СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

О.П.Филатов[1]

Установлено, что пределы максимальных средних для указанных функций вдоль решений дифференциального включения с произвольной компактной правой частью из конечномерного пространства, стартующих из данной начальной точки, всегда существуют. Если компакт обладает некоторым свойством невырожденности, то предел не зависит от начальных данных. Последнее свойство особенно важно при построении аппроксимирующих дифференциальных включений в задачах усреднения.

1. Постановка задачи

Для непрерывной почти периодической функции
$f : R^m \to R$, заданной на евклидовом пространстве R^m, рассмотрим предел

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(\gamma(t))\,dt, \tag{1}$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям в смысле Каратеодори дифференциального включения

$$\dot\gamma \in G, \qquad \gamma(0) = \gamma_0, \tag{2}$$

определенным на полуоси $t \geq 0$; множество всех таких решений задачи (2) обозначим $\Gamma(\gamma_0)$. Здесь G — непустое компактное множество из R^m (далее мы отождествляем касательное и фазовое пространства).

В [1, 2] было установлено, что при $(m = 1)$ предел (1) существует. В данной статье показано, что предел макимального среднего всегда существует и в многомерном случае, при этом он зависит, вообще говоря, от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$.

С точки зрения приложений к теории усреднения дифференциальных включений [3] особый интерес представляет ситуация, когда предел максимального среднего не зависит от начальных условий.

Это накладывает определенные требования на компакт $G \subset R^m$. Поэтому ставится следующая задача.

Во–первых, доказать существование предела (1) для произвольного компакта $G \subset R^m$. Во–вторых, сформулировать требования на компакт G, которые гарантируют, что предел (1) равномерно не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$.

[1]Филатов Олег Павлович. Кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета

2. Основные понятия

Пусть $C(R^m)$, как обычно, пространство непрерывнных функций $f : R^m \to R$ с равномерной метрикой.

Напомним, что *функция $f \in C(R^m)$ называется почти периодической, если для произвольной последовательности векторов $h_n \in R^m$, $n = 1, 2, \ldots$, семейство функций f_{h_n} будет предкомпактным.*

Как известно, это определение эквивалентно следующему: *функция $f \in C(R^m)$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что любой куб $K_\varepsilon \subset R^m$ с длиной стороны равной l содержит векторный ε – почти период T_ε функции f, то есть при любом $\gamma \in R^m$ выполняется неравенство $|f(\gamma + T_\varepsilon) - f(\gamma)| \leq \varepsilon$.*

Напомним также, что размерность множества $G \subset R^m$ определяется размерностью аффинной оболочки этого множества и обозначается $\dim(G)$.

Определение. *Компакт $G \subset R^m$ называется $m-1$– невырожденным, если $\dim(G) \geq m-1$, при этом, если $\dim(G) = m-1$, то компакт не должен принадлежать подпространству размерности $m-1$.*

Например, в случае $m = 2$ компакт $G \subset R^2$ будет 1 – невырожденным тогда и только тогда, когда множество G не принадлежит прямой, проходящей через начало координат.

3. Основные результаты

Теорема. *Для любого компакта $G \subset R^m$ и любой непрерывной почти периодической функции $f : R^m \to R$ предел максимального среднего (1) существует. Если компакт G является $m-1$ – невырожденным, то предел M_f не зависит, причем равномерно, от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$.*

Сразу же отметим, что если компакт G не является $m-1$ – невырожденным, то всегда найдется непрерывная почти периодическая функция, для которой предел (1) будет зависеть от начального вектора.

С другой стороны, для любого компакта $G \neq \{0\}$ всегда можно указать непрерывную почти периодическую функцию f, отличную от постоянной, для которой предел M_f не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$.

Доказательство теоремы. Сначала приведем лемму, которая определяет геометрические свойства интегральных кривых дифференциального включения (2) для $m-1$– невырожденного компакта G из правой части дифференциального включения (2).

Лемма. *Если компакт $G \subset R^m$ является $m-1$– невырожденным, то для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $t_{\max} = t_{\max}(\varepsilon) > 0$, зависящая от компакта, что для любых точек $a, b \in R^m$ найдется число $t_a \in [0, t_{\max}]$ и интегральная кривая дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G$, соединяющая точку $(0, b)$ с точкой $(t_a, a + T_\varepsilon) \in R \times R^m$ для некоторого векторного периода T_ε функции f.*

Доказательство леммы. Для задачи $\dot{\gamma} \in G$, $\gamma(0) = b$ на основании свойств интегралов от многозначных отображений [4] множество достижимости в момент времени t равно $b + t \cdot co(G)$. Поэтому объединение множеств достижимости для всех моментов времени $t \geq 0$ представляет из себя конус K_b с вершиной в точке b

$$K_b = \{\gamma \in R^m : \gamma = b + t \cdot co(G),\ t \geq 0\}. \tag{3}$$

Поскольку компакт G является $(m-1)$ – невырожденным, то в случае, если размерность компакта $\dim(G) = m-1$, множество G содержится в некоторой гиперплоскости P, не проходящей через $0 \in R^m$ (напомним, мы отождествили касательное и фазовое пространства).

