ТЕНЗОРНЫЕ МЕРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Ю.Н. Радаев[1]

Предлагается алгоритм построения тензорных мер анизотропной поврежденности, основанный на представлении о локальном сокращении эффективной площади плоских элементов континуума вследствие ориентированного локального распределения поврежденности.

Приводятся точные определения тензорных мер анизотропной поврежденности и дается механическая интерпретация их собственных элементов (главных направлений и локального спектра поврежденности).

Понятие о спектре трехмерной анизотропной поврежденности распространено вплоть до бесконечного (счетного) дискретного спектра. Предложенный алгоритм иллюстрируется исследованием типичных трехмерных распределений анизотропной поврежденности, представляемой тензорами поврежденности второго, четвертого, шестого и восьмого рангов.

Усредненные характеристики поврежденности определены, а затем вычислены в терминах собственного спектра поврежденности. Показано, что тензорные меры поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения тонкой структуры поврежденного состояния и получены формулы для непосредственного вычисления компонент тензора поврежденности и его спектра, исходя из ориентационного распределения поврежденности.

Приводится гармонический анализ тонкой структуры поврежденности и обсуждается представление поврежденного состояния с помощью коэффициентов Фурье разложения локального распределения поврежденности в сумму сферических гармоник.

Устанавливается соответствие между тензорным и гармоническим представлениями анизотропного состояния поврежденности.

1. Введение

Моделирование поврежденности является предметом интенсивных исследований вот уже на протяжении более чем двух последних десятилетий. Основополагающими в этой области следует считать работы Л.М. Качанова [1] и Ю.Н. Работнова [2], признанные ныне классическими.

Быстрое развитие механики поврежденности выразилось в создании огромного количества различных феноменологических моделей континуума с внутренним

[1]Радаев Юрий Николаевич, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета

распределением повреждений, не только резко контрастирующих, но и подчас противоречащих друг другу (см. обзоры [3-8]).

Поврежденность может быть определена как сокращение упругой реакции материала вследствие необратимого накопления и роста внутренних микродефектов и измерена посредством уменьшения сопротивляемости, жесткости, твердости, устойчивости и времени до разрушения (все приведенные меры поврежденности широко используются в современной инженерной практике). В рамках математической модели поврежденность, как правило, представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности.

Континуальная механика поврежденности, чтобы быть приложимой к анализу сколько-нибудь близких к реальным структур поврежденности, неизбежно сталкивается с проблемой изображения и описания сильно разрывного и часто даже недетерминированного распределения микротрещин, возникающих в процессе накопления повреждений в материалах с выраженной хрупкой доминантой, или разрушения преобладающей до определенного момента дислокационной системы в металлах, находящихся в состоянии пластического течения.

Описание поврежденности в условиях ползучести представляет собой самостоятельный важнейший аспект механики поврежденности, которому континуальная механика поврежденности обязана своим рождением, требующий анализа внутренней структуры металла на уровне зерна.

Сложные структуры анизотропного состояния поврежденного материала мы называем тонкими структурами поврежденности, полагая возможным аппроксимировать их с требуемой точностью в рамках математической модели. Разумеется, одним из важнейших аспектов анализа тонкой структуры поврежденности является индуцированная внутренним распределением поврежденности анизотропия.

Для описания трехмерного анизотропного состояния поврежденности были предложены векторные и тензорные переменные различных рангов. Здесь мы отметим только некоторые из широкого спектра работ, посвященных этой проблеме [9-17].

Тензорные переменные высоких рангов необходимы для того, чтобы улучшить аппроксимацию тонкой структуры поврежденности. Как было показано в работе [18], даже сравнительно простые плоские структуры поврежденности могут быть в наиболее благоприятных случаях аппроксимированы только с помощью тензора поврежденности, ранг которого не ниже четвертого.

После введения в статье содержится определение базовой переменной состояния поврежденности и основные уравнения, относящиеся к поврежденности, представленной тензором поврежденности второго ранга (п.2). Некоторые из этих уравнений известны из предшествующих работ. Отметим также, что мы вынуждены были пересмотреть определение тензора поврежденности второго ранга, чтобы трактовать его как некоторую меру деформации, аналогичную тензору деформации Фингера [19].

Затем (п.3) приводится алгоритм построения тензора поврежденности любого сколь угодно высокого ранга, определяются главные оси и локальный спектр поврежденности. Вводится также предельный элемент последовательности тензоров поврежденности возрастающего ранга (тензор поврежденности бесконечного ранга), который способен, как будет показано позже, точно представить любую тонкую структуру поврежденности и соответствует полному Фурье-спектру в гармоническом разложении ориентационного распределения анизотропной поврежденности.

Спектральные характеристики локального состояния поврежденности исследуются в п.4. Их следует рассматривать как интегральные меры поврежденности, и они вполне пригодны для характеристики локального состояния поврежденности в инженерных расчетах.

Тонкая структура поврежденного состояния, представленная как некоторое скалярное поле, определенное на поверхности единичной сферы, может быть проанализирована также с помощью чрезвычайно развитого Фурье-формализма. Соответствующий круг вопросов обсуждается в п.5. Одним из важных результатов здесь являются формулы представления тензорных мер поврежденности как результата некоторого усреднения тонкой структуры поврежденности по сфере единичных направлений, которые позволяют непосредственно вычислить тензорные меры анизотропного поврежденного состояния, исходя из экспериментальных диаграмм локального распределения поврежденности по ориентациям [20].

Представление трехмерного анизотропного состояния поврежденности с помощью Фурье-спектра, а также соответствие между гармоническим и тензорным описаниями поврежденности рассматривается в п.6. Описание поврежденности в главных осях поврежденности, естественно, является наиболее простым, поэтому мы приводим также технику пересчета в гармонический спектр по отношению к главным осям.

2. Тензорное представление анизотропного состояния поврежденности.

Анизотропное состояние поврежденности формально может быть представлено с помощью скалярной функции от векторной переменной единичной длины. Условимся откладывать единичные векторы $\mathbf{n}$ от той точки, тонкую структуру поврежденности в окрестности которой предполагается исследовать. Концы векторов $\mathbf{n}$ образуют тогда единичную сферу (сферу единичных направлений). Вводя сферические координаты Θ, Φ на указанной сфере, можно рассматривать эту функцию как функцию двух переменных.

Значения этой функции суть поврежденности, измеренные для каждого данного направления. Ясно, что вычислить поврежденности можно в результате анализа тонкой структуры поврежденности, задавшись при этом определенной мерой поврежденности. Возможные варианты – разнообразны. Выбор определяется, конечно же, преобладающим механизмом зарождения и развития поврежденности: образование и развитие полей взаимовлияющих микротрещин – характерный механизм деградации упругого тела, пластическое течение сопровождается зарождением и распространением дислокаций, ползучесть металлов – образованием и ростом пор. Можно ввести также общие меры поврежденности, абстрагируясь от конкретного типа микродефектов. Одной из таких мер является сокращение эффективной площади плоского элемента нормального вектору $\mathbf{n}$.

Для актуального состояния поврежденности вследствие распределенных микродефектов несущая нагрузку эффективная площадь элемента $dA^*(\mathbf{n})$ оказывается меньше, чем площадь этого элемента без учета его микроструктуры поврежденности $dA(\mathbf{n})$. Таким образом, можно определить функцию ориентации

$$\zeta(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})} \tag{2.1}$$

как отношение указанных площадей.

Переменную ζ будем называть ориентационным распределением поврежденности (заметим, что правильнее было бы называть ζ ориентационной сплошностью).

Подчеркнем, что принятая интерпретация значений распределения $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ – лишь одна из многих возможных. Можно, например, связать значения ζ с плотностью распределения микротрещин.

Для дальнейшего принципиально важным является только то, что поврежденность локально может быть описана некоторым скалярным полем, определенным на поверхности единичной сферы.

Простейшая мыслимая аппроксимация распределения $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ – квадратичная по компонентам единичного вектора $\mathbf{n}$. Мы аппроксимируем подобным образом, но не саму величину ζ , а её квадрат:

$$\zeta^2 = \Xi_{ij} n_i n_j, \tag{2.2}$$

где Ξ_{ij} есть симметричный положительно определенный тензор второго ранга.

Ориентационное распределение поврежденности тогда выражается формулой

$$\zeta = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Xi}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}. \tag{2.3}$$

Тензор $\boldsymbol{\Xi}$ может быть интерпретирован как тензор деформации Фингера (см. [19]), градиент $\mathbf{G}$ которой должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}. \tag{2.4}$$

Следуя концепции, предложенной в [21], можно представить, что поврежденность материального элемента может быть элиминирована посредством его некоторой дополнительной деформации, так что тензор $\mathbf{G}$ преобразует поврежденный материальный элемент в неповрежденный.

В силу уравнения (2.4) можно заключить, что ортогональный множитель в полярном разложении Коши тензора $\mathbf{G}$ не изменяет ориентационного распределения поврежденности, поэтому тензор $\mathbf{G}$ можно считать симметричным.

Интерпретация тензора $\mathbf{G}$ как меры деформации Фингера позволяет также вычислить ориентационное распределение поврежденности по метрике его актуального поврежденного и соответствующего неповрежденного состояния.

