О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л.С. Пулькина[1]

Доказано существование единственного обобщенного решения задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Доказательство базируется на полученных априорных оценках и методе Галеркина.

1. Введение

При математическом моделировании некоторых физических явлений оказалось весьма удобным использовать вместо краевых условий на искомое решение соответствующего дифференциального уравнения нелокальные интегральные условия. Некоторые задачи с интегральными условиями поставлены [1, 2] и изучены [3, 4, 5] для уравнений параболического типа. В настоящей заметке рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения и решен вопрос о ее обобщенной разрешимости. Существование и единственность классического решения этой задачи доказана в [6].

2. Постановка задачи и априорные оценки

Рассмотрим уравнение

$$Lw \equiv w_{xy} + (Aw)_x + (Bw)_y + Cw = F(x,y), \tag{1}$$

коэффициенты которого ограничены, имеют ограниченные производные первого порядка, а $C(x,y)$ имеет также ограниченную смешанную производную в прямоугольнике $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$.

Пусть $F(x,y) \in L_2(D)$.

Для уравнения (1) будем изучать нелокальную задачу с интегральными условиями:

$$\int_0^a w(x,y)dx = \psi(y), \int_0^b w(x,y)dy = \varphi(x) \tag{2}$$

[1] Пулькина Людмила Степановна, кафедра математической физики Самарского государственного университета

для п.в. $x \in (o, a)$ и п.в. $y \in (0, b)$ соответственно, где функции $\psi(y) \in L_2(0, b)$, $\varphi(x) \in L_2(0, a)$ заданы и удовлетворяют условию согласования:

$$\int_0^a \varphi(x)dx = \int_0^b \psi(y)dy = P.$$

Задачу (1)-(2) сведем к задаче с однородными условиями, положив $w(x, y) = u(x, y) + W(x, y)$, где $W(x, y) = \frac{1}{a}\psi(y) + \frac{1}{b}\varphi(x) - \frac{P}{ab}$. Обозначим $f(x, y) = F(x, y) - LW$ и будем теперь рассматривать задачу:

$$Lu \equiv u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x, y), \tag{3}$$

$$\int_0^a u(x, y)dx = 0, \int_0^b u(x, y)dy = 0 \tag{4}$$

для п.в.$y \in (0, b)$ и п.в. $x \in (0, a)$.

Обозначим $\tilde{H}^1(D)$ пространство функций $u(x, y) \in L_2(D)$, удовлетворяющих условиям (4) и имеющих обобщенные производные первого порядка, также принадлежащие $L_2(D)$. $\tilde{H}^1(D)$ - гильбертово пространство с нормой $||u||^2_{\tilde{H}^1} = ||u||^2_{H^1} = \int\int_D (u^2 + u_x^2 + u_y^2)dxdy$.

Введем оператор

$$lu = \int_o^y \int_0^x v(t, \tau)dtd\tau - \left(\int_0^y v_x(x, \tau)d\tau + \int_0^x v_y(t, y)dt\right) = l_0 v - l_1 v \tag{5}$$

и обозначим

$$B(u, v) = (u, v)_{H^1} + (((Au)_x + (Bu)_y + Cu), lv)_{L_2}.$$

Определение 1 *Обобщенным решением задачи* $(3) - (4)$ *будем называть функцию* $u(x, y) \in \tilde{H}^1(D)$, *удовлетворяющую для любой* $v(x, y) \in \tilde{H}^1(D)$ *тождеству:*

$$B(u, v) = (f, lv)_{L_2}. \tag{6}$$

Определение 2 *Обобщенным решением задачи* $(1) - (2)$ *будем называть функцию* $w(x, y) \in H^1(D)$ *такую, что* $w(x, y) = u(x, y) + W(x, y)$ *,где* $u(x, y)$ *- обобщенное решение задачи* $(3) - (4)$, *а* $W(x, y) = \frac{1}{a}\psi(y) + \frac{1}{b}\varphi(x) - \frac{P}{ab}$.

Для доказательства существования и единственности решения задачи $(3) - (4)$ воспользуемся априорными оценками решения, полученными в следующих леммах:

Лемма 1 *Если* $|A| < 1, |B| < 1$, *первые производные коэффициентов* A *и* B, *а также* C_{xy} *ограничены,* $A_y - 2(A_x + C)^2 \geq 0, B_x - 2(B_y + C)^2 \geq 0, A_y B_x - C^2 \geq 0, C_{xy} \leq 0$ *в области* D, *то существуют постоянные* $c_1 > 0, c_2 > 0$ *такие, что*

$$||u||^2_{\tilde{H}^1} \leq c_1 B(u, u), \tag{7}$$

$$B(u, v) \leq c_2 ||u||_{\tilde{H}^1} ||v||_{\tilde{H}^1}. \tag{8}$$

Для доказательства рассмотрим выражение $B(u, v)$ при $v = u$, преобразуем некоторые из слагаемых интегрированием по частям и после удобной для дальнейших исследований группировки получим:

$$B(u, v) = (1 - 2\alpha)\int\int_D u^2 dxdy + (1 - \beta)\int\int_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int\int_D A_y\left(\int_0^y ud\tau\right)^2 dxdy + 2\int\int_D C\int_0^y ud\tau\int_0^x udtdxdy+\right.$$

$$\left.+\int\int_D B_x\left(\int_0^x udt\right)^2 dxdy\right] - \frac{1}{2}\int\int_D C_{xy}\left(\int_0^y\int_0^x udtd\tau\right)^2 dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int\int_D A_y\left(\int_0^y u_x d\tau\right)^2 dxdy - 2\int\int_D (A_x + C)u\int_0^y u_x d\tau dxdy+\right.$$