По теореме о непустоте относительной внутренности выпуклого множества [5, теорема 1.5, с. 202] получаем, что множество $co(G)$ содержит пересечение гиперплоскости P с некоторым шаром пространства R^m радиуса $r_0 > 0$ с центром в некоторой точке гиперплоскости $b_0 \neq 0$, при этом угол между вектором b_0 и нормальным вектором гиперплоскости отличен от прямого. В таком случае точка b_0 является внутренней для конуса K_b.

Если $\dim(G) = m$, то внутренность множества $co(G)$ непустая, поэтому в качестве P можно взять гиперплоскость, проходящую через внутреннюю точку $b_0 \neq 0$ из $co(G)$, нормальный вектор которой равен b_0.

Таким образом, в любом случае существует (m–мерный) куб $C(b_0) \subset K_b$ с центром в точке b_0 и длиной ребра $r > 0$ такой, что куб $b + C(b_0)$ принадлежит конусу K_b. Можно считать, что такой куб содержится в открытом множестве

$$L(2) = \{\gamma \in K_b : \gamma = b + t(b_0 + h),\ 0 < t < 2, ||h|| < r_0,\ h \in P\},$$

где $||\cdot||$– евклидова норма.

Пусть $l = l_\varepsilon$ – число из определения почти периодичности функции f, $\varepsilon > 0$.

Куб $C_a = b + qC(b_0)$ при $q = l/r$ также принадлежит конусу K_b, при этом длина его ребра равна l. Пусть T_ε векторный ε– почти период функции f, принадлежащий кубу $C_a - a$. Тогда для некоторого вектора $a_1 \in C_a$ выполняется равенство $T_\varepsilon = a_1 - a$. Следовательно, $a + T_\varepsilon \in C_a$. Так как по построению $C_a \subset L(2q)$, то некоторая интегральная кривая задачи $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = b$ обязательно пройдет через точку $(t_a, a + T_\varepsilon)$ в момент времени $t_a \leq 2q = t_{\max}$. Постоянная $t_{\max}$ для данного $\varepsilon > 0$ определяется только компактом G и не зависит от выбора точек $a, b \in R^m$. *Лемма доказана.*

Установим теперь существование предела максимального среднего (1) сначала для случая $m-1$ – невырожденного компакта G. Для этого воспользуемся теоремой 1 из [6] о существовании усредненного дифференциального включения. С этой целью введем обозначения

$$J_\Delta(\gamma_0) = \bigcup_\gamma I_\Delta(\gamma_0, \gamma), \quad I_\Delta(\gamma_0, \gamma) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(\gamma(t))\,dt,$$

где объединение средних берется по всем решениям $\gamma \in \Gamma(\gamma_0)$ для некоторого начального вектора $\gamma_0 \in R^m$. В наших условиях в указанной теореме достаточно проверить условие асимптотической независимости средних $I_\Delta(\gamma_0, \gamma)$ от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$ (поскольку дифференциальное включение (2) является автономным). Это условие означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\gamma_{01}, \gamma_{02} \in R^m \quad \forall\gamma_1 \in \Gamma(\gamma_{01}) \quad \exists\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02})$$

$$|I_\Delta(\gamma_{01}, \gamma_1) - I_\Delta(\gamma_{02}, \gamma_2)| \leq 2\varepsilon$$

при всех $\Delta \geq \Delta(\varepsilon)$.

При выполнении этого условия, согласно [6, теорема 1], гарантируется существование отрезка $[m_1, m_2]$, для которого

$$\lim_{\Delta\to\infty} \alpha(J_\Delta(\gamma_0), [m_1, m_2]) = 0$$

равномерно по $\gamma_0 \in R^m$, где $\alpha(\cdot,\cdot)$– отклонение по Хаусдорфу для множеств из R. Поскольку в этом случае предел максимального среднего (1) совпадает с числом m_2, то достаточно проверить условие асимптотической независимости средних от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$.