С помощью тождества Гамильтона-Кэли [22]

$$\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^2 - I_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{G}^T\mathbf{G} + II_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{I} \tag{2.5}$$

из уравнения (2.4) находим следующее выражение для компонент тензора $\boldsymbol{\Xi}$ в конвективной системе координат

$$\Xi_{\gamma\lambda} = g^*_{\gamma\beta} g^*_{\mu\lambda} g^{\beta\mu} - g^*_{\gamma\lambda} g^*_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left[(g^*_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})^2 - g^*_{\alpha\beta} g^*_{\mu\nu} g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}\right] g_{\gamma\lambda}, \tag{2.6}$$

где $g_{\gamma\lambda}$ и $g^*_{\gamma\lambda}$ есть метрические коэффициенты актуального поврежденного и соответствующего неповрежденного состояний.

Ориентационное распределение поврежденности можно теперь представить в форме

$$\zeta^2 = (g^*_{\alpha\beta} g^*_{\mu\nu} g^{\beta\mu} - g^*_{\gamma\beta} g^*_{\alpha\nu} g^{\gamma\beta}) n^\alpha n^\nu + \frac{1}{2}\left[(g^*_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})^2 - g^*_{\alpha\beta} g^*_{\mu\nu} g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}\right]. \tag{2.7}$$

Тензор поврежденности второго ранга мы определим посредством следующего соотношения

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{\Xi}}. \tag{2.8}$$

Ориентационное распределение поврежденности тогда можно представить в следующем виде:

$$\zeta = \sqrt{\operatorname{tr}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\right]}. \tag{2.9}$$

В силу определения, тензор поврежденности второго ранга является симметричным положительно определенным тензором и, следовательно, может быть представлен с помощью спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^{3} D_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)}, \tag{2.10}$$

где $\mathbf{d}_{(1)}$, $\mathbf{d}_{(2)}$, $\mathbf{d}_{(3)}$ – тройка ортонормированных собственных векторов тензора поврежденности, $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, $D_{(3)}$ – собственные значения тензора поврежденности.

В дальнейшем главные оси тензора $\mathbf{D}$ будем называть главными осями поврежденности, а собственные значения тензора $\mathbf{D}$ – главными поврежденностями.

Подставляя спектральное разложение (2.10) в формулу (2.9), находим

$$\zeta = \sqrt{(1 - D_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - D_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - D_{(3)})^2 n_{(3)}^2}, \tag{2.11}$$

где $n_{(i)}$ – компоненты вектора $\mathbf{n}$ по отношению к главным осям поврежденности. Для плоского материального элемента, ориентированного нормально главной оси поврежденности с номером γ, в силу (2.1), (2.11) получаем соотношение

$$dA^*_{(\gamma)} = (1 - D_{(\gamma)}) dA_{(\gamma)} \text{ (по } \gamma \text{ не суммировать, } \gamma = 1, 2, 3), \tag{2.12}$$

которое можно также представить в форме

$$D_{(\gamma)} = \frac{dA_{(\gamma)} - dA^*_{(\gamma)}}{dA_{(\gamma)}}. \tag{2.13}$$

Последнее соотношение позволяет интерпретировать главные поврежденности как относительные сокращения эффективной площади плоских материальных элементов, ориентированных нормально главным осям поврежденности.

Главные поврежденности материала могут изменяться в пределах известных границ $0 \le D_{(\gamma)} \le D_{(\gamma)C}$, где нижняя граница соответствует неповрежденному состоянию материала, а верхняя полному исчерпанию его способности выдерживать нагружение. Для большинства металлов $0 \le D_{(\gamma)C} \le 0.8$.

Главные оси поврежденности, в свою очередь, указывают ориентации элементов с экстремальными относительными сокращениями эффективной площади. Действительно, занумеровав главные поврежденности в порядке их убывания

$$D_{(3)} \le D_{(2)} \le D_{(1)} \tag{2.14}$$

и воспользовавшись равенством

$$n_{(1)}^2 = 1 - n_{(2)}^2 - n_{(3)}^2, \tag{2.15}$$

находим

$$\begin{aligned}\zeta^2 = (1-D_{(1)})^2 + \left[(1-D_{(2)})^2 - (1-D_{(1)})^2\right] n_{(2)}^2 + \\ + \left[(1-D_{(3)})^2 - (1-D_{(1)})^2\right] n_{(3)}^2 \geq (1-D_{(1)})^2,\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\zeta^2 = (1-D_{(3)})^2 - \left[(1-D_{(3)})^2 - (1-D_{(2)})^2\right] n_{(2)}^2 - \\ - \left[(1-D_{(3)})^2 - (1-D_{(1)})^2\right] n_{(1)}^2 \leq (1-D_{(3)})^2,\end{aligned} \tag{2.17}$$

или также

$$D_{(3)} \leq 1 - \zeta \leq D_{(1)}. \tag{2.18}$$

Таким образом, главные оси поврежденности 1 и 3 указывают соответственно направления наибольшего и наименьшего относительного сокращения эффективной площади.

Учитывая уравнения (2.4), (2.8), получаем

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}}. \tag{2.19}$$

Последняя формула позволяет выразить главные поврежденности через главные удлинения поврежденности $L^D_{(\alpha)}$ (собственные значения тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$)

$$1 - D_{(\gamma)} = \frac{L^D_{(1)} L^D_{(2)} L^D_{(3)}}{L^D_{(\gamma)}} \tag{2.20}$$

и обратно

$$\begin{aligned}L^D_{(1)} &= \sqrt{\frac{(1-D_{(2)})(1-D_{(3)})}{(1-D_{(1)})}},\\ L^D_{(2)} &= \sqrt{\frac{(1-D_{(1)})(1-D_{(3)})}{(1-D_{(2)})}},\\ L^D_{(3)} &= \sqrt{\frac{(1-D_{(1)})(1-D_{(2)})}{(1-D_{(3)})}}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Главные поврежденности и главные удлинения поврежденности – не только замечательные геометрические характеристики локального состояния поврежденности, но и одновременно, как будет показано ниже, наиболее удобные параметры для представления поврежденного состояния в среднем. Следует, однако, помнить об ограниченных возможностях этого вида тензорного представления поврежденности.

3. Тензоры поврежденности высших рангов. Главные оси и спектр поврежденности

Выше было показано, что квадратичная по компонентам единичного вектора ориентации аппроксимация квадрата ориентационного распределения поврежденности приводит к тензору поврежденности второго ранга. Ясно, что более высокие полиномиальные по компонентам директора $\mathbf{n}$ аппроксимации степеней переменной ζ приводят соответственно к тензорным мерам поврежденности высших рангов.

Тензор поврежденности ранга $2s$ мы определяем посредством следующего уравнения

$$\zeta = \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}\ (\mathbf{I}-\mathbf{D})^{2s}\,\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}} \tag{3.1}$$

и обозначаем по-прежнему через $\mathbf{D}$.

В силу определения $\mathbf{D}$ есть симметричный положительно определенный тензор.

Таким образом, мы имеем следующую цепочку аппроксимаций четных степеней ориентационной сплошности:

$$\begin{gathered}
\zeta^2 = C_{ij}n_in_j = \operatorname{tr}\left[\mathbf{C}\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right] = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{C}\mathbf{n})\\
\zeta^4 = C_{i_1j_1i_2j_2}n_{i_1}n_{j_1}n_{i_2}n_{j_2} = \operatorname{tr}\left[\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\,\mathbf{C}\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right]\\
\vdots\\
\zeta^{2s} = C_{i_1j_1\ldots i_sj_s}n_{i_1}n_{j_1}\cdots n_{i_s}n_{j_s} = \operatorname{tr}\left[\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}\,\mathbf{C}\,\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}\right],\\
\vdots
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где использовано следующее обозначение:

$$\sqrt[2s]{\mathbf{C}} = \mathbf{I}-\mathbf{D}. \tag{3.3}$$

Необходимо отметить, что симметричный тензор ранга $2s$ мы рассматриваем, и это отражено в обозначениях как симметричный линейный оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров ранга s, скалярное произведение в котором определено, как обычно, формулой

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = A_{i_1i_2\ldots i_s}B_{i_1i_2\ldots i_s}. \tag{3.4}$$

След произведения двух тензоров ранга s мы определяем как билинейный функционал на пространстве тензоров ранга s, для которого

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}((\mathbf{k}_1\otimes\mathbf{k}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{k}_s)(\mathbf{l}_1\otimes\mathbf{l}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{l}_s)) =\\
&= k_{s_{i_1}}l_{s_{i_1}}tr((\mathbf{k}_1\otimes\mathbf{k}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{k}_{s-1})(\mathbf{l}_1\otimes\mathbf{l}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{l}_{s-1})) =\\
&= k_{s_{i_1}}l_{s_{i_1}}k_{s-1_{i_2}}l_{s-1_{i_2}}\ldots k_{1_{i_s}}l_{1_{i_s}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$(A,B) = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}).$$

Предположим далее, что симметричный тензор $\mathbf{C}$ имеет следующую спектральную структуру

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_s=1}^{3} C_{(i_1i_2\ldots i_s)}\left(\mathbf{d}_{(i_1)}\otimes\mathbf{d}_{(i_2)}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}_{(i_s)}\right)\otimes\\
\otimes\left(\mathbf{d}_{(i_1)}\otimes\mathbf{d}_{(i_2)}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}_{(i_s)}\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

т.е. собственный базис этого тензора есть

$$\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)} \qquad (i_1, i_2, ..., i_s = 1, 2, 3) \tag{3.6}$$

и определяется ортонормированной тройкой векторов $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$.

Поясним, что мы используем круглые скобки при индексах, чтобы подчеркнуть, что соответствующий символ относится к главным осям поврежденности.