$$\left.+\alpha\int\int_D u^2 dxdy\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int\int_D B_x\left(\int_0^x u_y dt\right)^2 dxdy - 2\int\int_D (B_y + C)u\int_0^x u_y dtdxdy+\right.$$

$$\left.+\alpha\int\int_D u^2 dxdy\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\alpha\int\int_D u^2 dxdy + 2\int\int_D Auu_y dxdy+\right.$$

$$\left.+2\beta\int\int_D u_y^2 dxdy\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\alpha\int\int_D u^2 dxdy + 2\int\int_D Buu_x dxdy+\right.$$

$$\left.+2\beta\int\int_D u_x^2 dxdy\right],$$

где $\alpha < \frac{1}{2}, \beta < 1$. Принимая во внимание условия леммы и положив $\frac{1}{C_1} = min(1 - 2\alpha, 1 - \beta)$, приходим к неравенству (7). Преобразовав $B(u,v)$, используя его представление и неравенство Коши - Буняковского там, где это полезно, убеждаемся в справедливости неравенства (8).

Лемма 2 *Если выполнены условия леммы 1, то существует постоянная* $c_3 > 0$ *такая, что*

$$||u_m||_{H^1(D)} \le c_3||f||_{L_2(D)}. \tag{9}$$

Доказательство. Из неравенства (7) леммы 1 имеем:

$$||u_m||^2_{\tilde{H}^1(D)} \le c_1 B(u_m, u_m) = c_1(f, lu_m)_{L_2} \le c_1||f||_{L_2}||lu_m||_{L_2}.$$

Так как

$$||lu_m||_{L_2(D)} = \left[\int\int_D\left(\int_0^y\int_0^x u_m(t,\tau)dtd\tau\right)^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}} \le (ab)^{\frac{1}{2}}||u_m||_{H^1},$$

то $c_3 = c_1(ab)^{\frac{1}{2}}$.

3. Существование и единственность решения

Теорема 1 *Если выполнены условия леммы 1, то существует единственное обобщенное решение задачи (1) - (2).*

Доказательство. Из определения 2 видно, что достаточно убедиться в разрешимости задачи (3) - (4). Единственность решения вытекает из неравенства (7), так как $B(u,u)=0$, если $f(x,y)=0$.

Для доказательства существования решения воспользуемся методом Галеркина. Обозначим V_m конечномерное подпространство пространства $\tilde{H}^1(D)$, а его базис - $\{\Phi_k\}, k=1,...m$. Для любого m будем искать приближенные решения задачи в виде:

$$u_m(x,y)=\sum_{k=1}^{m} d_k^m \Phi_k(x,y),$$

из соотношений:

$$B(u_m,v_m)=(f,lv_m)_{L_2}. \tag{10}$$

Равенства (10) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных d_k^m с матрицей $B=(B(\Phi_i,\Phi_j))$. Однозначная разрешимость этой системы следует из неравенства (7). Действительно, предположим, что существует нетривиальное решение системы (10) $z=(z_1,z_2,...,z_n)$. Рассмотрим функцию $u_m^0(x,y)=\sum_{k=1}^{m} z_k\Phi_k(x,y)$. Тогда, используя неравенство (7), имеем:

$$0=z^TAz=B(u_m^0,u_m^o)\geq ||u_m^0||_{H^1}^2,$$

откуда следует, что $u_m^0(x,y)=0$ и в силу линейной независимости функций $\Phi_i(x,y)$ $z=0$.

Неравенство (9) означает, что множество функций $u_m, m=1,2,...$ ограничено в $\tilde{H}^1(D)$. Но тогда это множество слабо компактно в $\tilde{H}^1(D)$, значит из него можно выделить подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), слабо сходящуюся в $\tilde{H}^1(D)$, то есть $\lim_{m\to\infty}(u_m,v)=(u,v)$ для любой $v\in\tilde{H}^1(D)$.

Покажем, что эта функция $u(x,y)$ и есть обобщенное решение задачи (3) - (4). Так как каждая из функций $u_m(x,y)$ удовлетворяет для любого $l, 1\leq l\leq m$ тождеству:

$$\int\int_D\left(u_m\Phi_l-Au_m\int_0^y\Phi_l(x,\tau)d\tau-Bu_m\int_0^x\Phi_l(t,y)dt+Cu_m\Phi_l\right)dxdy=$$

$$=\int\int_D f(x,y)\Phi_l(x,y)dxdy,$$

то, умножив каждое из них на c_i, просуммировав по i от 1 до m и обозначив $\eta_m(x,y)=\sum_{l=1}^{m} d_l\Phi_l(x,y)$, получим:

$$B(u_m,\eta_m)=(f,l\eta_m)_{L_2}. \tag{11}$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$ в (11), приходим к тождеству (6) для предельной функции $u(x,y)$, что и означает справедливость утверждения теоремы.

Литература

[1] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений //ДУ. 1980. Т.16. N.11. С.1221-1228.

[2] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод //ДУ. 1982. Т.18. N1. С.72-81.

[3] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием //ДУ. 1977. Т.13. N.2. С.294-304.

[4] Bouziani A. et Benouar N-E. Problème mixte avec condition intégrales pour une class d'équation paraboliques //C.R.Acad.Sci.Paris. 1995. T.321. Serie 1, P.1177-1182.

[5] Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения //Математич. заметки. 1993. Т.54. Вып.4. С.98-116.

[6] Голубева Н.Д., Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями //Математич. заметки. 1996. Т.59. Вып.3.

ON SOLVABILITY OF THE NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

L.S. Pulkina [2]

In this paper the existence and uniqeness of the generalized solution of certain nonlocal problem are proved. With this end in view two-sided a priori estimates are established.

[2]Pulkina Ludmila Stepanovna, dept of math. Samara state university