Для этого возьмем произвольное решение $\gamma_1 \in \Gamma(\gamma_{01})$ и построим решение $\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02})$ с помощью леммы, в условиях которой положим $a = \gamma_{01}$, $b = \gamma_{02}$. Тогда существует решение γ_τ задачи

$$\dot{\gamma} \in G, \qquad \gamma(0) = \gamma_{02}$$

на некотором отрезке $0 \le t \le \tau$, где $\tau = t_a \le t_{\max}$, для которого $\gamma_\tau(\tau) = \gamma_{01} + T_\varepsilon$. Используя решение γ_τ, мы можем теперь определить функцию $\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02})$ следующим образом:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_\tau(t), & \text{если} \quad 0 \le t \le \tau, \\ \gamma_1(t-\tau) + T_\varepsilon, & \text{если} \quad t \ge \tau. \end{cases}$$

Среднее $I_\Delta^2 = I_\Delta(\gamma_{02}, \gamma_2)$ представим в виде суммы двух интегралов

$$I_\Delta^2 = \frac{1}{\Delta}\int_0^\tau f(\gamma_2(t))\,dt + \frac{1}{\Delta}\int_\tau^\Delta f(\gamma_2(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int_0^\tau f(\gamma_2(t))\,dt + \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta-\tau} f(\gamma_1(t) + T_\varepsilon)\,dt.$$

Здесь мы воспользовались правилом построения решения γ_2.

С другой стороны, среднее

$$I_\Delta^1 = \frac{1}{\Delta}\int_{\Delta-\tau}^\Delta f(\gamma_1(t))\,dt + \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta-\tau} f(\gamma_1(t))\,dt.$$

Сравнивая с предыдущим равенством, получим оценку

$$|I_\Delta^1 - I_\Delta^2| \le 2\tau f_0/\Delta + \varepsilon \le 2 f_0 t_{\max}/\Delta + \varepsilon,$$

где постоянная $f_0 = \sup_{\gamma \in R^m} |f(\gamma)|$.

Следовательно, в определениии асимптотической независимости средних от начальных условий можно положить $\Delta(\varepsilon) = 2 f_0 t_{\max}/\varepsilon$, что в условиях теоремы и доказывает существование предела максимального среднего для $m-1$ – невырожденного компакта G.

На основании только что доказанного можно разобраться и в общем случае, когда компакт G не является $m-1$– невырожденным. Поскольку при $G = \{0\}$ предел существует, то можно считать, что $G \ne \{0\}$.

В таком случае всегда существует подпространство $L \subset R^m$, размерность которого $\dim(L) = n$, $1 \le n \le m-1$, содержащее множество G, при этом по отношению к подпространству L само множество G уже является $n-1$ – невырожденным. Введем декартовую систему координат, определяемую базисом $e_1, e_2, \ldots, e_m$ пространства R^m, где векторы $e_{n+1}, \ldots, e_m$ ортогональны к подпространству L, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис подпространства L.

В новых координатах функция f будет по – прежнему почти периодической (см. определение почти периодичности в терминах свойства предкомпактности семейства сдвигов). Более того, будет почти периодической и ее сужение на координатное подпространство, определяемое первыми n координатами.

Любое решение дифференциального включения (2), записанное в новых координатах, очевидно, обладает свойствами: последние $m-n$ координат решения будут постоянными в силу дифференциального включения. Следовательно, их можно рассматривать как параметры в задаче вычисления предела максимального среднего (1). Остается сослаться на уже доказанное свойство существования предела по отношению к координатному пространству R^n. *Теорема доказана.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00616).

Литература

[1] Филатов О.П. Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений //Матем. заметки. 1991. Т.50. Вып.3. С.135-142.

[2] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних //Матем. заметки. 1996. Т.59, вып.5. С.759-767.

[3] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений с управлением //Дифференц. уравнения. 1997. Т.33. N6.

[4] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное упрвление //Труды Математ. инст. АН СССР. 1985.Т.169. С.194–252.

[5] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 С.

[6] Филатов О.П. О существовании усредненного дифференциального включения// Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. N12. С.2118–2127.

THE EXISTENCE OF THE LIMITS OF MAXIMAL MEANS FOR ALMOST–PERIODIC FUNCTIONS OF SOME VARIABLES.

O.P. Filatov[2]

It is proved that the limit $M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_z \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(z(t))\,dt$,
where $f : R^m \to R$ is a continuouse almost–periodic functions and the supremum is taken over all solutions of the differential inclusion $\dot z \in G$, $z(0) = z_0$, compact $G \subset R^m$, alwayse exists.

[2]Filatov Oleg Pavlovich, dept. of mathematics Samara state university