Позже будет показано, что тензоры $\mathbf{C}$ указанной спектральной структуры могут представлять любую сколь угодно сложную тонкую структуру поврежденности, если $s \to \infty$ и распределение поврежденности удовлетворяет условию

$$\zeta(\mathbf{n}) = \zeta(-\mathbf{n}). \tag{3.7}$$

Последнее условие не является сколько-нибудь ограничительным. Анизотропные структуры поврежденности, сопровождающей ползучесть металлов или, например, поврежденность сильно упругоанизотропных кристаллов и горных пород, индуцированная их сжатием и сдвигом, в точности удовлетворяют условию (3.7).

Согласно формуле (3.5) ориентационное распределение поврежденности может быть представлено также в виде

$$\begin{gathered}\zeta^{2s} = \operatorname{tr}\left[\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes...\otimes\mathbf{n}}_{s}\ \mathbf{C}\ \underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes...\otimes\mathbf{n}}_{s}\right] = \\ = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s = 1}^{3} C_{(i_1 i_2 \ldots i_s)} n^2_{(i_1)} n^2_{(i_2)} \ldots n^2_{(i_s)}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Множество собственных значений тензора поврежденности

$$D_{(i_1 i_2 \ldots i_s)} \qquad (i_1, i_2, ..., i_s = 1, 2, 3) \tag{3.9}$$

будем называть локальным спектром поврежденности.

Диагональные элементы локального спектра поврежденности интерпретируются как меры сокращения эффективной площади плоских материальных элементов, нормальных главным осям поврежденности:

$$\zeta_\sigma = \zeta(\mathbf{d}_{(\sigma)}) = 1 - D_{(\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{s})} \ (\text{по } \sigma \text{ не суммировать, } \sigma = 1, 2, 3). \tag{3.10}$$

Полиномиальное выражение в (3.8) может быть симметризовано, поэтому всегда можно считать выполненными следующие условия симметрии

$$C_{(i_1 i_2 \ldots i_\sigma i_{\sigma+1} \ldots i_s)} = C_{(i_1 i_2 \ldots i_{\sigma+1} i_\sigma \ldots i_s)} \qquad (\sigma = 1, 2, ..s - 1), \tag{3.11}$$

а спектральное разложение (3.5) представить в следующем виде

$$\begin{gathered}\mathbf{C} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s = 1}^{3} C_{(i_1 i_2 \ldots i_s)} \operatorname{sym}\big((\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}) \otimes \\ \otimes (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)})\big),\end{gathered}$$

где

$$\mathrm{sym}\big((\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}) \otimes (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)})\big) = \\ = \frac{1}{s!} \sum_{P} \big(\mathbf{d}_{(P(i_1))} \otimes \mathbf{d}_{(P(i_2))} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(P(i_s))}\big) \otimes \\ \otimes \big(\mathbf{d}_{(P(i_1))} \otimes \mathbf{d}_{(P(i_2))} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_{(P(i_s))}\big)$$

и символ P обозначает перестановку индексов $i_1, i_2, ..., i_s$.

Локальный спектр поврежденности, очевидно, также можно считать состоящим из симметричных компонент $D_{(i_1 i_2 \dots i_s)}$.

Цепочка аппроксимаций (3.2) формально "заканчивается" следующим выражением:

$$\zeta = \lim_{s\to\infty} \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{n}}_{s} \; (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{2s} \; \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{n}}_{s}}. \tag{3.12}$$

В этом случае ориентационное распределение поврежденности определяется триэдром поврежденности $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$ и бесконечным дискретным спектром поврежденности

$$D_{(i_1 i_2 \dots i_s \dots)} \qquad (i_1, i_2, ..., i_s, ... = 1, 2, 3), \tag{3.13}$$

диагональные элементы которого интерпретируются с помощью соотношения

$$\zeta_\sigma = \zeta(\mathbf{d}_{(\sigma)}) = 1 - D_{(\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma\ldots}_{\infty})} \text{ (по } \sigma \text{ не суммировать, } \sigma = 1, 2, 3). \tag{3.14}$$

Таким образом, тензор поврежденности бесконечного ранга вводится как предельный элемент последовательности тензоров возрастающего ранга. Ниже, в связи с гармоническим анализом тонкой структуры поврежденности, будет уточнен его как формальный, так и содержательный смысл.

Четыре первые низшие аппроксимации распределения поврежденности есть:

$$\zeta^2 = C_{(1)} n_{(1)}^2 + C_{(2)} n_{(2)}^2 + C_{(3)} n_{(3)}^2, \tag{3.15}$$

$$\zeta^4 = C_{(11)} n_{(1)}^4 + C_{(22)} n_{(2)}^4 + C_{(33)} n_{(3)}^4 + 2C_{(12)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^2 + \\ +2C_{(13)} n_{(1)}^2 n_{(3)}^2 + 2C_{(23)} n_{(2)}^2 n_{(3)}^2, \tag{3.16}$$

$$\zeta^6 = C_{(111)} n_{(1)}^6 + C_{(222)} n_{(2)}^6 + C_{(333)} n_{(3)}^6 + 3C_{(112)} n_{(1)}^4 n_{(2)}^2 + \\ +3C_{(113)} n_{(1)}^4 n_{(3)}^2 + 3C_{(122)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^4 + 3C_{(133)} n_{(1)}^2 n_{(3)}^4 + \\ +3C_{(223)} n_{(2)}^4 n_{(3)}^2 + 3C_{(233)} n_{(2)}^2 n_{(3)}^4 + 6C_{(123)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^2 n_{(3)}^2, \tag{3.17}$$

$$\zeta^8 = C_{(1111)} n_{(1)}^8 + C_{(2222)} n_{(2)}^8 + C_{(3333)} n_{(3)}^8 + 4C_{(1222)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^6 + \\ +4C_{(1333)} n_{(1)}^2 n_{(3)}^6 + 4C_{(2111)} n_{(2)}^2 n_{(1)}^6 + 4C_{(3111)} n_{(1)}^6 n_{(3)}^2 + \\ +4C_{(2333)} n_{(3)}^6 n_{(2)}^2 + 4C_{(3222)} n_{(2)}^6 n_{(3)}^2 + 6C_{(1122)} n_{(1)}^4 n_{(2)}^4 + \\ +6C_{(1133)} n_{(1)}^4 n_{(3)}^4 + 6C_{(2233)} n_{(2)}^4 n_{(3)}^4 + 12C_{(1233)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^2 n_{(3)}^4 + \\ 12C_{(1223)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^4 n_{(3)}^2 + 12C_{(1123)} n_{(1)}^4 n_{(2)}^2 n_{(3)}^2. \tag{3.18}$$

Соответствующие структуры поврежденности могут быть исследованы, если ввести сферические координаты на сфере единичных направлений по отношению к главным осям поврежденности:

$$n_{(1)} = \sin\theta\cos\varphi,\ n_{(2)} = \sin\theta\sin\varphi,\ n_{(3)} = \cos\theta. \tag{3.19}$$

Как показывает сравнение с типичными графиками распределения плотности трещин $\rho(\mathbf{n})$ (см. [18]), аппроксимации порядка четыре и выше вполне пригодны для моделирования наиболее распространенных полей микротрещин.

При сравнении следует учесть, что $\rho(\mathbf{n})$ есть количество (на единицу объема) микротрещин, расположенных нормально направлению $\mathbf{n}$. Ориентационная сплошность $\zeta(\mathbf{n})$ и нормированная плотность распределения трещин $\rho(\mathbf{n})/\rho_C(\mathbf{n})$, где $\rho_C(\mathbf{n})$ есть критическая плотность микротрещин, ориентированных нормально направлению $\mathbf{n}$, соотносятся в простейшем варианте как

$$\frac{\rho(\mathbf{n})}{\rho_C(\mathbf{n})} = 1 - \zeta(\mathbf{n}).$$

Отрицательная плотность распределения трещин соответствует отрицательным значениям локального спектра поврежденности.

Обратная задача – вычисление тензора поврежденности по заданному распределению $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ – значительно сложнее. Её решение будет дано в п.5 в связи с гармоническим анализом тонкой структуры поврежденности.

4. Спектральные характеристики локальной поврежденности

Спектр поврежденности и главные направления поврежденности позволяют точно восстановить тонкую структуру поврежденности. В некоторых случаях, однако, такое детальное представление тонкой структуры поврежденности оказывается излишним, а иногда и просто невозможным. В этих случаях поврежденность может быть описана "в среднем".

Описание поврежденности, в среднем, мы начнем со средне-степенных сплошностей, вычисление которых, в силу структуры типичной аппроксимации локального распределения поврежденности (3.1), достаточно элементарно.

Последовательность средних сплошностей мы определяем следующим образом:

$$\bar{\zeta} = \sqrt[2s]{<\zeta^{2s}>} = \sqrt[2s]{\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\zeta^{2s}(\Theta,\varPhi)\sin\Theta d\Theta d\varPhi} \quad (s = 1, 2, 3, ...). \tag{4.1}$$

Подынтегральное выражение в (4.1) в силу (3.8) оказывается полиномом от компонент единичной нормали к поверхности сферы, поэтому поверхностный интеграл может быть вычислен точно.

