi\,(\lambda_{in}, n, t)$ по выражению (2.17), в котором $\rho(\lambda_{in}, n, t)$, $\phi_0\,(\lambda_{in}, n)$, $\dot{\phi}_0\,(\lambda_{in}, n)$ определяются приведенными выше квадратурами.

Литература

[1] Петров В.В., Овчинников И.Г., Шахов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Саратов: Изд–во Саратовского ун–та, 1987. С. 285.

[2] Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек //Механика деформируемых твердых тел. М.1973.Т.5.С.272.

[3] Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек. Минск: Наука и техника, 1984. С . 194.

[4] Kalnins A. On vibration of shallow spherial shells// J. Acoust. Soc. Amar. 1961. V. 33. N 8. P. 1102–1107.

[5] Сеницкий Ю.Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их применение к нестационарным задачам механики.//ДАН. 1995. Т.341. N 4. С. 474–477.

[6] Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1996. N 8. (411) С. 71–81.

[7] Сеницкий Ю.Э. Построение общего решения неосесимметричной динамической задачи для пологой сфрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью // Прикл. механика. 1989. Т. 25. N 7. С. 57–66.

[8] Reismann H., Culcowski P. Forced axisymmetric motion of shallow spherical shells. // J. Eng. mech. div. proc. civil. Engrs. 1968. V. 94. N 2. P. 653–670.

[9] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1985. С. 176.

[10] Сеницкий Ю.Э. Осесимметричная динамическая задача для неоднородной пологой сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью// Прикл. механика. 1994. Т. 30. N 9. С. 50–57.

[11] Сеницкий Ю.Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной сферической оболочки // Строит. механика и расчет сооружений. 1990. N 6. С. 55–61.

[12] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. С. 635.

[13] Сеницкий Ю.Э., Еленицкий Э.Я. О физически непротиворечивой модели уточненной теории пластин и оболочек// ДАН. 1993. Т. 331. N 5. С. 580–582.

[14] Сеницкий Ю.Э., Марченко В.А. Об одном представлении функций Бесселя, встречающихся в решении нестационарных задач динамики оболочек// Труды VI межвузовской конференции "Матем. моделирование и краевые задачи". Самара: 1996. Ч. 1. С. 102–104.

ON THE QUESTION OF INTEGRABILITY INITIALLY-BOUNDARY DYNAMIC PROBLEM FOR NON-HOMOGENEOUS SHALLOW SPHERICAL SHELL

Senitsky Y. E. [2]

This paper in the limits of corrected shell theory taking into account shear deformations and inertia of cross-section turning an exact solution of nonaxialsymmetric dynamic problem for a non-homogeneous thickness shallow spherical shell is shown. Most general cases of elastic fixing on the countor and arbitrary non-stationary loading are discussed. The solution is obtained by means of the method of finite biorthogonal transform.

[2]Senitsky Yri Eduardovich, dept. of strength matters and structural mechanics of Samara state academy of architecture and civil engineering