Вводя в формулу (4.1) сферические координаты θ, φ относительно главных осей поврежденности, получим

$$4\pi\bar{\zeta}^{2s} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s=1}^{3} C_{(k_1k_2\ldots k_s)} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \times \tag{4.2}$$
$$\times (\sin\theta)^{2(s'+s'')+1} (\cos\theta)^{2s'''} (\sin\varphi)^{2s''} (\cos\varphi)^{2s'},$$

где

$$s' = s'(k_1, k_2, ..., k_s),\ s'' = s''(k_1, k_2, ..., k_s),\ s''' = s'''(k_1, k_2, ..., k_s) \tag{4.3}$$

есть соответственно число единиц, двоек и троек в ряду чисел

$$k_1, k_2, ..., k_s\ (k_1, k_2, ..., k_s = 1, 2, 3).$$

Используя следующие формулы

$$I_{2s'',2s'} = \int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi)^{2s''} (\cos\varphi)^{2s'} d\varphi = \frac{2\pi}{2^{s'+s''} s'!} \times$$
$$\times \frac{\underbrace{(2s''-1)(2s''-3)\cdots 1}_{s''}}{\underbrace{(s'+s'')(s'+s''-1)\cdots(s'+1)}_{s''}} \underbrace{(2s'-1)(2s'-3)\cdots 1}_{s'}, \tag{4.4}$$

$$J_{2(s'+s'')+1,2s'''} = \int\limits_0^{\pi} (\sin\theta)^{2(s'+s'')+1} (\cos\theta)^{2s'''} d\theta =$$
$$= \frac{(s-s''')!}{s+12} \cdot \frac{\Gamma(s'''+1/2)}{\Gamma(s+1/2)} = \tag{4.5}$$
$$= \frac{(s-s''')!(s'''-1/2)(s'''-3/2)\cdots 1/2}{(s+1/2)(s-1/2)(s-3/2)\cdots 1/2},$$

$$I_{0,0} = 2\pi, \quad I_{2s'',0} = I_{0,2s''} = \frac{2\pi}{2^{s''} s''!} \cdot (2s''-1)(2(s''-1)-1)\cdots(2\cdot 1-1),$$

$$J_{2(s'+s'')+1,0} = \frac{s!}{(s+1/2)(s-1/2)(s-3/2)\cdots 1/2}, \tag{4.6}$$

формулу (4.2) можно представить в виде

$$4\pi\bar{\zeta}^{2s} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s=1}^{3} C_{(k_1k_2\ldots k_s)} \omega_{k_1k_2\ldots k_s}, \tag{4.7}$$

где коэффициенты $\omega_{k_1k_2\ldots k_s}$ определены выражениями

$$\omega_{k_1k_2\ldots k_s} = I_{2s'',2s'} J_{2(s'+s'')+1,2s'''} =$$
$$= 2\pi \cdot \frac{(s-s''')!(s'''-1/2)(s'''-3/2)\cdots 1/2}{(s+1/2)(s-1/2)(s-3/2)\cdots 1/2} \times$$
$$\times \frac{(2s''-1)(2s''-3)\cdots 1}{2^{s'+s''} s'!(s'+s'')(s'+s''-1)\cdots(s'+1)} \times \tag{4.8}$$
$$\times (2s'-1)(2s'-3)\cdots 1.$$

Коэффициенты $\omega_{k_1k_2\dots k_s}$, очевидно, симметричны

$$\omega_{i_1i_2\dots i_\sigma i_{\sigma+1}\dots i_s} = \omega_{i_1i_2\dots i_{\sigma+1}i_\sigma\dots i_s} \quad (\sigma = 1, 2, ..s-1) \tag{4.9}$$

и определяют веса степеней главных сплошностей в смысле их вклада в величину средней сплошности.

Последовательность усредненных характеристик локального поврежденного состояния начинается со среднеквадратичной локальной сплошности

$$\bar{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{3} C_{(k)}\omega_k}. \tag{4.10}$$

Последнее соотношение, ввиду равенств

$$\omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \omega_{(3)},\ \omega_{(1)} = I_{0,2}J_{3,0} = \frac{4\pi}{3}, \tag{4.11}$$

позволяет заключить, что

$$\bar{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{(1-D_{(1)})^2 + (1-D_{(2)})^2 + (1-D_{(3)})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,||\mathbf{I} - \mathbf{D}||\,. \tag{4.12}$$

Таким образом, норма тензора сплошности равна (с точностью до множителя) средне-квадратичному значению сплошности.

Следующий элемент последовательности средне-степенных локальных сплошностей есть:

$$\bar{\zeta}^4 = \frac{1}{4\pi}(C_{(11)}\omega_{11} + C_{(22)}\omega_{22} + C_{(33)}\omega_{33} + 2C_{(12)}\omega_{12} + 2C_{(13)}\omega_{13} + 2C_{(23)}\omega_{23}). \tag{4.13}$$

В силу условий симметрии

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33},\, \omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{13} \tag{4.14}$$

и равенств

$$\omega_{11} = I_{0,4}J_{5,0} = \frac{4\pi}{5},\, \omega_{12} = I_{2,2}J_{5,0} = \frac{4\pi}{5\cdot 3} \tag{4.15}$$

находим, что

$$\bar{\zeta}^4 = \frac{3}{3\cdot 5}\left(C_{(11)} + C_{(22)} + C_{(33)}\right) + \frac{2}{3\cdot 5}\left(C_{(12)} + C_{(13)} + C_{(23)}\right). \tag{4.16}$$

Для третьего члена последовательности (4.1) имеем выражение

$$\begin{aligned} 4\pi\bar{\zeta}^6 &= C_{(111)}\omega_{111} + C_{(222)}\omega_{222} + C_{(333)}\omega_{333} + \\ &+ 3C_{(112)}\omega_{112} + 3C_{(113)}\omega_{113} + 3C_{(122)}\omega_{122} + \\ &+ 3C_{(133)}\omega_{133} + 3C_{(223)}\omega_{223} + 3C_{(233)}\omega_{233} + 6C_{(123)}\omega_{123}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

которое с помощью соотношений симметрии

$$\omega_{111} = \omega_{222} = \omega_{333},\, \omega_{112} = \omega_{113} = \omega_{122} = \omega_{133} = \omega_{223} = \omega_{233}$$

и соотношений

$$\omega_{111} = I_{0,6}J_{7,0} = \frac{4\pi}{7}, \omega_{112} = I_{2,4}J_{7,0} = \frac{4\pi}{7\cdot 5},$$
$$\omega_{123} = I_{2,2}J_{5,2} = \frac{4\pi}{7\cdot 5\cdot 3} \tag{4.18}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}^6 = \frac{5}{7\cdot 5}\left(C_{(111)} + C_{(222)} + C_{(333)}\right) + \frac{2}{7\cdot 5}C_{(123)}+ \\ + \frac{3}{7\cdot 5}\left(C_{(112)} + C_{(113)} + C_{(122)} + C_{(133)} + C_{(223)} + C_{(233)}\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Мы рассмотрим ещё один член последовательности (4.1):

$$\begin{aligned}4\pi\bar{\zeta}^8 = {} & C_{(1111)}\omega_{1111} + C_{(2222)}\omega_{2222} + C_{(3333)}\omega_{3333}+ \\ & + 4C_{(1222)}\omega_{1222} + 4C_{(1333)}\omega_{1333} + 4C_{(2111)}\omega_{2111}+ \\ & + 4C_{(3111)}\omega_{3111} + 4C_{(3222)}\omega_{3222} + 4C_{(2333)}\omega_{2333}+ \\ & + 6C_{(1122)}\omega_{1122} + 6C_{(1133)}\omega_{1133} + 6C_{(2233)}\omega_{2233}+ \\ & + 12C_{(1233)}\omega_{1233} + 12C_{(1223)}\omega_{1223} + 12C_{(1123)}\omega_{1123}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Условия симметрии (4.9) имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned}& \omega_{1111} = \omega_{2222} = \omega_{3333}, \\ & \omega_{1222} = \omega_{1333} = \omega_{2111} = \\ = {} & \omega_{3111} = \omega_{2333} = \omega_{3222}, \\ & \omega_{1122} = \omega_{1133} = \omega_{2233}, \\ & \omega_{1233} = \omega_{1223} = \omega_{1123}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Учитывая также, что

$$\begin{aligned}\omega_{1111} &= I_{0,8}J_{9,0} = \frac{4\pi}{9}, \\ \omega_{1222} &= I_{6,2}J_{9,0} = \frac{4\pi}{9\cdot 7}, \\ \omega_{1122} &= I_{4,4}J_{9,0} = \frac{3\cdot 4\pi}{9\cdot 7\cdot 5}, \\ \omega_{1233} &= I_{2,2}J_{5,4} = \frac{4\pi}{9\cdot 7\cdot 5}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

в силу (4.20), (4.21), (4.22) находим

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}^8 = {} & \frac{1}{9}\left(C_{(1111)} + C_{(2222)} + C_{(3333)}\right) + \\ & + \frac{4}{9\cdot 7}\left(C_{(1222)} + C_{(1333)} + C_{(2111)} + C_{(3111)} + C_{(3222)} + C_{(2333)}\right)+ \\ & + \frac{6\cdot 3}{9\cdot 7\cdot 5}\left(C_{(1122)} + C_{(1133)} + C_{(2233)}\right) + \frac{12}{9\cdot 7\cdot 5}\left(C_{(1233)} + C_{(1223)} + C_{(1123)}\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Таким образом, вычисленные выше значения коэффициентов $\omega_{k_1k_2\ldots k_s}$ есть (по σ, k не суммировать, $\sigma, k = 1, 2, 3$):

$$
\begin{array}{lll}
4\pi(\omega_{\underbrace{\sigma\sigma\cdots\sigma}_{s}})^{-1} = 2s+1, & & \\
4\pi(\omega_{kl})^{-1} = 3\cdot 5 & (k\neq l), & \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma k})^{-1} = 5\cdot 7 & (k=1,2,3,\ k\neq\sigma), & \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma\sigma k})^{-1} = 9\cdot 7 & (k=1,2,3,\ k\neq\sigma), & \\
12\pi(\omega_{\sigma\sigma kk})^{-1} = 9\cdot 7\cdot 5 & (k=1,2,3,\ k\neq\sigma), & \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma kl})^{-1} = 9\cdot 7\cdot 5 & (k,l=1,2,3,\ k\neq\sigma,\ l\neq\sigma,\ l\neq k), & \\
4\pi(\omega_{123})^{-1} = 3\cdot 5\cdot 7. & &
\end{array}
\qquad (4.24)
$$

"Вес" элемента спектра тем меньше, чем меньше повторяющихся индексов в его идентификации. Диагональный элемент спектра имеет наибольший собственный "вес", по сравнению с любым недиагональным.

Так как каждый из коэффициентов $\omega_{k_1k_2\ldots k_s}$ стремится к нулю при $s\to\infty$, то вклад каждого отдельного элемента спектра поврежденности в среднюю поврежденность также стремится к нулю с ростом плотности спектра. Предельный элемент последовательности (4.1)

$$
\bar{\zeta} = \lim_{s\to\infty} \sqrt[2s]{\frac{1}{4\pi}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s=1}^{3} C_{(k_1k_2\ldots k_s)}\omega_{k_1k_2\ldots k_s}} \qquad (4.25)
$$

есть средняя сплошность, соответствующая счетному спектру поврежденности.

5. Гармонический анализ тонкой структуры поврежденности

Выше было показано, что локальное состояние анизотропной поврежденности формально описывается с помощью скалярной функции $\zeta=\zeta(\Theta,\Phi)$, определенной на поверхности единичной сферы. Естественным в такой ситуации представляется использование чрезвычайно развитого Фурье-формализма [23], [24]. Разложения Фурье в ряды сферических гармоник могут быть эффективно использованы для систематического описания тонкой структуры поврежденности [14], [25], [26]. Ниже приводятся основы гармонического формализма для двумерной сферы. Определенные на поверхности единичной сферы $0\leq\Theta\leq\pi,\ 0\leq\Phi\leq 2\pi,\ 2l+1$ функций

$$
Y_l^{(k)}(\Theta,\Phi) = i^{-k}\sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}}\,P_l^{(k)}(\cos\Theta)e^{-ik\Phi} \quad (k=-l,\ldots,l), \qquad (5.1)
$$

где

$$
P_l^{(-m)}(\cos\Theta) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^{(m)}(\cos\Theta), \qquad (5.2)
$$

$$
P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}\left[(z^2-1)^l\right]
$$

есть полиномы Лежандра,

$$
P_l^{(k)}(z) = (1-z^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dz^k}P_l(z)
$$

есть присоединенные функции Лежандра, называются сферическими гармониками Лапласа порядка l. Отметим следующие очевидные равенства

$$Y_l^{(-m)} = (-1)^m Y_l^{(m)^*} \quad (l = 0, 1, ...; m = 1, 2, ..., l), \tag{5.3}$$

где здесь и в дальнейшем звездочкой обозначается комплексное сопряжение.

Сферические гармоники всех возможных порядков есть полная система функций на единичной сфере, ортогональная относительно стандартной поверхностной метрики, нормируя которую получим базис на поверхности единичной сферы:

$$\tilde{Y}_l^{(k)} = i^k \sqrt{2l+1}\, Y_l^{(k)} \quad (l = 0, 1, ...; k = -l, ..., l). \tag{5.4}$$

Любая функция $f(\Theta, \Phi)$ с конечным средне-квадратичным

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |f(\Theta, \Phi)|^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi < \infty \tag{5.5}$$

может быть аппроксимирована в средне-квадратичном рядом Фурье

$$f(\Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l} a_l^{(k)} \tilde{Y}_l^{(k)}(\Theta, \Phi), \tag{5.6}$$

где коэффициенты Фурье функции $f(\Theta, \Phi)$ вычисляются по формулам

$$a_l^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\Theta, \Phi)\tilde{Y}_l^{(k)^*}(\Theta, \Phi)\sin\Theta d\Theta d\Phi. \tag{5.7}$$

Отметим следующие равенства

$$a_l^{(-m)} = (-1)^m a_l^{(m)^*} \quad (l = 0, 1, ...; m = 1, 2, ..., l). \tag{5.8}$$

Средне-квадратичное и среднее значение функции вычисляются соответственно по формулам

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |f(\Theta, \Phi)|^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi} = \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} \left|a_l^{(k)}\right|^2}, \tag{5.9}$$

$$< f > = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\Theta, \Phi)\sin\Theta d\Theta d\Phi = a_0^{(0)}. \tag{5.10}$$

Сферические гармоники (5.4) могут быть представлены многими различными формулами (см. например [27]), из которых наиболее подходящей для последующего анализа является следующая:

$$\tilde{Y}_{2l'}^{(k)} = \frac{(4l')!}{2^{2l'}(2l')!}\sqrt{\frac{4l'+1}{(2l'+k)!(2l'-k)!}}\sum_{p=0}^{k}(-i)^{k-p}C_k^p \times \\ \times \underbrace{n_{\{1}\ldots n_1}_{p}\underbrace{n_2\ldots\, n_2}_{k-p}\underbrace{n_3\ldots n_{3\}}}_{2l'-k}, \\ (k = 0, 1, ..., 2l') \tag{5.11}$$

где фигурные скобки обозначают девиаторную часть симметричного тензора четного ранга, определенную так, что свертка по любой паре индексов равна нулю:

$$A_{\{i_1 i_2 \ldots i_{2r}\}} = \gamma_0^{2r} A_{i_1 i_2 \ldots i_{2r}} + \gamma_2^{2r} \delta_{(i_1 i_2} A_{i_3 i_4 \ldots i_{2r}) j_1 j_1} + \ldots + \\ + \gamma_{2r}^{2r} \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \ldots \delta_{i_{2r-1} i_{2r})} A_{j_1 j_1 j_2 j_2 \ldots j_r j_r}, \tag{5.12}$$

$$\gamma_{2\sigma}^{2r} = \frac{(-1)^\sigma C_{2r}^{2\sigma} C_{2r-1}^{\sigma}}{C_{4r-1}^{2\sigma}},$$

а круглые скобки, как обычно, обозначают симметризацию индексов:

$$A_{(i_1 i_2 \ldots i_{2r})} = \frac{1}{(2r)!} \sum_P A_{i_{P(1)} i_{P(2)} \ldots i_{P(2r)}}. \tag{5.13}$$

Здесь символ P обозначает произвольную перестановку множества натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 2r$.

В частности, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} n_{\{ij\}} &= n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}, \\ n_{\{ijkl\}} &= n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{7}(\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \\ &+ \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k + \delta_{kl} n_i n_j) + \frac{1}{5 \cdot 7}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Подставляя формулу (5.11) в (5.7), получаем

$$a_{2l'}^{(k)} = \frac{(4l')!}{2^{2l'}(2l')!} \sqrt{\frac{4l'+1}{(2l'+k)!(2l'-k)!}} \sum_{p=0}^{k} i^{k-p} C_k^p \times \\ \times \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) \underbrace{n_{\{1} \ldots n_1}_{p} \underbrace{n_2 \ldots n_2}_{k-p} \underbrace{n_3 \ldots n_{3\}}}_{2l'-k} dS, \\ (k = 0, 1, \ldots, 2l') \tag{5.15}$$

где интегрирование производится по поверхности единичной сферы, dS – элемент поверхности единичной сферы.

Особый интерес, в силу выбора типичной аппроксимации ориентационного распределения поврежденности в форме (3.8), представляет гармонический анализ функции вида

$$f(\mathbf{n}) = c_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}} n_{i_1} n_{i_2} \ldots n_{i_{2s}}. \tag{5.16}$$

С этой целью мы используем подход, развитый в работах [25], [26].

Известно, что если функция $f(\Theta, \Phi)$ является целой рациональной функцией координат точки на поверхности единичной сферы, то она может быть разложена в сумму конечного числа сферических гармоник [24]. Одно из таких возможных разложений имеет вид (см. [25]):

$$f(\mathbf{n}) = a_0 + a_{ij} n_{\{ij\}} + a_{ijkl} n_{\{ijkl\}} + \ldots + a_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}} n_{\{i_1} n_{i_2} \ldots n_{i_{2s}\}}, \tag{5.17}$$

где тензоры $a_0, a_{ij}, a_{ijkl}, ..., a_{i_1 i_2 ... i_{2s}}$ симметричны и равны своим девиаторам (т.е. свертка тензора $a_{i_1 i_2 ... i_{2r}}$ по любой паре индексов равна нулю). Каждое из слагаемых $a_{i_1 i_2 ... i_{2r}} n_{\{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}\}}$ в сумме (5.17) есть сферическая гармоника порядка $2r$, и поэтому, все члены суммы ортогональны друг другу. Ясно, однако, что сферические гармоники одного и того же порядка $n_{\{i_1'} n_{i_2'} ... n_{i_{2r}'\}}$ и $n_{\{i_1''} n_{i_2''} ... n_{i_{2r}''\}}$ не ортогональны друг другу, следовательно, сумма (5.17) не является Фурье-разложением функции $f(\Theta, \Phi)$ в точном смысле этого термина. Ортогонализация $4r+1$ независимых сферических гармоник $n_{\{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}\}}$ возможна и имеет своим результатом систему сферических гармоник Лапласа $\tilde{Y}_{2r}^{(k)}$ $(k = 0, \pm 1, ..., \pm 2r)$.

Сравнивая разложения (5.16) и (5.17), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} c_{i_1 i_2 ... i_{2s}} = a_{i_1 i_2 ... i_{2s}} + \delta_{(i_1 i_2} a_{i_3 i_4 ... i_{2s})} + \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} a_{i_5 i_6 ... i_{2s})} + ... + \\ + a_0 \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} ... \delta_{i_{2s-1} i_{2s})}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Следуя работе [25], введем тензор (см. формулу (5.15))

$$N_{\{i_1 i_2 ... i_{2r}\}} = \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}\}} dS. \tag{5.19}$$

Подставляя в последнюю формулу разложение (5.17), находим

$$\begin{aligned} N_{\{i_1 i_2 ... i_{2r}\}} = a_{j_1 j_2 ... j_{2r}} \frac{1}{4\pi} \iint n_{\{j_1} n_{j_2} ... n_{j_{2r}\}} n_{\{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}\}} dS = \\ = a_{j_1 j_2 ... j_{2r}} < n_{j_1} n_{j_2} ... n_{j_{2r}} n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}} > . \end{aligned} \tag{5.20}$$

Так как усреднение в этой формуле вычисляется явно в виде

$$< n_{j_1} n_{j_2} ... n_{j_{2r}} n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_{2r}} > = \frac{1}{4r+1} \delta_{(j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} ... \delta_{j_{2r-1} j_{2r}} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} ... \delta_{i_{2r-1} i_{2r})}, \tag{5.21}$$

то

$$N_{\{i_1 i_2 ... i_{2r}\}} = \frac{(2r)! 2^{2r}}{(4r+1)(4r)!} a_{j_1 j_2 ... j_{2r}} \sum_P \delta_{\sigma_P (j_1 i_1)} \delta_{\sigma_P (j_2 i_2)} ... \delta_{\sigma_P (j_{2r} i_{2r})}, \tag{5.22}$$

где символ σ_P обозначает перестановку пар индексов

$$\sigma_P : (j_1 i_1, j_2 i_2, ..., j_{2r} i_{2r}) \to \left(j_{P(1)} i_{P(1)}, j_{P(2)} i_{P(2)}, ..., j_{P(2r)} i_{P(2r)} \right). \tag{5.23}$$

После подсчета суммы в (5.22), получаем следующий результат:

$$a_{i_1 i_2 ... i_{2r}} = (4r+1)\ 2^{-2r} C_{4r}^{2r} N_{\{i_1 i_2 ... i_{2r}\}}. \tag{5.24}$$

Из формул (5.19) и (5.24) следует, что коэффициенты разложения (5.17) вычисляются по формулам, аналогичным классическим формулам гармонического анализа:

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) dS, \quad a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5}{2} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{ij\}} dS, \\ a_{ijkl} = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{ijkl\}} dS, \ ..., \end{aligned} \tag{5.25}$$

что дает право называть их также Фурье-коэффициентами функции $f(\mathbf{n})$.

Коэффициенты Фурье (5.25) в отличие от (5.7) являются тензорами и, поэтому, легко пересчитываются при повороте осей координат. Отметим здесь также соотношение

$$a_{2l'}^{(k)} = \frac{(2l')!}{\sqrt{(4l'+1)(2l'+k)!(2l'-k)!}} \sum_{p=0}^{k} i^{k-p} C_k^p a_{\underbrace{1...1}_{p}\underbrace{2...2}_{k-p}\underbrace{3...3}_{2l'-k}}, \quad (k = 0, 1, ..., 2l') \tag{5.26}$$

следующее из (5.15) и (5.24).

Приведенный выше анализ позволяет представить тензорные меры поврежденности как результат некоторого усреднения ориентационного распределения поврежденности по сфере единичных направлений.

Рассмотрим сначала аппроксимацию второго порядка. В этом случае разложение (5.17) в сумму сферических гармоник имеет следующий вид:

$$\zeta^2(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{C} + \mathrm{tr}(\mathbf{C}\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}), \tag{5.27}$$

из которого, учитывая (5.14) и (5.25), находим

$$\mathbf{C} = \frac{3}{8\pi}\iint \zeta^2(\mathbf{n})\,[5\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} - \mathbf{I}]\,dS. \tag{5.28}$$

Таким образом, тензор поврежденности второго ранга может быть вычислен, исходя из известного (в том числе определенного экспериментально) локального распределения поврежденности в зависимости от направления $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$, по формуле

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}\iint \zeta^2(\mathbf{n})\,[5\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} - \mathbf{I}]\,dS}. \tag{5.29}$$

Последняя формула в главных осях поврежденности приобретает следующий вид:

$$D_{(\alpha)} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi}\iint \zeta^2(\mathbf{n})\left[5n_{(\alpha)}^2 - 1\right]dS} \tag{5.30}$$

и может быть использована для прямого подсчета главных поврежденностей, если ориентация главных осей поврежденности известна.

Ниже приводятся соответствующие результаты для аппроксимации четвертого порядка. Тензор поврежденности вычисляется по формуле

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt[4]{\frac{3\cdot 5}{2^2}\cdot\frac{1}{4\pi}}\times$$
$$\times\sqrt[4]{\iint \zeta^4(\mathbf{n})\left[\frac{3\cdot 7}{2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} - 7sym(\mathbf{I}\otimes(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})) + \frac{1}{2}sym(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})\right]dS}, \tag{5.31}$$

где

$$\delta_{(ij}n_kn_{l)} = \frac{1}{6}(\delta_{ij}n_kn_l + \delta_{ik}n_jn_l + \delta_{il}n_jn_k + \delta_{kl}n_in_j + \delta_{jl}n_in_k + \delta_{jk}n_in_l),$$

$$\delta_{(ij}\delta_{kl)} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

В главных осях поврежденности формула (5.31) приобретает вид (по i, k не суммировать; $i, k = 1, 2, 3$)

$$D_{(ik)} = 1 - \Big\{\frac{1}{4\pi}\frac{3\cdot 5}{2^2}\iota_{ik}\iint \zeta^4(\mathbf{n})\Big[\frac{3\cdot 7}{2}n_{(i)}^2 n_{(k)}^2 - \\ - \frac{7}{6}(\delta_{ii}n_{(k)}^2 + 4\delta_{ik}n_{(i)}n_{(k)} + \delta_{kk}n_{(i)}^2) + \frac{1}{6}(\delta_{ii}\delta_{kk} + 2\delta_{ik}\delta_{ik})\Big]dS\Big\}^{1/4}, \tag{5.32}$$

где

$$\iota_{ik} = \delta_{ii}\delta_{kk} + 2\varepsilon_{ik\rho}\varepsilon_{ik\rho}$$

и $\varepsilon_{ik\rho}$ есть кососимметричные ε-символы. Поясним, что множитель ι_{ik} появляется ввиду следующего соотношения (по i, k не суммировать; $i, k = 1, 2, 3$)

$$C_{(ik)} = C_{(ikik)} + C_{(kiik)} + C_{(ikki)}, \tag{5.33}$$

связывающего собственные значения и компоненты тензора $\mathbf{C}$ в главных осях поврежденности. Ниже (см. вторую часть настоящей работы) мы рассмотрим расчет спектра поврежденности по формулам (5.32) для осесимметричной поврежденности.

6. Гармоническое описание состояния поврежденности. Соответствие между гармоническим и тензорным представлениями

Приведенные в п.5 результаты позволяют развить иной подход к представлению тонкой структуры анизотропного состояния поврежденности – гармоническое представление поврежденности.

Существо этого подхода состоит в описании актуального состояния поврежденности посредством Фурье-коэффициентов степеней ориентационного распределения поврежденности, разложенных в ряд по сферическим гармоникам Лапласа.

Аппроксимация порядка $2s$ распределения ζ^{2s} разлагается в конечную сумму сферических гармоник Лапласа

$$\zeta^{2s}(\Theta, \Phi) = c_0^{(0)} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)}\tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \tag{6.1}$$

определенных относительно выбранного репера $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ или в сумму вида

$$\zeta^{2s}(\theta, \varphi) = c_{(0)}^{((0))} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=-l}^{l} c_{(2l)}^{((2k))}\tilde{Y}_{(2l)}^{((2k))}(\theta, \varphi) \tag{6.2}$$

по сферическим гармоникам относительно триэдра поврежденности $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$.

Состояние поврежденности, поэтому, может быть представлено с помощью множества коэффициентов гармонического разложения (гармонический спектр поврежденности):

$$c_{2l}^{(k)} \quad (l = 1, 2, ..., s; k = 0, \pm 1, ..., \pm 2l). \tag{6.3}$$

Чтобы связать гармоническое и тензорное представления поврежденности, заметим, что в силу формул (5.19) и (5.16) имеем

$$N_{\{i_1 i_2 ... i_{2r}\}} = \Lambda_{i_1 i_2 ... i_{2r} j_1 j_2 ... j_{2s}} c_{j_1 j_2 ... j_{2s}}, \tag{6.4}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_{i_1 i_2 ... i_{2r} j_1 j_2 ... j_{2s}} = & \frac{1}{2(r+s)+1} \delta_{(j_1 j_2} ... \delta_{j_{2s-1} j_{2s}} \delta_{i_1 i_2} ... \delta_{i_{2r-1} i_{2r})} + \\ & + \frac{\gamma_2^{2r}}{(2r)!(2(r+s-1)+1)} \times \\ & \times \sum_P \delta_{i_{P(1)} i_{P(2)}} \delta_{(j_1 j_2} ... \delta_{j_{2s-1} j_{2s}} \delta_{i_{P(3)} i_{P(4)}} ... \delta_{i_{P(2r-1)} i_{P(2r)})} + ... + \\ & + \frac{\gamma_{2r}^{2r}}{2s+1} \delta_{(i_1 i_2} ... \delta_{i_{2r-1} i_{2r})} \delta_{(j_1 j_2} ... \delta_{j_{2s-1} j_{2s})}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Подставляя соотношение (6.4) в (5.15), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} a_{2l'}^{(k)} = & \frac{(4l')!}{2^{2l'}(2l')!} \sqrt{\frac{4l'+1}{(2l'+k)!(2l'-k)!}} \sum_{p=0}^{k} i^{k-p} C_k^p \times \\ & \times \Lambda_{\underbrace{11...1}_{p} \underbrace{22...2}_{k-p} \underbrace{33...3}_{2l'-k} j_1 j_2 ... j_{2s}} c_{j_1 j_2 \cdots j_{2s}}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

которое позволяет конвертировать одно представление поврежденности в другое.

Для аппроксимации второго порядка

$$\zeta^2 = C_{ij} n_i n_j \tag{6.7}$$

разложение (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\zeta^2(\Theta, \Phi) = & c_0^{(0)} + c_2^{(-2)} \tilde{Y}_2^{(-2)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(-1)} \tilde{Y}_2^{(-1)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(0)} \tilde{Y}_2^{(0)}(\Theta, \Phi) + \\ & + c_2^{(1)} \tilde{Y}_2^{(1)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(2)} \tilde{Y}_2^{(2)}(\Theta, \Phi),\end{aligned} \tag{6.8}$$

где

$$c_2^{(-1)} = -c_2^{(1)^*}, \quad c_2^{(-2)} = c_2^{(2)^*}. \tag{6.9}$$

Разрешая систему линейных уравнений (6.6) для $s = 1$, находим

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}c_2^{(0)} + \frac{\sqrt{30}}{4}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) + c_0^{(0)},\\
C_{22} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}c_2^{(0)} - \frac{\sqrt{30}}{4}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) + c_0^{(0)},\\
C_{33} &= \sqrt{5}c_2^{(0)} + c_0^{(0)},\\
C_{12} &= \frac{\sqrt{30}}{4i}(c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}),\\
C_{13} &= \frac{15}{2\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}),\\
C_{23} &= \frac{15}{2i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}).
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

В главных осях поврежденности соответственно имеем:

$$
\zeta^2(\theta,\varphi) = c_{(0)}^{((0))} + c_{(2)}^{((0))}\tilde{Y}_{(2)}^{((0))}(\theta,\varphi) + c_{(2)}^{((2))}\left(\tilde{Y}_{(2)}^{((2))}(\theta,\varphi) + \tilde{Y}_{(2)}^{((-2))}(\theta,\varphi)\right), \tag{6.11}
$$

$$
c_{(2)}^{((1))} = c_{(2)}^{((-1))} = 0, \quad c_{(2)}^{((2))} = c_{(2)}^{((-2))}, \tag{6.12}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{(1)} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}c_{(2)}^{((0))} + \frac{\sqrt{30}}{2}c_{(2)}^{((2))} + c_{(0)}^{((0))},\\
C_{(2)} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}c_{(2)}^{((0))} - \frac{\sqrt{30}}{2}c_{(2)}^{((2))} + c_{(0)}^{((0))},\\
C_{(3)} &= \sqrt{5}c_{(2)}^{((0))} + c_{(0)}^{((0))}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Соответствующие формулы для аппроксимации четвертого порядка приводятся ниже: в произвольно ориентированных осях

$$
\zeta^4 = C_{ijkl}n_in_jn_kn_l, \tag{6.14}
$$

$$
\zeta^4(\Theta,\Phi) = c_0^{(0)} + \sum_{l=1,2}\sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)}\tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta,\Phi), \tag{6.15}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1111} &= -\frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{3\sqrt{70}}{16}(c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) + \frac{\sqrt{30}}{4}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) -\\
&\quad - \frac{\sqrt{5}}{2}c_2^{(0)} + c_0^{(0)} + \frac{9}{8}c_4^{(0)},\\
C_{2222} &= \frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{3\sqrt{70}}{16}(c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) - \frac{\sqrt{30}}{4}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) -\\
&\quad - \frac{\sqrt{5}}{2}c_2^{(0)} + c_0^{(0)} + \frac{9}{8}c_4^{(0)},\\
C_{3333} &= 3c_4^{(0)} + \sqrt{5}c_2^{(0)} + c_0^{(0)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1112} &= \frac{3\sqrt{70}}{16i}(c_4^{(4)} - c_4^{(-4)}) - \frac{3\sqrt{10}}{16i}(c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{8i}(c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}),\\
C_{1113} &= \frac{3\sqrt{35}}{16}(c_4^{(3)} - c_4^{(-3)}) - \frac{9\sqrt{5}}{16}(c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}),\\
C_{1222} &= -\frac{3\sqrt{70}}{16i}(c_4^{(4)} - c_4^{(-4)}) - \frac{3\sqrt{10}}{16i}(c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{8i}(c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}),\\
C_{2333} &= \frac{3\sqrt{5}}{4i}(c_4^{(1)} + c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}),\\
C_{1333} &= \frac{3\sqrt{5}}{4}(c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1122} &= -\frac{3\sqrt{70}}{16}(c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) + \frac{3}{8}c_4^{(0)} - \frac{\sqrt{5}}{6}c_2^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)},\\
C_{1133} &= \frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{24}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \frac{3}{2}c_4^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_2^{(0)},\\
C_{2233} &= -\frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) - \frac{\sqrt{30}}{24}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \frac{3}{2}c_4^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_2^{(0)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1123} &= \frac{3\sqrt{35}}{16i}(c_4^{(3)} + c_4^{(-3)}) - \frac{3\sqrt{5}}{16i}(c_4^{(1)} + c_4^{(-1)}) + \frac{15}{12i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}),\\
C_{1223} &= -\frac{3\sqrt{35}}{16}(c_4^{(3)} - c_4^{(-3)}) - \frac{3\sqrt{5}}{16}(c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{12\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}),\\
C_{1233} &= \frac{3\sqrt{10}}{8i}(c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{24i}(c_2^{(2)} - c_2^{(-2)});
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

в главных осях поврежденности

$$
\begin{aligned}
\zeta^4(\theta,\varphi) = c_{(0)}^{((0))} + c_{(2)}^{((0))}\tilde{Y}_{(2)}^{((0))}(\theta,\varphi) + c_{(4)}^{((0))}\tilde{Y}_{(4)}^{((0))}(\theta,\varphi) +\\
+c_{(2)}^{((2))}\left(\tilde{Y}_{(2)}^{((2))}(\theta,\varphi) + \tilde{Y}_{(2)}^{((-2))}(\theta,\varphi)\right) + c_{(4)}^{((2))}\left(\tilde{Y}_{(4)}^{((2))}(\theta,\varphi) + \tilde{Y}_{(4)}^{((-2))}(\theta,\varphi)\right) +\\
+c_{(4)}^{((4))}\left(\tilde{Y}_{(4)}^{((4))}(\theta,\varphi) + \tilde{Y}_{(4)}^{((-4))}(\theta,\varphi)\right),
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_{(2)}^{((2))} = c_{(2)}^{((-2))},\\
&c_{(2)}^{((1))} = c_{(2)}^{((-1))} = 0,\\
&c_{(4)}^{((4))} = c_{(4)}^{((-4))},\\
&c_{(4)}^{((2))} = c_{(4)}^{((-2))},\\
&c_{(4)}^{((3))} = c_{(4)}^{((-3))} = c_{(4)}^{((1))} = c_{(4)}^{((-1))} = 0,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{(11)} = -\frac{3\sqrt{10}}{4}c^{((2))}_{(4)} + \frac{3\sqrt{70}}{8}c^{((4))}_{(4)} + \frac{\sqrt{30}}{2}c^{((2))}_{(2)} - \frac{\sqrt{5}}{2}c^{((0))}_{(2)} + c^{((0))}_{(0)} + \frac{9}{8}c^{((0))}_{(4)},\\
&C_{(22)} = \frac{3\sqrt{10}}{4}c^{((2))}_{(4)} + \frac{3\sqrt{70}}{8}c^{((4))}_{(4)} - \frac{\sqrt{30}}{2}c^{((2))}_{(2)} - \frac{\sqrt{5}}{2}c^{((0))}_{(2)} + c^{((0))}_{(0)} + \frac{9}{8}c^{((0))}_{(4)},\\
&C_{(33)} = 3c^{((0))}_{(4)} + \sqrt{5}c^{((0))}_{(2)} + c^{((0))}_{(0)},
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}C_{(12)} = -\frac{3\sqrt{70}}{8}c^{((4))}_{(4)} + \frac{3}{8}c^{((0))}_{(4)} - \frac{\sqrt{5}}{6}c^{((0))}_{(2)} + \frac{1}{3}c^{((0))}_{(0)},\\
&\frac{1}{3}C_{(13)} = \frac{3\sqrt{10}}{4}c^{((2))}_{(4)} + \frac{\sqrt{30}}{12}c^{((2))}_{(2)} - \frac{3}{2}c^{((0))}_{(4)} + \frac{1}{3}c^{((0))}_{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c^{((0))}_{(2)},\\
&\frac{1}{3}C_{(23)} = -\frac{3\sqrt{10}}{4}c^{((2))}_{(4)} - \frac{\sqrt{30}}{12}c^{((2))}_{(2)} - \frac{3}{2}c^{((0))}_{(4)} + \frac{1}{3}c^{((0))}_{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c^{((0))}_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Точное представление ориентационного распределения поврежденности

$$
\begin{aligned}
\zeta(\Theta, \Phi) &= \lim_{s\to\infty} \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}(\mathbf{I}-\mathbf{D})^{2s}\underbrace{\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\ldots\otimes\mathbf{n}}_{s}} =\\
&= \lim_{s\to\infty} \sqrt[2s]{\sum_{l=0}^{s}\sum_{k=-2l}^{2l} c^{(k)}_{2l}\tilde{Y}^{(k)}_{2l}(\Theta, \Phi)}
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

соответствует полному счетному гармоническому спектру поврежденности и тензору поврежденности бесконечного ранга.

В заключение рассмотрим процедуру преобразования гармонического разложения распределения $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$ в результате поворота репера $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ в главные оси поврежденности.

Указанная проблема решается с помощью соответствующей формулы преобразования для сферических гармоник Лапласа [28]:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}^{(k)}_{n}(\Theta, \Phi) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{C^{n+k}_{2n}}{C^{n+m}_{2n}}\sqrt{\frac{(n-k)!\,(n+k)!}{(n-m)!(n+m)!}}\times\\
\times S^{n+k,n+m}_{2n}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)\tilde{Y}^{((m))}_{(n)}(\theta, \varphi),
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&S^{k,l}_{n}(h) = (-1)^k(\eta_4 + i\eta_1)^{n-k-l}(\eta_3 + i\eta_2)^{k-l}P^{(n-k-l,k-l)}_{l}(\eta_3^2 + \eta_2^2 - \eta_4^2 - \eta_1^2),\\
&\qquad (n \geq k + l)\\
&S^{k,l}_{n}(h) = (-1)^{n-l}(\eta_4 - i\eta_1)^{k+l-n}(\eta_3 - i\eta_2)^{l-k}P^{(l+k-n,l-k)}_{n-l}(\eta_3^2 + \eta_2^2 - \eta_4^2 - \eta_1^2),\\
&\qquad (n < k + l)
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

где

$$
P^{(\alpha,\beta)}_{n}(z) = 2^{-n}\sum_{m=0}^{n} C^{m}_{n+\alpha}C^{n-m}_{n+\beta}(z-1)^{n-m}(z+1)^{m}
\tag{6.23}
$$

есть полиномы Якоби, а четырехмерный вектор η имеет компоненты

$$\eta = (\cos a_1 \sin(\psi/2),\ \cos a_2 \sin(\psi/2),\ \cos a_3 \sin(\psi/2),\ \cos(\psi/2)) \tag{6.24}$$

и определяет преобразование вращения $\mathbf{O}$ базиса $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$ в $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{O} = \mathbf{I} - 2\eta_4 \mathbf{A} + 2\mathbf{A}^2, \tag{6.25}$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 0 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{6.26}$$

Мы использовали обозначение a_j для угла между осью вращения и вектором $\mathbf{i}_j$, а также обозначение ψ для угла вращения. Обращение формулы (6.21) имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{(n)}^{((k))}(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{n+m}} \sqrt{\frac{(n-k)!\ (n+k)!}{(n-m)!(n+m)!}} \times \\ \times S_{2n}^{n+k,n+m}(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \eta_4) \tilde{Y}_n^{(m)}(\Theta, \Phi). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Сравнивая гармонические разложения

$$\begin{aligned} \zeta^{2s}(\Theta, \Phi) &= \sum_{l=0}^{s} \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \\ \zeta^{2s}(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{s} \sum_{p=-l}^{l} c_{(2l)}^{((2p))} \tilde{Y}_{(2l)}^{((2p))}(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{6.28}$$

с помощью формул (6.21) и (6.27), получаем следующие соотношения, связывающие гармонические спектры поврежденности:

$$c_{2l}^{(m)} = \sum_{p=-l}^{l} c_{(2l)}^{((2p))} \frac{C_{4l}^{2(l+p)}}{C_{4l}^{2l+m}} \sqrt{\frac{2(l-p)!\ 2(l+p)!}{(2l-m)!(2l+m)!}}\ S_{4l}^{2(l+p),2l+m}(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \eta_4), \tag{6.29}$$

$$c_{(2l)}^{((2p))} = \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \frac{C_{4l}^{2l+k}}{C_{4l}^{2(l+p)}} \sqrt{\frac{(2l-k)!\ (2l+k)!}{2(l-p)!2(l+p)!}}\ S_{4l}^{2l+k,2(l+p)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4). \tag{6.30}$$

Как можно заметить из приведенных формул, закон преобразования гармонического спектра поврежденности при повороте осей координат гораздо сложнее тензорного. Тем не менее коэффициенты Фурье (число которых, очевидно, зависит от желаемой точности представления тонкой структуры поврежденности) с успехом могут быть использованы не только для математического представления поврежденности, но также и для кинетического и реологического моделирования роста поврежденности в твердом теле. Тензоры поврежденности невысоких рангов (второго, четвертого), конечно же, не могут правильно представлять сложные, хаотические и разрывные структуры материальной поврежденности. Представление разрывных распределений поврежденности на сфере единичных направлений может потребовать аппроксимации чрезвычайно большим числом сферических гармоник. Поэтому гармоническое представление поврежденности достаточно длинным отрезком ряда Фурье в этих случаях придется вводить в определяющие и кинетические уравнения поврежденности, которые при этом теряют свои тензорные свойства.

Литература

[1] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР, ОТН. N8. 1958. С.26-31.

[2] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

[3] Kachanov L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff, 1986. Dodrecht, Boston. 135 p.

[4] Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Part I - General concepts. J. Appl. Mech. V. 55, No 1, 1988. P. 59-64.

[5] Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Part II- Damage growth, crack initiation, and crack growth. J. Appl. Mech. V. 55, No 1, 1988. P. 65-72.

[6] Maugin G.A. Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge University Press, 1992. Cambridge. 350 p.

[7] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag, 1992. Berlin. 210 p.

[8] Betten J. Applications of tensor functions in continuum damage mechanics. Int. J. Damage Mechanics. V. 1, No 1, 1992. P. 47-59.

[9] Вакуленко А.А., Качанов М.Л. Континуальная модель среды с трещинами // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. N4. 1971. С.159-166.

[10] Davison L., Stevens A.L. Thermodynamic constitution of spalling elastic bodies. J. Appl. Phys. V. 44, 1973. P. 668-674.

[11] Lemaitre J., Chaboche J.L. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement. J. de Mechanique appliquee. V. 2, 1978. P. 317-365.

[12] Dragon A., Mroz Z. A continuum model for plastic brittle behavior of rock and concrete. Int. J. Eng. Sci. V. 17, No 2, 1979. P. 121-137.

[13] Krajcinovic D., Fonseka G.U. The continuous damage theory of brittle materials. Part I: General theory. J. Appl. Mech. V. 48, No 4, 1981. P. 809-815.

[14] Onat E.T. Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids. Int. J. Engng. Sci. V. 22, No 8-10, 1984. P. 1013-1021.

[15] Simo J.C., Ju J.W. Strain- and stress- based continuum damage models- I. Formulation. Int. J. Solids Structures. V. 23, No 7, 1987. P. 821-840.

[16] Chow C.L., Wang J. Ductile fracture characterization with the anisotropic continuum damage theory. Engng. Fracture Mech. V. 30, 1988. P. 547-563.

[17] Krajcinovic D. Damage mechanics. Mech. mater. V. 8, 1989. P. 117-197.

[18] Lubarda V.A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution. Int. J. Solids Structures. V. 30, No 20, 1993. P. 2859-2877.

[19] Truesdell C., Toupin R.A. The Classical Field Theories. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S.Flugge), Springer, 1960. Berlin. P. 226-793.

[20] Hallbauer D.K., Wagner H., Cook N.G. Some observations concerning the microscopic and mechanical behavior of quartzite specimens in stiff, triaxial compression tests. Int. J. Rock Mech. Sci. Geomech. Abstr. V.10, 1973. P. 713-726.

[21] Murakami S. Mechanical modeling of material damage. J. Appl. Mech. V.55, No 2, 1988. P.280-286.

[22] Ericksen J.L. Tensor Fields. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge), Springer, 1960. Berlin. P. 794-858.

[23] Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge University Press, 1955. Cambridge. 500 p.

[24] MacRobert T.M. Spherical Harmonics. Pergamon Press, 1967. Oxford, London, New York. 345 p.

[25] Kanatani K. Distribution of directional data and fabric tensors. Int. J. Eng. Sci. V. 22, No 2, 1984. P. 149-164.

[26] Onat E.T., Leckie F.A. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure. J. Appl. Mech. V. 55, No 1, 1988. P. 1-10.

[27] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

[28] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol. I,II, Vol.III. McGraw-Hill, 1953, 1955. New York, Toronto, London. 302 p., 396 p., 292 p.

TENSOR MEASURES AND HARMONIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL DAMAGE STATE

Y.N. Radayev[2]

The paper is concerned with the algorithm of the derivation of damage tensors and local averaged measures of the three-dimensional anisotropic damage from the classical Finger strain measure. The algorithm affords the damage tensor of any even rank can be obtained.

Emphasis is given to the exact definitions of the high rank tensor measures of the damage and the mechanical interpretation of their eigenelements. The proposed algorithm is illustrated by the derivation of the second, fourth, sixth and eighth order damage tensor. For every case the typical profiles of the directional damage distributions, which show the increasing accuracy in the description of the anisotropic damage, are given.

Averaged local damage characteristics are defined and then determined in terms of the damage tensor eigenvalues.

A harmonic analysis of the three-dimensional directional damage distribution is discussed. By using the harmonic analysis technique, the sequence of damage tensors is shown can be determined as a result of the averaging over the sphere of the unit directions. The harmonic developments afford the damage tensor and its spectrum to be directly computed from the experimental histograms.

[2]Radayev Yuri Nickolaevich, dept. of continuum mechanics, Samara state university